Prima prova del corso di Fisica Generale IIB – 8/4/2002

Esercizio 1

Sia dato un condensatore cilindrico di lunghezza L, raggio interno a e raggio esterno b, con $L >> a, b$. Tra le due armature poste a differenza di potenziale V, vi è un mezzo di costante dielettrica ϵ_0 e conduttività $\sigma = \sigma_a \cdot (a/r)^2$. Si calcoli :

- il campo elettrico ovunque;
- la resistenza del condensatore;
- la densità di carica libera di volume e di superficie.

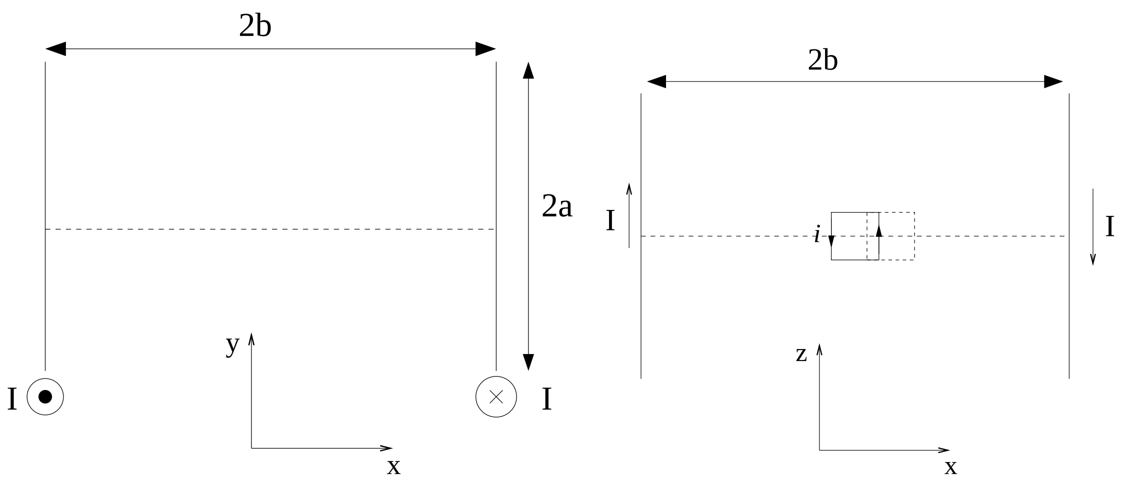
Esercizio 2

Siano dati due nastri conduttori di lunghezza indefinita, larghezza $2a$ e spessore trascurabile, disposti parallelelamente a distanza $2b$. La loro resistenza elettrica sia trascurabile. Una corrente uniforme e costante di modulo I scorre come disegnato in figura (sinistra).

- si calcoli il campo di induzione magnetica in ogni punto del piano mediano perpendicolare ai nastri di corrente;

Una spira quadrata di massa M e lato $2d$, percorsa da una corrente costante i che scorre in senso antiorario come disegnato in figura (destra), di resistenza trascurabile, viene posta tra i due nastri di corrente come disegnato in figura (destra). La spira è vincolata a muoversi lungo l'asse x e le sue dimensioni sono tali che $b, a >> d$.

- si calcoli la forza che la spira risente in una posizione generica tra i due nastri;
- si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni della spira per oscillazioni lungo l'asse x intorno alla posizione di equilibrio, nel limite $b >> a$.



Soluzione

Esercizio 1 - Metodo I

Data la simmetria del problema il campo elettrico e radiale ed indipendente da z (coordinata lungo lasse del cilindro). Il campo elettrico sulla superficie della armatura interna, $r = a$ vale :

$$\vec{E}(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}\hat{r} \tag{1}$$

Consideriamo ora una superficie cilindrica di raggio r e altezza Δz ed utilizziando la condizione di stazionarietà della corrente imponiamo che il flusso della densità di corrente $\vec{J}$ sia nullo :

$$J(a)2\pi a\Delta z = J(r)2\pi r\Delta z \quad \rightarrow \quad \sigma(a)E(a)2\pi a\Delta z = \sigma(r)E(r)2\pi a\Delta z \tag{2}$$

quindi si ottiene :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a^2}r \tag{3}$$

La corrente è quindi data dal flusso della densità di corrente attraverso una superficie cilindrica :

$$i = \sigma(a)E(a)2\pi aL = \frac{\sigma_a\lambda L}{\epsilon_0} \tag{4}$$

La differenza di potenziale è data da :

$$V = \int_a^b E(r)dr \quad \rightarrow \quad V = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a^2}(b^2 - a^2) \tag{5}$$

da cui si può ricavare λ. La resistenza a questo punto può essere ricavata come :

$$R = \frac{V}{i} = \frac{b^2 - a^2}{4\pi\sigma_a La^2} \tag{6}$$

Alternativamente si può ottenere la resistenza come resistenza equivalente di cilindri di raggio dr e lunghezza L connessi in serie :

$$R = \int_a^b \frac{\rho_a r^2}{a^2 2\pi rL}dr = \frac{1}{\sigma_a 2\pi La^2}\int_a^b rdr = \frac{b^2 - a^2}{\sigma_a 4\pi La^2} \tag{7}$$

La densità di carica libera di volume è :

$$\rho(r) = \vec{\nabla}\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi a^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2 = \frac{\lambda}{\pi a^2} \tag{8}$$

Esercizio 1 - Metodo II

Lo stesso esercizio può essere risolto in modo alternativo utilizzando il procedimento descritto qui di sguito. Indichiamo con $J(r)$ la densità di corrente, con $E(r)$ il campo e con $\rho(r)$ la densità di carica di volume. Le equazioni da soddisfare sono:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{9}$$

$$\vec{J} = \sigma(r)\vec{E}$$

Inoltre, l'equazione di continuità, in condizioni stazionarie ($\rho(t) = costante$) fornisce:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

Poichè il problema ha simmetria cilindrica, nell'espressione della divergenza rimane solo il termine radiale. Le ultime due equazioni scritte danno allora:

$$\vec{\nabla}\cdot\sigma\vec{E} = 0$$

cioè:

$$\frac{1}{r}\left(\sigma(r)E(r) + r\frac{\partial(\sigma(r)E(r))}{\partial r}\right) = 0$$

Sostituendo in questa l'espressione data per $\sigma(r)$ ed effettuando le derivate, si trova:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 E(r) + r\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 E(r)\right] = 0$$

da cui si ottiene:

$$-E(r) + r\frac{\partial E(r)}{\partial r} = 0$$

La cui soluzione è:

$$E(r) = Kr$$

con k una costante da determinare imponendo che la differenza di potenziale tra le armature sia quella data (V).

$$\int_a^b E(r)dr = V$$

da cui:

$$K\frac{b^2 - a^2}{2} = V$$

cioè:

$$K = \frac{2V}{b^2 - a^2}$$

La densità di carica $\rho(r)$ può ora esser ottenuta dall'equazione 9:

$$E(r) + r\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{r\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Sostituendo in questa l'espressione ricavata per $E(r)$ si trova poi:

$$2Kr = \frac{r}{\epsilon_0}\rho(r)$$

da cui:

$$\rho(r) \;=\; 2K\epsilon_0 \;=\; 4\epsilon_0\frac{V}{b^2-a^2}$$

La corrente totale I si ottiene integrando J (data da $\sigma(r)E(r)$) su di una superficie cilindrica di raggio r ed altezza L:

$$I \;=\; 2\pi rLJ \;=\; \sigma_a\frac{a^2}{b^2-a^2}4\pi LV$$

da cui si ottiene la resistenza:

$$R \;=\; \frac{V}{I} \;=\; \frac{b^2-a^2}{a^2}\frac{1}{4\pi L\sigma_a}$$

La densità di carica di volume è quindi costante ed uguale a ρ. Quella di superficie è data dal valore di $\epsilon_0 E(r)$ sulle superfici delle armature.

Esercizio 2

Data la simmetria del problema il campo di induzione magnetica può avere solo componente lungo y (vedi figura , sinistra) . Il campo si può calcolare come somma sovrapposizione del campo dei due nastri. Per calcolare il campo di un nastro considero i contributi infinitesimi del campo generato da fili percorsi da corrente di (figura1) :

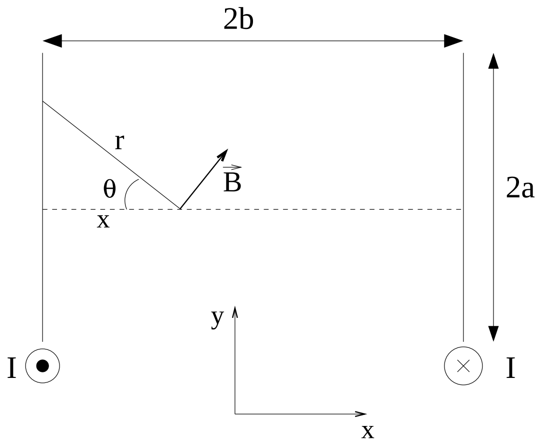


Figure 1:

$$dB_{nastro} = \frac{\mu_0 cos\theta}{2\pi r}di \tag{10}$$

dove $di = Jdy$ e J è la densità di corrente che è data da $J = I/2a$. Poichè :

$$y \;=\; xtg\theta \;\;\rightarrow\;\; dy = x\cos^2\theta d\theta \tag{11}$$

$$r \;=\; \frac{x}{cos\theta} \tag{12}$$

sostituendo ed integrando si ottiene :

$$B_{nastro} = 2\int_0^a \frac{\mu_0 J}{2\pi x}cos^2\theta dy = 2\int_0^{atan\frac{a}{x}} \frac{\mu_0 J}{2\pi}d\theta = \frac{\mu_0 J}{\pi}atan\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}atan\left(\frac{a}{x}\right) \tag{13}$$

Quindi il campo totale generato dai due nastri di corrente è dato da :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(atan\left(\frac{a}{x}\right) + atan\left(\frac{a}{2b - x}\right)\right) \hat{y} \tag{14}$$

Se si considera una spira che può traslare lungo la direzione x si può calcolare la forza come :

$$\vec{F} = \vec{m}\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\hat{x} \tag{15}$$

dove $\vec{m} = -4d^2 i\hat{y}$. Il campo B può essere riscritto in funzione della distanza δ dal centro dei due nastri :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(atan\left(\frac{a}{b + \delta}\right) + atan\left(\frac{a}{b - \delta}\right)\right) \hat{y} \tag{16}$$

la forza risentita dalla spira è data da :

$$F_x = -m\frac{\partial B}{\partial \delta} = -\frac{m\mu_0 I}{2\pi a}\left[\frac{1}{(b-\delta)^2 + a^2} - \frac{1}{(b+\delta)^2 + a^2}\right] \tag{17}$$

si vede che per $\delta = 0$ si ha $F_x = 0$. Nell'approssimazione $b >> a$ e $b >> d$ si ha :

$$F_x \simeq -\frac{m\mu_0 I}{2\pi b^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{2\delta}{b}} - \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{b}}\right) \simeq -\frac{m\mu_0 I}{2\pi}\frac{4\delta}{b^3} \tag{18}$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è quindi :

$$T = \sqrt{\frac{\pi M b^3}{m\mu_0 I 2}} \tag{19}$$