Prima prova del corso di Fisica Generale IIB – 8/4/2002

Esercizio 1

Sia dato un condensatore cilindrico di lunghezza L, raggio interno a e raggio esterno b, con $L >> a, b$. Tra le due armature poste a differenza di potenziale V, vi é un mezzo di costante dielettrica ϵ_0 e conduttivitá $\sigma = \sigma_a \cdot (a/r)^2$. Si calcoli :

- il campo elettrico ovunque;
- la resistenza del condensatore;
- la densita' di carica libera di volume e di superficie.

Il materiale viene poi sostituito con un dielettrico di stessa conducibilitá ma con constante dielettrica :

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + kcos^2\theta) \quad k \; > \; 0 \tag{1}$$

dove θ é l'angolo azimutale, ossia di rotazione intorno all'asse del cilindro. Si discuta il problema in questa configurazione.

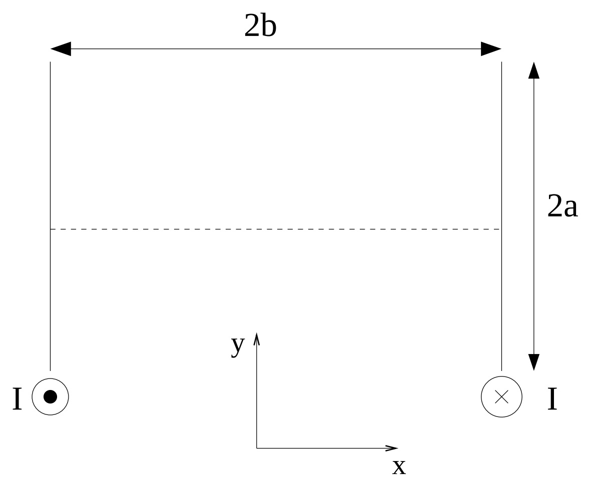
Esercizio 2

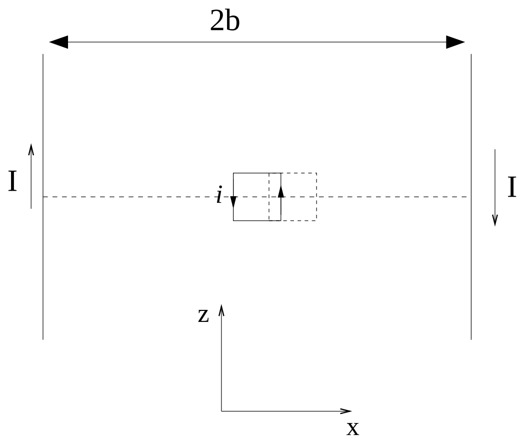
Siano dati due nastri conduttori di lunghezza indefinita, larghezza $2a$ e spessore trascurabile, disposti parallelelamente a distanza $2b$. La loro resistenza elettrica sia trascurabile. Una corrente uniforme e costante di modulo I scorre come disegnato in figura (sinistra).

- si calcoli il campo di induzione magnetica in ogni punto del piano mediano perpendicolare ai nastri di corrente;

Una spira quadrata di lato $2d$, percorsa da una corrente costante i come in figura (destra), di resistenza trascurabile, viene posta tra i due nastri di corrente come disegnato in figura (destra).

- si calcoli la forza che la spira risente in una posizione generica tra i due nastri;
- si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni della spira per oscillazioni lungo l'asse x intorno alla posizione di equilibrio, nel limite $b >> a$ e $b >> d$.





Soluzione

Esercizio 1 - Metodo I

Data la simmetria del problema il campo elettrico e radiale ed indipendente da z (coordinata lungo lasse del cilindro). Il campo elettrico sulla superficie della armatura interna, $r = a$ vale :

$$\vec{E}(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}\hat{r} \tag{2}$$

Consideriamo ora una superficie cilindrica di raggio r e altezza Δz ed utilizziando la condizione di stazionarietá della corrente imponiamo che il flusso della densitá di corrente $\vec{J}$ sia nullo :

$$J(a)2\pi a\Delta z = J(r)2\pi r\Delta z \quad \rightarrow \quad \sigma(a)E(a)2\pi a\Delta z = \sigma(r)E(r)2\pi a\Delta z \tag{3}$$

quindi si ottiene :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a^2}r \tag{4}$$

La corrente è quindi data dal flusso della densitá di corrente attraverso una superficie cilindrica :

$$i = \sigma(a)E(a)2\pi aL = \frac{\sigma_a\lambda L}{\epsilon_0} \tag{5}$$

La differenza di potenziale é data da :

$$V = \int_a^b E(r)dr \quad \rightarrow \quad V = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a^2}(b^2 - a^2) \tag{6}$$

da cui si puo' ricavare λ. La resistenza a questo punto puó essere ricavata come :

$$R = \frac{V}{i} = \frac{b^2 - a^2}{4\pi\sigma_a La^2} \tag{7}$$

Alternativamente si puó ottenere la resistenza come resistenza equivalente di cilindri di raggio dr e lunghezza L connessi in serie :

$$R = \int_a^b \frac{\rho_a r^2}{a^2 2\pi rL}dr = \frac{1}{\sigma_a 2\pi La^2}\int_a^b r dr = \frac{b^2 - a^2}{\sigma_a 4\pi La^2} \tag{8}$$

La densitá di carica libera di volume é :

$$\rho(r) = \vec{\nabla}\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi a^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2 = \frac{\lambda}{\pi a^2} \tag{9}$$

Consideriamo ora il caso in cui il materiale all'interno del condensatore venga sostituito con un materiale di costante dielettrica data da :

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + kcos^2\theta) \quad k \ > \ 0 \tag{10}$$

Le superfici del cilindro ad $r = a$ ed a $r = b$ sono superfici equipotenziali quindi il potenziale su queste superfici non dipende da θ. Poiché il potenziale deve essere una funzione continua per $a < r < b$ il potenziale é indipendente da θ. Quindi solo la componente radiale di $\vec{E}$ é non nulla. Inoltre essa non dipende da θ. Il campo per $r = a$ deve quindi essere della forma :

$$E(a) = \frac{A}{a} \tag{11}$$

dove A é una costante che puó essere determinata applicando il teorema di Gauss :

$$\int_0^2 \pi D(a)Lad\theta = \int_0^2 pi(1 + \epsilon_0 cos^2\theta)\frac{A}{a}Lad\theta = \lambda L2\pi a \tag{12}$$

da cui si ottiene :

$$E(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(1 + k/2)a} \tag{13}$$

a questo punto la soluzione é del tutto indentica a quella ottenuta con il materiale con ϵ costante a parte la sostituzione di ϵ_0 con $\epsilon_0(1 + k/2)$.

Esercizio 1 - Metodo II

Lo stesso esercizio puó essere risolto in modo alternativo utilizzando il procedimento descritto qui di sguito. Indichiamo con $J(r)$ la densitá di corrente, con $E(r)$ il campo e con $\rho(r)$ la densitá di carica di volume. Le equazioni da soddisfare sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \ = \ \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{14}$$

$$\vec{J} \ = \ \sigma(r)\vec{E}$$

Inoltre, l'equazione di continuitá, in condizioni stazionarie ($\rho(t) = costante$) fornisce:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \ = \ 0$$

Poiché il problema ha simmetria cilindrica, nell'espressione della divergenza rimane solo il termine radiale. Le ultime due equazioni scritte danno allora:

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma\vec{E} \ = \ 0$$

cioé:

$$\frac{1}{r}\left(\sigma(r)E(r) + r\frac{\partial(\sigma(r)E(r))}{\partial r}\right) \ = \ 0$$

Sostituendo in questa l'espressione data per $\sigma(r)$ ed effettuando le derivate, si trova:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 E(r) + r\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 E(r)\right] \ = \ 0$$

da cui si ottiene:

$$-E(r) + r\frac{\partial E(r)}{\partial r} = 0$$

La cui soluzione é:

$$E(r) = Kr$$

con k una costante da determinare imponendo che la differenza di potenziale tra le armature sia qualla data (V).

$$\int_a^b E(r)dr = V$$

da cui:

$$K\frac{b^2 - a^2}{2} = V$$

cioé:

$$K = \frac{2V}{b^2 - a^2}$$

La densitá di carica $\rho(r)$ puó ora esser ottenuta dall'equazione 14:

$$E(r) + r\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{r\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Sostituendo in questa l'espressione ricavata per $E(r)$ si trova poi:

$$2Kr = \frac{r}{\epsilon_0}\rho(r)$$

da cui:

$$\rho(r) = 2K\epsilon_0 = 4\epsilon_0\frac{V}{b^2 - a^2}$$

La corrente totale I si ottiene integrando J (data da $\sigma(r)E(r)$) su di una superficie cilindrica di raggio r ed altezza L:

$$I = 2\pi rLJ = \sigma_a\frac{a^2}{b^2 - a^2}4\pi LV$$

da cui si ottiene la resistenza:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{b^2 - a^2}{a^2}\frac{1}{4\pi L\sigma_a}$$

La densitá di carica di volume é quindi costante ed uguale a ρ. Quella di superficie é data dal valore di $\epsilon_0 E(r)$ sulle superfici delle armature.

Esercizio 2

Data la simmetria del problema il campo di induzione magnetica puo' avere solo componente lungo y (vedi figura , sinistra) . Il campo si puo' calcolare come somma sovrapposizione del campo dei due nastri. Per calcolare il campo di un nastro considero i contributi infinitesimi del campo generato da fili percorsi da corrente di (figura**??**) :

$$dB_{nastro} = \frac{\mu_0 cos\theta di}{2\pi r} \tag{15}$$

dove $di = Jdy$ e J é la densitá di corrente che è data da $J = I/2a$. Poiché :

$$y = xtg\theta \quad \rightarrow \quad dy = x\cos^2\theta d\theta \tag{16}$$

$$r = \frac{x}{cos\theta} \tag{17}$$

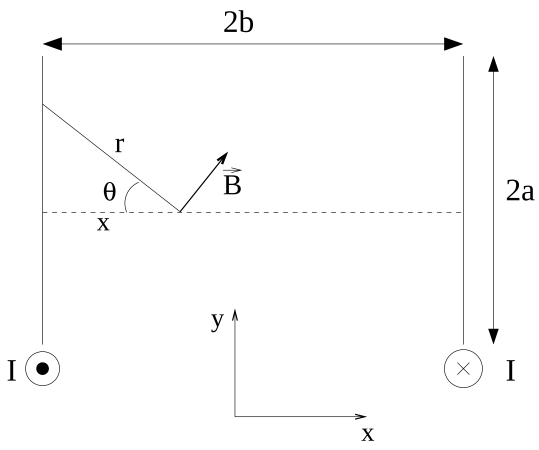


Figure 1:

sostituendo ed integrando si ottiene :

$$B_{nastro} = 2\int_0^a \frac{\mu_0 J}{2\pi x} cos^2\theta dy = 2\int_0^{atan\frac{a}{x}} \frac{\mu_0 J}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 J}{\pi} atan\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} atan\left(\frac{a}{x}\right) \quad (18)$$

Quindi il campo totale generato dai due nastri di corrente é dato da :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(atan\left(\frac{a}{x}\right) + atan\left(\frac{a}{2b-x}\right)\right)\hat{y} \quad (19)$$

Se si considera una spira che puó traslare lungo la direzione x si puó calcolare la forza come :

$$\vec{F} = \vec{m}\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\hat{x} \quad (20)$$

dove $\vec{m} = -4d^2 i\hat{y}$. Il campo B puó essere riscritto in funzione della distanza δ dal centro dei due nastri :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{\pi a}\left(atan\left(\frac{a}{b+\delta}\right) + atan\left(\frac{a}{b-\delta}\right)\right)\hat{y} \quad (21)$$

la forza risentita dalla spira é data da :

$$F_x = -m\frac{\partial B}{\partial \delta} = -\frac{m\mu_0 I}{2\pi a}\left[\frac{1}{(b-\delta)^2 + a^2} - \frac{1}{(b+\delta)^2 + a^2}\right] \quad (22)$$

si vede che per $\delta = 0$ si ha $F_x = 0$. Nell'approssimazione $b >> a$ e $b >> d$ si ha :

$$F_x \simeq -\frac{m\mu_0 I}{2\pi b^2}\left(\frac{1}{1-\frac{2\delta}{b}} - \frac{1}{1+\frac{2\delta}{b}}\right) \simeq -\frac{m\mu_0 I}{2\pi}\frac{4\delta}{b^3} \quad (23)$$

Il periodo delle piccole oscillazioni é quindi :

$$T = \sqrt{\frac{\pi M b^3}{m\mu_0 I 2}} \quad (24)$$