Problema sulle correnti

Aprile 2002

Indichiamo con $J(r)$ la densitá di corrente, con $E(r)$ il campo e con $\rho(r)$ la densitá di carica di volume. Le equazioni da soddisfare sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\vec{J} = \sigma(r)\vec{E}$$

Inoltre, l'equazione di continuitá, in condizioni stazionarie ($\rho(t) = costante$) fornisce:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Poiché il problema ha simmetria cilindrica, nell'espressione della divergenza rimane solo il termine radiale. Le ultime due equazioni scritte danno allora:

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma\vec{E} = 0$$

cioé:

$$\frac{1}{r}\left(\sigma(r)E(r) + r\frac{\partial(\sigma(r)E(r))}{\partial r}\right) = 0$$

Sostituendo in questa l'espressione data per $\sigma(r)$ ed effettuando le derivate, si trova:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 E(r) + r\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 E(r)\right] = 0$$

da cui si ottiene:

$$-E(r) + r\frac{\partial E(r)}{\partial r} = 0$$

La cui soluzione é:

$$E(r) = Kr$$

con k una costante da determinare imponendo che la differenza di potenziale tra le armature sia qualla data (V).

$$\int_a^b E(r)dr = V$$

da cui:

$$K\frac{b^2 - a^2}{2} = V$$

cioé:

$$K = \frac{2V}{b^2 - a^2}$$

La densitá di carica $\rho(r)$ puó ora esser ottenuta dall'equazione 1:

$$E(r) + r\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{r\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Sostituendo in questa l'espressione ricavata per $E(r)$ si trova poi:

$$2Kr = \frac{r}{\epsilon_0}\rho(r)$$

da cui:

$$\rho(r) = 2K\epsilon_0 = 4\epsilon_0\frac{V}{b^2 - a^2}$$

La corrente totale I si ottiene integrando J (data da $\sigma(r)E(r)$) su di una superficie cilindrica di raggio r ed altezza L:

$$I = 2\pi rLJ = \sigma_a\frac{a^2}{b^2 - a^2}4\pi LV$$

da cui si ottiene la resistenza:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{b^2 - a^2}{a^2}\frac{1}{4\pi L\sigma_a}$$

La densitá di carica di volume é quindi costante ed uguale a ρ. Quella di superficie é data dal valore di $\epsilon_0 E(r)$ sulle superfici delle armature.

Se il materiale posto tra le armature é un dielettrico, con:

$$\epsilon \;=\; \epsilon_0 \left(1 + k\cos^2\theta\right)$$

le equazioni da soddisfare sono:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} \;=\; 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \;=\; 0$$

cioé:

$$\vec{\nabla}\cdot\epsilon\vec{E} \;=\; 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\sigma\vec{E} \;=\; 0$$

In coordinate cilindriche la prima di queste diventa:

$$E_r + r\frac{\partial E_r}{\partial r} \;=\; \frac{2k\sin\theta\cos\theta}{1+k\cos^2\theta}E_\theta - \frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} \tag{2}$$

e la seconda:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma E_r\right) + \frac{\partial(\sigma E_\theta}{\partial\theta} \;=\; 0$$

cioé:

$$\sigma E_r + rE_r\frac{\partial\sigma}{\partial r} + r\sigma\frac{\partial E_r}{\partial r} + \sigma\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} \;=\; 0$$

da cui:

$$E_r(1-2\sigma_a) + r\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} \;=\; 0$$

ed infine:

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} \;=\; E_r(2\sigma_a - 1) - r\frac{\partial}{\partial r}E_r$$

Sostituendo questa nella 2 si ottiene:

$$E_r \;=\; \frac{k}{\sigma_a}\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}\,E_\theta$$

da cui si vede che se si annulla la componente θ deve annullarsi anche quella radiale (tranne che per $\theta = 0$ o per $\theta = \pi/2$).