Corso di Fisica bI: Appello del 15 Febbraio 2002

Si spieghi in dettaglio il procedimento seguito, il significato dei vari simboli e formule adoperate. Si prega inoltre di fare attenzione alla leggibilitá *dell'elaborato. Si faccia uso del sistema SI.*

Esercizio 1

Due onde sinusoidali di uguale frequenza (ν) ed ampiezza $A = 500\ \mu m$, si propagano in direzioni opposte su una corda tesa di lunghezza $L = 40\ cm$ fissata agli estremi. La velocità di propagazione delle onde è in modulo pari a $v = 30\ msec^{-1}$.

- Le due onde producono una oscillazione stazionaria. Scrivere l'equazione della perturbazione risultante in funzione dei parametri dati.

Si osserva che tra i punti della corda che raggiungono la velocità massima quello che si trova più vicino ad uno degli estremi dista da esso 10 cm. Dire in base a questa osservazione quanto valgono :

- la lunghezza d'onda λ;
- la frequenza di oscillazione ν;
- la velocità massima con cui si muovono i punti della corda.

Fermi restando tutti gli altri parametri, la corda viene sostituita con una della stessa lunghezza, dello stesso materiale ma di sezione 4 volte inferiore. Quanto vale in questo caso la lunghezza d'onda λ ?

Esercizio 2

Un conduttore piano infinito ha una sporgenza di forma sferica, di raggio R. La superficie del conduttore è invariante per rotazione attorno all'asse z, asse passante per il centro della semisfera e perpendicolare al conduttore stesso (vedi fig. 1). Il conduttore è messo a terra. Una carica puntiforme q è posta sull'asse z a distanza d dal centro della semisfera, coincidente con l'origine delle coordinate (vedi fig. 1). Si calcoli:

- la forza che agisce sulla carica;
- l'energia elettrostatica del sistema conduttore più carica;
- la densità di carica e la carica totale indotta sulla superficie del conduttore.

Suggerimento: si consiglia di procedere utilizzando il metodo delle cariche immagini. Inoltre, nel calcolo della carica totale indotta il metodo consistente nell'integrare la densitá superficiale di carica non *é necessariamente il piú semplice.*

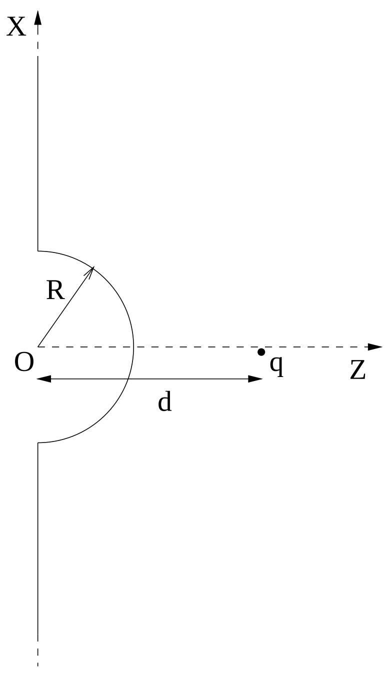

Figura 1:

Esercizio 3

Una piccola sfera di suscettivitá χ e raggio a é posta a grande distanza r da una sfera conduttrice di raggio b, mantenuta ad un potenziale V (vedi figura 2.

Sapendo che il mezzo interposto ha costante dielettrica relativa uguale ad 1 e che $a \ll r$, si trovi l'espressione della forza che si esercita tra le due sfere.

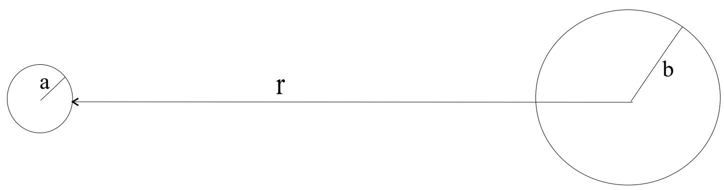

Figura 2:

Soluzioni

Esercizio 1

Supponiamo che la corda in posizione di riposo giaccia sull'asse x tra $x = 0$ e $x = L$. Le due onde di uguale ampiezza e frequenza che si muovono in direzioni opposte generano sulla corda un'onda stazionaria la cui equazione in funzione delle variabili date è :

$$\psi(x,t) = 2Asin\frac{2\pi\nu}{v}xsen2\pi\nu t = 2Asinkxsen\omega t \tag{1}$$

La velocità dei punti della corda è :

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \dot{\psi}(x,t) = 2A\omega sinkxcos\omega t \tag{2}$$

e la velocità massima è $\dot{\psi}_{max} = 4A\pi\nu$. I tratti di corda che raggiungono la velocità massima si trovano nei punti di coordinata x_n definiti dall'equazione :

$$senkx_n = 1 \quad \rightarrow kx_n = \quad n\pi + \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

dove n assume tutti i valori possibili $n = 0, 1, 2....$ tenendo conto che $x_n < L$. Il punto più vicino all'estremo si ottiene per $n = 0$, cioè :

$$x_0 = \frac{\pi}{2k} \tag{4}$$

e per i dati del problema questo è uguale a :

$$\frac{\pi}{2k} = \frac{L}{4} \tag{5}$$

La lunghezza d'onda delle onde stazionarie che possono essere sostenute dalla corda sono :

$$k_m = \frac{m\pi}{L} \quad \rightarrow \quad \lambda_m = \frac{2L}{m} \tag{6}$$

dove $m = 1, 2, ...$ Quindi si ha :

$$\frac{L}{2m} = \frac{L}{4} \quad \rightarrow \quad m = 2 \tag{7}$$

Quindi la lunghezza d'onda, la frequenza e la velocità massima con cui si muovono i punti sono :

$$\begin{aligned} \lambda &= L = 40\ cm && (8)\\ \nu &= \frac{v}{\lambda} = \frac{30}{0.4} = 75Hz && (9)\\ \dot{\psi}(x,t)_{max} &= 4A\pi\nu = 4\cdot 5\,10^{-4}\cdot 3.14\cdot 75 = 0.471\ ms^{-1} && (10) \end{aligned}$$

Se si sostituisce la corda con una di sezione 4 volte inferiore la velocità di propagazione dell'onda diventa due volte maggiore infatti :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\rho s}} \tag{11}$$

dove T indica la tensione della corda, μ la densità lineare, ρ la densità di volume ed s la sezione. Di conseguenza la lunghezza d'onda λ risulterà due volte maggiore.

Esercizio 2

Il problema può essere risolto utilizzando il metodo delle immagini, aggiungendo 3 cariche immagini all'interno del conduttore disposte sull'asse z, come mostrato in figura 3. Affinchè la semisfera sia a potenziale nullo occorre mettere una carica immagine $q' =$

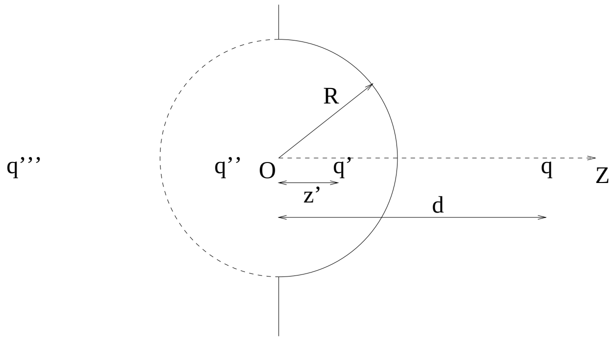

Figura 3:

$-qR/d$ a distanza $z' = R^2/d$ dall'origine sull'asse z. Affinchè il piano sia a potenziale nullo occorre aggiungere altre due cariche immagini $q'' = -q'$ e $q''' = -q$ a distanza $z'' = -z'$ e $z''' = -d$, all'interno del conduttore sempre lungo l'asse z. Le cariche q'' e q''' poste in posizione simmetrica rispetto a q e q' danno un contributo nullo al potenziale sulla superficie della semisfera.

1. la forza che agisce sulla carica è la somma delle forze esercitate da ciascuna immagine sulla carica stessa:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_{qq'} + \vec{F}_{qq''} + \vec{F}_{qq'''} = F_z \hat{z} \\
F_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{-qR}{d}\frac{1}{(d-R^2/d)^2} + \frac{qR}{d}\frac{1}{(d+R^2/d)^2} - \frac{q}{4d^2}\Big) = \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{-Rd}{(d^2-R^2)^2} + \frac{Rd}{(d^2+R^2)^2} - \frac{1}{4d^2}\Big);
\end{aligned}$$

   Questa forza tende ad attrarre la carica sul piano.

2. l'energia elettrostatica del sistema può essere calcolata in due modi:

   (a) integrando il prodotto del potenziale per la densità di carica totale (conduttore + carica) $\sigma_{x,y,z} + q\delta(z-d)$:

   $$U = \frac{1}{2}\Big(q\phi'(0,0,d) + \int_{condutt} \sigma(x,y,z)\phi(x,y,z)dxdydz\Big)$$

   dove ϕ' ‘e il potenziale dovuto alla sola densità di carica superficiale. Il secondo integrale dà contributo nullo in quanto è calcolato sulla superficie del conduttore (che è a potenziale 0). ϕ' può essere calcolato come somma di contributi di ciascuna carica immagine:

$$\begin{aligned}\phi'(0,0,d) &= \phi_{q'}(0,0,d)+\phi_{q''}(0,0,d)+\phi_{q'''}(0,0,d)\\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{d^2-R^2}+\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{d^2+R^2}-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2d}\end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$U = \frac{1}{2}q\phi'(0,0,d)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2}\Big(\frac{-R}{d^2-R^2}+\frac{R}{d^2+R^2}-\frac{1}{2d}\Big)$$

(b) come lavoro fatto dalle forze esterne per portare la carica q dall'infinito alla posizione $z=d$ (non si compie lavoro per portare il piano dall'infinito alla configurazione attuale, essendo inizialmente scarico):

$$\begin{aligned}U &= -\int_\infty^d F_z dz\\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^d\Big(\frac{-Rz}{(z^2-R^2)^2}+\frac{Rz}{(z^2+R^2)^2}-\frac{1}{4z^2}\Big)dz\\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{-R^3}{d^4-R^4}-\frac{1}{4d}\Big)\end{aligned}$$

3. La densità di carica indotta sulla superficie del conduttore si ottiene dalla componente normale del campo elettrico alla superficie stessa. Calcoliamo dapprima la densità di carica in un punto generico del conduttore in cui il profilo è piano ($(x,y,0)$ con $\sqrt{x^2+y^2}>R$):

$$\begin{aligned}\sigma_{piano}(x,y,0) &= \epsilon_0 E_z\\ &= -2\frac{q}{4\pi}\frac{d}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}-2\frac{q'}{4\pi}\frac{z'}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

La densità di carica sulla superficie della semisfera è (in coordinate sferiche):

$$\begin{aligned}\sigma_{sfera}(R,\theta,\phi) &= \epsilon_0 E_r=-\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R}\\ &= \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{q(R-d\cos\theta)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}+\frac{q'(R-z'\cos\theta)}{(z'^2+R^2-2z'R\cos\theta)^{3/2}}\Big)+\\ &- \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{q(R+d\cos\theta)}{(d^2+R^2+2Rd\cos\theta)^{3/2}}+\frac{q'(R+z'\cos\theta)}{(z'^2+R^2+2z'R\cos\theta)^{3/2}}\Big)\end{aligned}$$

4. **primo modo**: la carica totale può essere calcolata integrando le due densità di carica. Utilizziamo le coordinate cilindriche per integrare sul piano, mentre quelle sferiche per integrare sulla semisfera. Indichiamo in **grassetto** il differenziale nell'integrale, per distinguerlo dalla distanza d:

$$Q_{piano} = -\int_R^\infty\Big(\frac{2qd}{4\pi}\frac{2\pi\rho\mathbf{d}\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}+\frac{2q'z'}{4\pi}\frac{2\pi\rho\mathbf{d}\rho}{(\rho^2+z'^2)^{3/2}}\Big)=$$

$$= -\Big(\frac{qd}{\sqrt{R^2+d^2}} + \frac{qz'}{\sqrt{R^2+z'^2}}\Big)$$

$$\begin{aligned} Q_{semisfera} &= \frac{q}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R-dcos\theta)2\pi R^2\sin\theta\mathbf{d}\theta}{(d^2+R^2-2Rdcos\theta)^{3/2}} + \frac{q'}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R-z'cos\theta)2\pi R^2\sin\theta\mathbf{d}\theta}{(z'^2+R^2-2Rz'cos\theta)^{3/2}} + \\ &- \Big(\frac{q}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R+dcos\theta)2\pi R^2\sin\theta\mathbf{d}\theta}{(d^2+R^2+2Rdcos\theta)^{3/2}} + \frac{q'}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R+z'\cos\theta)2\pi R^2\sin\theta\mathbf{d}\theta}{(z'^2+R^2+2Rz'\cos\theta)^{3/2}}\Big) \end{aligned}$$

Calcoliamo il primo integrale (il secondo è formalmente identico):

$$\frac{q}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R-d\cos\theta)2\pi R^2\sin\theta\mathbf{d}\theta}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}} = \frac{qR^2}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{\mathbf{d}\cos\theta(d\cos\theta-R)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}$$

ponendo $x = d\cos\theta - R$ l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \frac{qR^2}{2}\int_{x=d-R}^{x=-R} \frac{xdx}{d(d^2-R^2-2Rx)^{3/2}} &= \\ = \frac{qR^2}{2}\frac{2}{4dR^2}\Big(\sqrt{d^2-R^2-2Rx} + \frac{d^2-R^2}{\sqrt{d^2-R^2-2Rx}}\Big)\Big|_{x=d-R}^{x=-R} &= \\ = \frac{q}{4d}\Big(\sqrt{d^2+R^2} + \frac{d^2-R^2}{\sqrt{d^2+R^2}} - (|d-R| + sgn(d-R)(d+R)\Big) &= \\ = \frac{q}{4d}\Big(\frac{2d^2}{\sqrt{d^2+R^2}} - 2d\Big) = \frac{q}{2}\Big(\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} - 1\Big) \end{aligned}$$

Il secondo integrale si ottiene sostituendo q e d con q' e z', con il *caveat* $z' < R$:

$$\begin{aligned} \frac{q'}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R-z'\cos\theta)2\pi R^2\sin\theta\mathbf{d}\theta}{(z'^2+R^2-2Rz'\cos\theta)^{3/2}} &= \\ = \frac{q'}{4z'}\Big(\sqrt{z'^2+R^2} + \frac{z'^2-R^2}{\sqrt{z'^2+R^2}} - (|z'-R| + sgn(z'-R)(z'+R)\Big) &= \\ = \frac{q'}{4z'}\Big(\frac{2z'^2}{\sqrt{z'^2+R^2}} + 2d\Big) = \frac{q'}{2}\Big(\frac{z'}{\sqrt{z'^2+R^2}} + 1\Big) \end{aligned}$$

Il terzo integrale può essere calcolato nel seguente modo:

$$-\frac{q}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R+d\cos\theta)2\pi R^2\sin\theta\mathbf{d}\theta}{(d^2+R^2+2Rd\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{qR^2}{2}\int_{\theta'=\pi/2}^{\theta'=\pi} \frac{d\cos\theta'(d\cos\theta'-R)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta')^{3/2}}$$

quindi l'integrando è formalmente indentico al primo a parte il segno globale. Possiamo quindi usare la stessa sostituzione $x = d\cos\theta' - R$ e l'integrale diventa:

$$
\begin{aligned}
-\frac{qR^2}{2}\int_{x=-R}^{x=-(d+R)} \frac{x dx}{d(d^2-R^2-2Rx)^{3/2}} &= \\
= -\frac{qR^2}{2}\frac{2}{4dR^2}\Big(\sqrt{d^2-R^2-2Rx} + \frac{d^2-R^2}{\sqrt{d^2-R^2-2Rx}}\Big)\Big|_{x=-R}^{x=-(d+R)} &= \\
= -\frac{q}{4d}\Big((d+R)+(d-R)-(\sqrt{d^2+R^2}+\frac{d^2-R^2}{\sqrt{d^2+R^2}})\Big) &= \\
= \frac{q}{4d}\Big(\frac{2d^2}{\sqrt{d^2+R^2}} - 2d\Big) = \frac{q}{2}\Big(\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} - 1\Big)
\end{aligned}
$$

Il quarto integrale si ottiene sostituendo q e d con q' e z':

$$
\begin{aligned}
-\frac{q'R^2}{2}\int_{\theta'=\pi/2}^{\theta'=\pi} \frac{\mathbf{d}\cos\theta'(z'\cos\theta' - R)}{(z'^2+R^2-2Rz'\cos\theta')^{3/2}} &= \\
= \frac{q'}{4z'}\Big(\frac{2z'^2}{\sqrt{z'^2+R^2}} - 2z'\Big) = \frac{q'}{2}\Big(\frac{z'}{\sqrt{z'^2+R^2}} - 1\Big)
\end{aligned}
$$

La carica totale sulla superficie sferica è quindi la somma dei quattro integrali:

$$
\begin{aligned}
Q_{sfera} &= \frac{q}{2}\Big(\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} - 1\Big) + \frac{q'}{2}\Big(\frac{z'}{\sqrt{z'^2+R^2}} + 1\Big) + \\
&+ \frac{q}{2}\Big(\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} - 1\Big) + \frac{q'}{2}\Big(\frac{z'}{\sqrt{z'^2+R^2}} - 1\Big) = \\
&= q\Big(\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} - 1\Big) + q'\Big(\frac{z'}{\sqrt{z'^2+R^2}}\Big)
\end{aligned}
$$

Sommando la carica totale indotta sul piano e sulla semisfera si ottiene una carica $Q_{tot} = -q$

secondo modo

Si può utilizzare una superficie di gauss di raggio $r \to \infty$ come in figura 4. Il flusso sulla superficie all'infinito è nullo essendo la somma di due campi di dipoli e quindi va come $1/r^3$. Il campo all'interno del conduttore e nullo e quindi anche il suo flusso. Di conseguenza la somma delle cariche all'interno del volume è nulla e quindi la carica indotta sulla superficie del conduttore è -q.

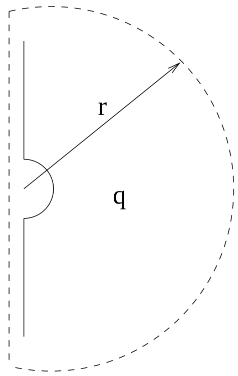

Figura 4:

Esercizio 3

Il campo generato dalla sfera conduttrice nella posizione occupata da quella dielettrica é (vedi figura 2):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

dove la carica Q posseduta dalla sfera conduttrice é data da:

$$Q = CV = 4\pi\epsilon_0 bV$$

con C la capacitá della sfera conduttrice. Quindi il campo é:

$$\vec{E} = \frac{bV}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Essendo grande la distanza della sfera dielettrica da quella conduttrice, il campo visto da questa puó esser considerato uniforme e parallelo ad $\vec{r}$. Il momento di dipolo acquistato da una sfera dielettrica in un campo uniforme E, é dato da:

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}a^3\vec{E}$$

Prendendo l'asse z parallelo ad $\vec{r}$ e l'origine nel centro della sfera conduttrice, si ha quindi:

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0\frac{\chi}{\chi+3}a^3\vec{E} = 4\pi\epsilon_0\frac{\chi}{\chi+3}\frac{a^3bV}{r^2}\hat{z}$$

La forza agente su tale dipolo nel campo generato dalla sfera conduttrice é:

$$\vec{F} = \left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

Questa ha solo la componente lungo $\vec{z}$, che vale:

$$\vec{F} = 4\pi\epsilon_0\frac{\chi}{\chi+3}\frac{a^3bV}{r^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{bV}{z^2}\hat{z} = -4\pi\epsilon_0\frac{\chi}{\chi+3}\frac{a^3bV}{z^2}\frac{2bV}{z^3}\hat{z} =$$

$$= -8\pi\epsilon_0\frac{\chi b^2V^2a^3}{(\chi+3)z^5}\hat{z}$$

dove $z = r$. Questa é rivolta nel verso opposto ad $\hat{z}$ ed é quindi attrattiva.