Verifiche sperimentali della legge di Coulomb

1 Introduzione

Si dá comunemente per scontato che la forza elettrica diminuisca all'aumentare della distanza come $1/r^2$. Tuttavia, gli esperimenti effettuati per verificare tale andamento avevano una sensibilitá necessariamente limitata e ci si puó quindi chiedere se non esistano piccole, quasi impercettibili deviazioni della forza da tale andamento, finora non rilevate. É anche stato ipotizzato che deviazioni possano essere trovate in particolare condizioni fisiche, ad esempio a temperature vicine allo zero assoluto. Inoltre dobbiamo tener conto del fatto che gli esperimenti effettuati in laboratorio verificano la legge su distanze dell'ordine delle decine di centimetri o al piú di qualche metro. Nessuno puó quindi garantire che, a distanze dell'ordine delle dimensioni atomiche o nucleari o, all'altro estremo, a distanze atronomiche, l'andamento verificato in laboratorio continui a descrivere correttamente i fenomeni fisici. In questa lezione ci occuperemo di alcune delle numerose verifiche sperimentali che, da Cavendish in poi, sono state effettuate per verificare la legge a distanze accessibili in laboratorio. Vediamo per cominciare quali siano stati, storicamente, gli esperimenti ed i metodi seguiti per ricercare eventuali deviazioni della forza dall'andamento che chiamiamo Coulombiano.

Le misure effettuate da Coulomb mediante la bilancia di torsione [1] sono in realtá state precedute da misure di tipo diverso, potenzialmente piú sensibili, effettuate da Cavendish. Su tale tipo di misure, che sono state ripetute con precisione molto spinta anche in tempi recenti, concentreremo ora la nostra attenzione.

Fin dal 1755 Benjamin Franklin notó che un tappo di sughero, immerso in un contenitore d'argento elettricamente carico, non risentiva di alcuna forza attrattiva da parte delle pareti del recipiente. Sappiamo che in condizioni normali, in presenza di un campo elettrico, il tappo (dielettrico) si polarizza e subisce una forza ad opera del campo; sembrava quindi che all'interno del contenitore carico il campo elettrico fosse nullo. Franklin informó di questo fatto, di cui non riusciva a trovare spiegazione, alcuni suoi colleghi, tra cui Joseph Priestley. Quest'ultimo ripeté l'esperimento e confermó il risultato di Franklin. Qui Priestley ebbe la brillante idea di collegare l'assenza della forza elettrica dentro un contenitore carico, con l'analoga assenza di forza gravitazionale entro un guscio sferico massivo. Si sapeva infatti [5] che l'assenza di forza gravitazionale in tale circostanza era legata alla dipendenza del campo gravitazionale dalla distanza come $1/r^2$. Priestley riportó il risultato nel 1767 [2]. Da tale osservazione di Priestley ebbero origine tutta una serie di esperimenti, tra cui quello effettuato da Cavendish, miranti a verificare la dipendenza come $1/r^2$ della forza elettrica dalla distanza r, attraverso la verifica dell'assenza di campo elettrico all'interno di cavitá praticate entro corpi conduttori.

Due anni dopo il risultato di Priestley, lo scozzese John Robinson [2] effettuó la prima determinazione sperimentale della legge, tramite un bilanciamento della forza elettrica con quella gravitazionale agente su di una sfera. Robinson ottenne un esponente di -2.06. Benché il risultato di Robinson sia precedente a quello di Cavendish, esso fu pubblicato solo nel 1806. Il risultato di Cavendish, ottenuto nel 1773, non fu d'altronde reso noto che un secolo piú tardi, quando Maxwell lo descrisse nel suo libro [4].
L'apparato sperimentale utilizzato da Cavendish consisteva in un insieme di due sfere conduttrici concentriche, collegate elettricamente da un sottile filo conduttore che poteva essere rimosso nel corso della misura. Un'opportuno sistema consentiva di rivelare la presenza di una eventuale carica elettrica sulla sfera interna, quando una carica fosse stata impressa a quella esterna. Cavendish valutó sperimentalmente che tale carica era inferiore ad $\frac{1}{60}$ della carica fornita alla sfera esterna. Da tale risultato Cavendish dedusse che, se una eventuale deviazione dalla legge $\frac{1}{r^2}$ fosse stata parametrizzata mediante un piccolo numero ϵ: $F \propto \frac{1}{r^{2-\epsilon}}$ allora questo parametro doveva essere, in modulo, inferiore a 0.02.
Maxwell nel suo libro descrive in dettaglio l'esperimento e discute poi una versione migliorata di questo, effettuata al Cavendish Laboratory, che fornì un limite superiore sul valore assoluto della costante ϵ di $\frac{1}{21600}$. L'esperimento di Cavendish é stato poi ripetuto da numerosi altri autori, fino al 1985, con tecniche via via migliorate e con sensibilitá sempre piú spinte. Il risultato piú preciso ad oggi é $\epsilon < 10^{-16}$ [6].
Esamineremo nelle prossime sezioni gli esperimenti, a cominciare da quello di Cavendish. Dovremo peró prima discutere gli aspetti matematici collegati alla parametrizzazione adoperata per il campo.

2 Formalismo matematico

Ammettiamo che l'andamento in funzione della distanza r della forza elettrica tra due cariche unitarie possa esser descritto da una generica funzione F(r). Sia U(r) il potenziale elettrostatico:

$$U(r) = \int_r^{\infty} F(s)ds$$

Definendo:

$$f(r) = \int_0^r sU(s)ds$$

si puó allora dimostrare (vedasi appendice) che, se una carica Q é distribuita uniformemente sulla superficie di un sottile guscio sferico di raggio a, il potenziale ad una distanza b dal centro sará dato, per un punto esterno al guscio, da:

$$V = \frac{Q}{2ab}[f(b+a) - f(b-a)]$$

e, per un punto sul guscio:

$$V = \frac{Q}{2a^2}f(2a)$$

mentre per un punto all'interno del guscio:

$$V = \frac{Q}{2ab}[f(a+b) - f(a-b)]$$

Possiamo ora, facendo uso di questo risultato, determinare i potenziali di due gusci sferici concentrici, di raggi a e b, con $a > b$. Indicando con V_a e V_b i rispettivi potenziali e con Q_a e Q_b le cariche, avremo:

$$V_a = \frac{Q_a}{2a^2} f(2a) + \frac{Q_b}{2ab}[f(a+b) - f(a-b)] \tag{1}$$

$$V_b = \frac{Q_b}{2b^2} f(2b) + \frac{Q_a}{2ab}[f(a+b) - f(a-b)] \tag{2}$$

Come vedremo, sia nell'esperimento effettuato da Cavendish che in quello ripetuto un secolo più tardi al Cavendish Laboratory, i due gusci sferici erano inizialmente uniti insieme; cioè, nella prima fase dell'esperimento era $V_a = V_b = V$. Dalle ultime due equazioni si puó allora ricavare la carica Q_b posseduta dalla sfera interna:

$$Q_b = 2Vb \frac{bf(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)]}{f(2a)f(2b) - [f(a+b) - f(a-b)]^2} \tag{3}$$

3 L'esperimento di Cavendish

Cominceremo con l'esaminare l'esperimento effettuato da Cavendish, così come lo descrive Maxwell nel suo libro.

Cavendish fissó una sfera conduttrice ad un supporto isolante, e poi due semisfere conduttrici cave, munite di due manici di vetro, a due gabbie di legno con un cardine in comune, in modo tale che le due semisfere, quando le due gabbie di legno venivano fatte combaciare, venivano a formare un unico guscio sferico isolato, concentrico con la sfera. Tra quest'ultima e le due semisfere poteva poi essere stabilito un contatto elettrico tramite un filo conduttore molto corto, a cui era fissato un filo di seta, in modo tale che il filo conduttore poteva essere rimosso senza modificare alcuna delle cariche sulle sfere.

Mantenendo la sfera in contatto elettrico con le due semisfere, Cavendish trasmise alle due semisfere una carica elettrica facendo uso di una bottiglia di Leida, il cui potenziale era stato in precedenza misurato mediante un elettrometro. Egli rimosse subito dopo il filo che teneva in contatto elettrico le semisfere con la sfera (facendo uso del filo di seta) rimosse le due semisfere e le fece scaricare (collegandole a massa). Infine verificó la carica elettrica della sfera, utilizzando un secondo elettrometro. Questo non indicó alcuna carica elettrica.

Notiamo per inciso che, essendo in tale esperimento il guscio esterno stato rimosso e portato a grande distanza dalla sfera, il potenziale della sfera interna (che era quella di raggio minore, b) dopo l'allontanamento del guscio era, in virtú delle equazioni (1, 2), dato da $V_b = Q_b/2b^2 f(2b)$ dove Q_b é la carica acquistata dalla sfera interna, data dalla 3.

Cavendish successivamente comunicó alla sfera una frazione nota della carica inizialmente trasmessa alle semisfere e misuró nuovamente la carica posseduta dalla sfera, mediante l'elettrometro.

Trovó cosí che la carica acquistata dalla sfera nella prima parte dell'esperimento era inferiore ad 1/60 della carica dell'intero apparato poiché, se fosse stata superiore, sarebbe stata rivelata dall'elettrometro.

Seguendo Cavendish, ammettiamo ora che l'esponente nella legge di Coulomb non sia -2 ma $(-2+\epsilon)$, con $\epsilon \ll 1$. In tal caso, al primo ordine in ϵ il potenziale sará dato da:

$$U(r) \;=\; \frac{r^{-1+\epsilon}}{1-\epsilon} \;\approx\; r^{-1+\epsilon}(1+\epsilon)$$

ed:

$$f(r) \;=\; \int_0^r sU(s)ds \;=\; \int_0^r ss^{-1+\epsilon}(1+\epsilon)ds \;=\; r^{1+\epsilon} \;\approx\; r(1+\epsilon\ln r)$$

dove l'ultimo passaggio é ottenuto sviluppando in serie di Taylor il termine $r^{1+\epsilon}$. Segue allora che il potenziale della sfera nella seconda parte dell'esperimento (cioé dopo l'allontanamento delle semisfere) é dato da:

$$V_b \;=\; \frac{1}{2}\frac{a}{a-b}V\epsilon[\ln\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a-b}] \tag{4}$$

dove si é fatto uso dell'equazione 2 con $Q_a = 0$ e della 3. Dalla 4 é poi possibile determinare ϵ a partire dai risultati dell'esperimento. Come si é giá detto, ció porta a $\epsilon < 1/21600$.

4 L'esperimento effettuato al Cavendish Laboratory

Come si é accennato l'esperimento fu ripetuto all'incirca un secolo piú tardi al Cavendish Laboratory, introducendo un certo numero di ingegnosi accorgimenti che migliorarono considerevolmente la precisione della misura. Fra questi notiamo:

- le semisfere erano tenute in posizione fissa attorno alla sfera. Anziché esser rimosse per misurare la carica (o il potenziale) della sfera, esse venivano scaricate collegandole a massa

- la carica eventualmente acquistata dalla sfera interna veniva misurata introducendo uno dei due terminali dell'elettrometro in un piccolo foro esistente in una delle semisfere; attraverso il medesimo foro passava il corto filo conduttore che teneva, nella fase inziale, in contatto elettrico le semisfere e la sfera

- l'elettrometro adoperato (elettrometro a quadranti di Thomson) aveva una sensibilitá maggiore di quello adoperato da Cavendish; inoltre l'involucro dell'elettrometro ed uno degli elettrodi erano tenuti collegati a massa durante l'intera misura, mentre l'altro elettrodo era anch'esso tenuto collegato a massa fino al momento in cui il guscio esterno veniva scaricato

- la calibrazione del sistema non era più effettuata dando una carica nota alla sfera, ma utilizzando un sferetta (di bronzo) posta ad una certa distanza d dal sistema. Questa era inizialmente caricata per induzione dalla carica posta sulle semisfere e poi, nella fase finale dell'esperienza, si operava in modo che, sempre per induzione, essa modificasse il potenziale della sfera interna, come vedremo meglio in seguito

Le operazioni eseguite erano:

1. il guscio esterno veniva caricato (indicheremo con Q la sua carica e con a il suo raggio) mettendolo in contatto elettrico con una bottiglia di Leida. Il suo potenziale veniva quindi ad essere: $V_g = Q/(4\pi\epsilon_0 a)$

2. la sferetta di bronzo veniva collegata a massa. Se indichiamo con V_p il suo potenziale prima del collegamento ($V_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}$) dove d é la distanza della sferetta dal centro della sfera S e dove si ammette un forza Coulombiana, dopo il collegamento a massa avremo:

$$0 = V_p' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p}$$

   dove con q abbiamo indicato la carica acquistata dalla sferetta dopo il collegamento a massa e con r_p il suo raggio. Da tale relazione possiamo ricavare q: $q = -Q\frac{r_p}{d}$.

   Se il campo differisse da quello Coulombiano e parametrizzassimo tale deviazione come $E \propto r^{-2+\epsilon}$ avremmo: $V \propto r_p^{(-1+\epsilon)}/(1-\epsilon)$ e per q troveremmo un valore poco diverso: $\overline{q} = -Q\frac{r_p}{d}^{1-\epsilon}$.

   Nell'esperimento effettuato q risultò essere circa -1/54 di Q

3. il filo di comunicazione tra la sfera ed il guscio veniva rimosso utilizzando il filo di seta. Indicheremo con Q_g la carica posseduta dal guscio e con Q_s quella della sfera (con $Q = Q_g + Q_s$)

4. il guscio veniva collegato a massa. Ora il potenziale del guscio verrá ad essere nullo, cioé:

$$0 \;=\; V_g' \;=\; \frac{Q_s + Q_g'}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

   dove abbiamo indicato con Q_g' la nuova carica posseduta dal guscio dopo il collegamento a massa. Si valutó che questa fosse circa -1/9 della carica q posseduta dalla pallina di bronzo. Quindi: $Q_g' \approx \frac{1}{9\times 54}Q = \frac{1}{486}Q$ Notiamo che, non essendovi piú il collegamento elettrico tra sfera e guscio, Q_s non puó esser cambiato

5. a questo punto, l'elettrodo di prova veniva disconnesso dalla massa e, facendolo passare attraverso il forellino prima occupato dal filo, messo in contatto con la sfera. L'elettrometro non indicava alcuna deflessione. Ció indica che la carica elettrica Q_s posseduta dalla sfera é nulla, entro la precisione della misura. A questo punto é opportuno chiedersi quale sarebbe stata la deflessione indicata dall'elettrometro in presenza di una deviazione dalla legge $1/r^2$. A tale scopo é opportuno tornare alle equazioni 1 ed 2. Poiché ora la sfera esterna é collegata a massa, $V_a = 0$ e le equazioni, facendo uso del valore di Q_b calcolato (la carica della sfera interna non puó esser cambiata), ci danno:

$$V_b = V\left[1 - \frac{a}{b}\frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)}\right] \tag{5}$$

Usando per f(r) la medesima parametrizzazione adoperata nella sezione precedente, troveremo ora:

$$V_b = \frac{1}{2}V\epsilon[\ln\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a-b}] \tag{6}$$

Facendo uso di tale espressione é possibile determinare ϵ a partire dai risultati della misura.
In base alla relazione 6 e facendo uso dei dati sperimentali, la deflessione misurata avrebbe dovuto essere proporzionale a:

$$V_b = -0.1478\epsilon V$$

dove V era la tensione applicata inizialmente al guscio.

6. Occorre ora valutare la sensibilitá dell'apparato, cioé chiedersi: quale potrebbe essere il massimo valore della carica posseduta dalla sfera, non rivelabile con la precisione dell'elettrometro adoperato ? Nell'esperimento di Cavendish ció veniva fatto, una volta allontanate le semisfere, comunicando alla sfera una carica nota. Tale procedimento introduce peró delle incertezze, poiché la carica comunicata alla sfera non é misurabile con grande precisione, ma anche perché il processo di allontanamento delle semisfere dalla sfera puó introdurre delle modifiche nello stato elettrico della sfera. Nel nuovo esperimento, per liberarsi di tali incertezze, si fece ricorso ad un nuovo metodo. Si disconnesse il guscio dal collegamento di massa e si collegó nuovamente la sferetta di bronzo a massa. Notiamo che con tale operazione il potenziale della sferetta (che é carica negativamente) subisce un incremento (va al potenziale di massa) e ció causa un aumento del potenziale del sistema semisfere-sfera. Tale potenziale puó ora essere misurato attraverso l'elettrometro collegato alla sfera interna. Si trovó in effetti una deflessione positiva dell'elettrometro, D. Tale deflessione é una misura del potenziale della sfera dopo l'ultima operazione che, come si puó far vedere, é dato da: $V_s' = Q_s'/(4\pi\epsilon_0 a)$ che é circa 1/486 di V. In altri termini, per la deflessione osservata nella prima parte dell'esperimento si trova:

$$0.1478\epsilon V < D_{min}$$

dove D_{min} é la minima deflessione osservabile;
e per quella osservata nella misura di calibrazione:

$$1/486V = D$$

dividendo membro a membro si trova:

$$\frac{0.1478\epsilon V}{1/486V} < \frac{D_{min}}{D}$$

cioé:

$$\epsilon < \frac{1}{72}\frac{D_{min}}{D}$$

Nell'esperimento, D era sempre maggiore di 300 volte D_{min}, per cui:

$$\epsilon < \frac{1}{72 \times 300} = \frac{1}{21600}$$

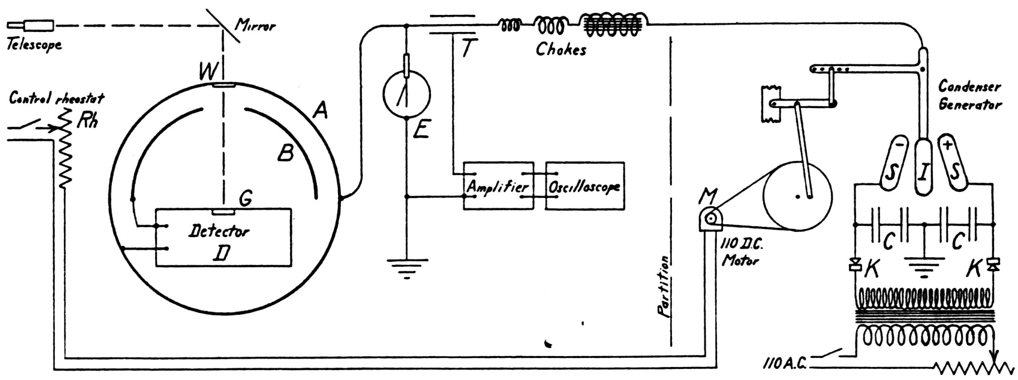

FIG. 1. Apparatus for testing the inverse square law of force between charges.

Figura 1:

Notiamo che il risultato finale non dipende dalla conoscenza di V, cioé della carica impressa inizialmente al guscio sferico.

5 L'esperimento di Plimpton e Lawton

L'esperimento di Cavendish, ripetuto poi da Maxwell, era limitato in sensibilitá da due effetti. Il primo di questi era legato al fatto che una eventuale carica acquistata dalla sfera interna avrebbe avuto una durata necessariamente piccola, a causa della ionizzazione spontanea. Il secondo, piú serio del primo, era costituito dal potenziale di contatto tra elettrodi e sfera, che limitava la minima tensione rivelabile a circa 0.001 Volt.

Per tali motivi, un nuovo esperimento fu effettuato nel 1936 da S.J. Plimpton e W.E. Lawton[7]. In tale esperimento la misura del potenziale della sfera interna era effettuata in modo continuo, via via che si modificava il potenziale della sfera esterna. Il voltmetro era quindi tenuto costantemente in contatto con la sfera interna. A tale scopo, esso era posto all'*interno* della sfera esterna. La lettura del voltmetro veniva effettuata otticamente dall'esterno. Lo schema dell'apparato utilizzato é mostrato in figura 1. Il telescopio mostrato in figura viene adoperato per leggere, facendo uso di uno specchio, attraverso un foro praticato nella sfera esterna A, l'indicazione del voltmetro collegato alla sfera interna B. Quest'ultima é in realtá una semisfera, chiusa ad un'estremitá dall'involucro del voltmetro. Gli autori hanno dimostrato che questa modifica della geometria non altera le formule utilizzate per analizzare l'esperimento di Cavendish. Dando cioé alla sfera esterna un potenziale V, la differenza di potenziale tra questa e quella interna sará data dall'espressione 6 con il segno cambiato. Indicando con n il rapporto a/b dei raggi, tale differenza di potenziale puó essere scritta nella forma:

$$\epsilon V\ F(a,b)\ =\ \epsilon V\ \left[\frac{n}{2}\ln\frac{n+1}{n-1}\ -\ \frac{1}{2}\ln\frac{4n^2}{n^2-1}\right] \tag{7}$$

La presenza del foro nella sfera esterna avrebbe alterato il risultato. Per questo il foro era chiuso da un sottile cerchietto di vetro e, nella cavitá restante nel metallo al di sopra del vetro, veniva posta una soluzione di sale in acqua, tale quindi da

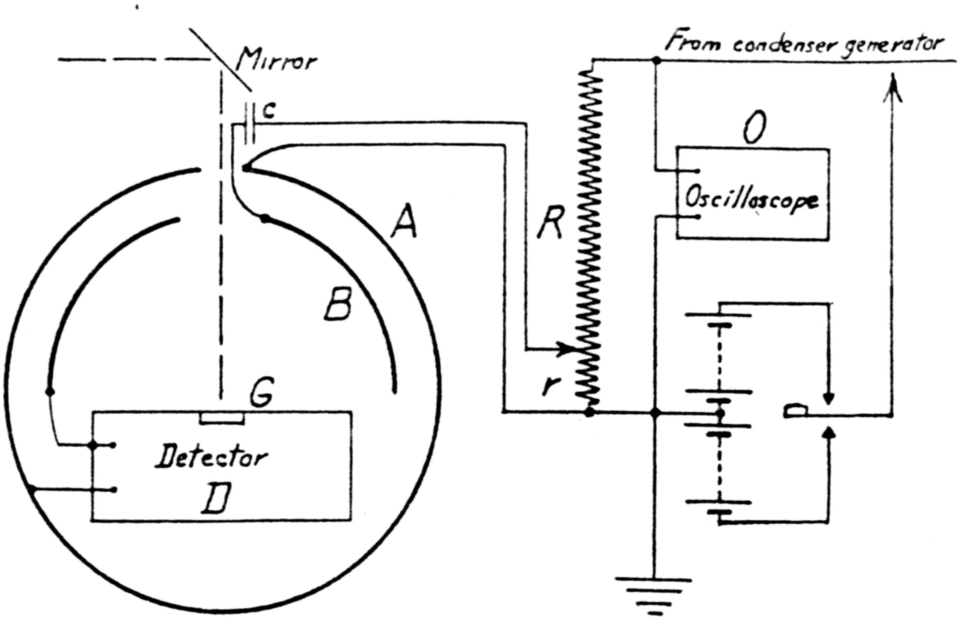

FIG. 3. Method of calibration.

Figura 2:

garantire la continuitá della superficie conduttrice.

La tensione applicata alla sfera esterna veniva fatta variare in modo sinusoidale, con una frequenza di circa 2 Hz, che era anche la frequenza propria del voltmetro adoperato. In tal modo, un eventuale segnale avrebbe dato luogo ad una risonanza nella risposta del voltmetro, in corrispondenza alla frequenza propria di questo. Il rumore termico, che ha invece uno spettro piatto in frequenza, non avrebbe potuto dar luogo ad un segnale apprezzabile. Tale sistema consentiva quindi di ridurre fortemente l'effetto del rumore termico nella risposta del voltmetro.

La calibrazione del sistema, cioé la risposta ad un segnale di tensione noto, applicato tra la sfera esterna e quella interna, veniva effettuata facendo uso dello schema indicato in figura 2. La sfera esterna veniva messa a massa ed una frazione nota $r/(r+R)$ della tensione sinusoidale veniva applicata alla sfera interna. Nella misura l'ampiezza del segnale di tensione applicato era tipicamente di 3000 V. La lettura del voltmetro dava consistentemente risultati di circa $1\mu V$. Nell'esperimento i raggi a e b erano rispettivamente di 2.5 piedi e 2.0 piedi (76.2 cm e 60.96 cm), per cui n=1.25 e F(a,b)=0.169. La disuguaglianza:

$$\epsilon \, V \, F(a,b) \; < \; v$$

con V=3000 Volt e $v = 10^{-6}$ Volt, ci da:

$$\epsilon \; < \; \frac{10^{-6}}{3000 \cdot 0.169} \approx 2 \; 10^{-9}$$

Come vediamo, questo risultato rappresentó un miglioramento di circa 5 ordini di grandezza rispetto a quello di Maxwell; ma sopratutto esso sviluppó una nuova tecnica sperimentale nella verifica della legge di Coulomb, suscettibile di ulteriori miglioramenti, che in effetti si ebbero agli inizi degli anni '70. Di tali ulteriori sviluppi ci occuperemo nelle prossime sezioni.

6 L'esperimento di Bartlett, Goldhagen e Phillips

Nell'esperimento di Plimpton e Lawton un potenziale variabile in modo sinusoidale era applicato alla sfera esterna ed il segnale cercato era una differenza di potenziale tra la sfera esterna e quella interna. Tale procedimento era l'equivalente di quello adoperato da Cavendish, di allontanare le due sfere una volta caricata quella esterna.

Indicando anche ora con a e b i raggi delle due sfere (con $a > b$), un valore di ϵ diverso da zero implicherebbe un valore non nullo di:

$$\frac{V(b) - V(a)}{V(a)} \; = \; \epsilon \, M(a, b)$$

con:

$$M(a, b) \; = \; \frac{1}{2} \left[\frac{a}{b} \, \ln \frac{a + b}{a - b} \; - \; \ln \frac{4a^2}{a^2 - r^2} \right]$$

Notiamo che M(a,b) é un numero dell'ordine dell'unitá, quindi ϵ é essenzialmente il rapporto tra la differenza di potenziale misurata e la tensione applicata V(a).

Nell'esperimento di Bartlett et al. [8], pubblicato nel 1970, la struttura adoperata consisteva di cinque sfere concentriche. Alle due piú esterne veniva applicata una differenza di potenziale alternata mentre il segnale cercato era una differenza di potenziale, in fase con la prima, tra le due sfere piú interne. La sfera intermedia serviva da schermo tra i due gruppi. La tabella fornisce le caratteristiche geometriche delle sfere.

Numero sfera	*Materiale*	*diametro medio (m)*	*spessore (cm)*
4	alluminio	2.96	0.06
3	acciaio	1.10	5
S	rame	1.00	0.19
2	alluminio	0.91	0.17
1	alluminio	0.76	0.14

Lo scopo di questa geometria era quello di ridurre il rumore elettronico presente all'ingresso dell'amplificatore adoperato per la rivelazione del segnale. Infatti le due sfere interne costituiscono un condensatore che, nella configurazione adoperata risulta in parallelo tra i terminali d'ingresso dell'amplificatore. Tale condensatore costituisce un corto circuito per il segnale di rumore che, avendo uno spettro di frequenze piatto, ha componenti a tutte le frequenze. Piú precisamente, l'impedenza offerta dal condensatore va come l'inverso della frequenza ed é quindi molto bassa alle alte frequenze. Il segnale cercato ha invece la frequenza della tensione sinusoidale applicata.

Si puó dimostrare che, con la geometria adoperata, si ha la seguente relazione tra le differenze di potenziale:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_4} = \epsilon \left[\frac{r_4}{r_4 - r_3} \left(M(r_3, r_2) - M(r_3, r_1) \right) \; - \; \frac{r_3}{r_4 - r_3} \left(M(r_4, r_2) - M(r_4, r_1) \right) \right] \tag{8}$$

dove r_1, r_2, r_3, r_4 sono i raggi delle quattro sfere indicate nella tabella e V_1, V_2, V_3, V_4 i rispettivi potenziali. La funzione M(a,b) é la stessa data piú su. Con i dati numerici scelti nell'esperimento, il coefficiente di ϵ a secondo membro di questa equazione vale -0.077.

Come accennato, la misura della differenza di potenziale $V_2 - V_1$ veniva effettuata $infase$ con quella applicata $V_3 - V_4$ (utilizzando un amplificatore ad aggancio di fase o lock-in amplifier). Per effettuare la misura in fase occorre che un segnale in fase con quello della tensione applicata sia trasmesso all'amplificatore, che nell'esperimento era posto dentro la sfera piú interna. Per evitare complicazioni connesse con il passaggio di cavi e segnali elettrici, si fece ricorso ad un segnale luminoso modulato. Questo era generato da una lampada al neon, modulata dallo stesso segnale adoperato per modulare l'alta tensione applicata alle sfere (3-4). Il pennello luminoso passava attraverso forellini praticati nelle sfere ed andava a colpire un fotodiodo posto in prossimitá dell'amplificatore ad aggancio di fase. Il segnale all'uscita del fotodiodo veniva poi inviato all'ingresso dell'amplificatore.

La calibrazione del sistema era effettuata facendo si che una frazione nota (10^{-12}) del segnale di alta tensione applicato alle sfere (3-4) fosse trasmesso alle sfere (1-2). Dati furono presi a due frequenze: 250 Hz (con un'ampiezza rms di tensione di 70 kV) e 2500 Hz (con un'ampiezza rms di tensione di 40 kV). Dai dati si trovó:

$$|\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_4}| \leq \frac{0.4\, nV}{40\, kV} \; = \; 10^{-14}$$

da cui, facendo uso della 8 si ottenne poi:

$$|\epsilon| \leq 1.3\, 10^{-13}$$

un risultato quattro ordini di grandezza migliore di quello di Plimpton e Lawton.

7 L'esperimento di Williams, Faller e Hill

Il tentativo di rivelare una possibile deviazione della legge di Coulomb dall'andamento $1/r^2$ fu proseguito da E.R. Williams, J.E. Faller e H.A. Hill[8], che nel 1971 pubblicarono un risultato tre ordini di grandezza migliore di quello ottenuto da Bartlett et al. l'anno precedente. L'apparato utilizzato, mostrato in figura 3 era molto simile a quello adoperato da Bartlett e, come questo, consisteva di cinque gusci conduttori concentrici, approssimativamente sferici (erano degli icosaedri). Il segnale, ad una frequenza di 4 Mhz, era applicato al circuito oscillante LC, dove L é un'induttanza e C la capacitá costituita dai due gusci piú esterni (4-5). Il segnale é prelevato ai capi dell'induttanza posta tra i gusci piú interni (1-2), facendo uso anche qui di un amplificatore ad aggancio di fase. Il segnale di fase, prelevato ai capi dei due gusci piú esterni, é trasmesso all'interno del guscio 1, dove é posto l'amplificatore, sotto forma di segnale luminoso trasmesso da una fibra ottica accoppiata ad un fotomoltiplicatore. Il segnale di fase é inoltre ritardato in modo continuo, ad un rate di 720 gradi/ora ($\phi' = \omega' t$ prima di essere inviato all'amplificatore. In tal modo si si ha un'ulteriore riduzione del rumore, poiché il segnale cercato deve presentarsi in corrispondenza al valore corretto del ritardo di fase. Il rumore sará invece presente in corrispondenza a tutti i valori del ritardo di fase.

L'uscita dell'amplificatore ad aggancio di fase é filtrato, inviato ad un convertitore tensione-frequenza e trasmesso all'esterno del sistema attraverso una seconda

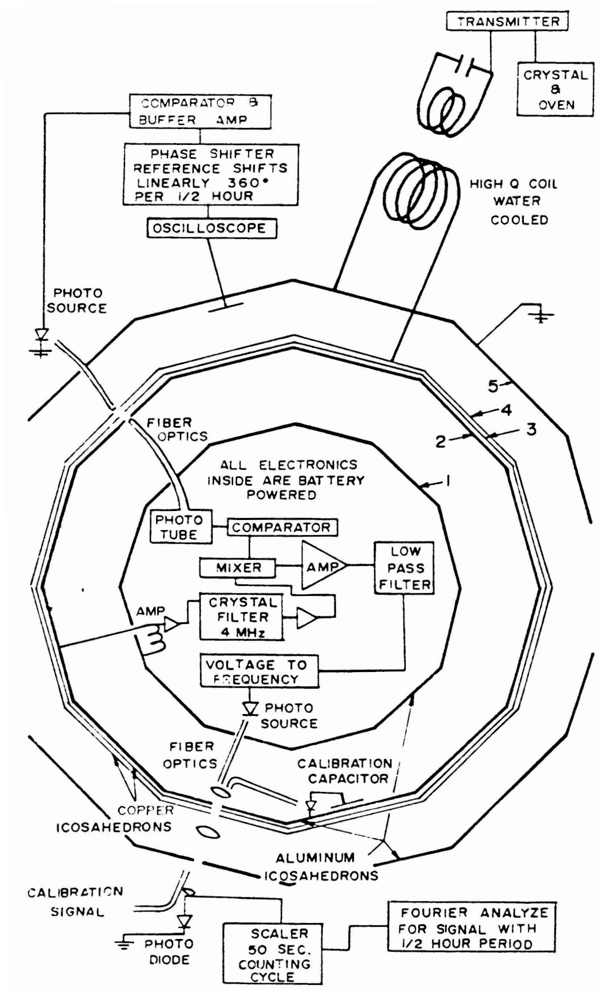

FIG. 1. Schematic drawing of the apparatus. A 4-MHz voltage is applied between shells 4 and 5. A signal of less than 10^{-12} V could have been detected between shells 1 and 2.

Figura 3:

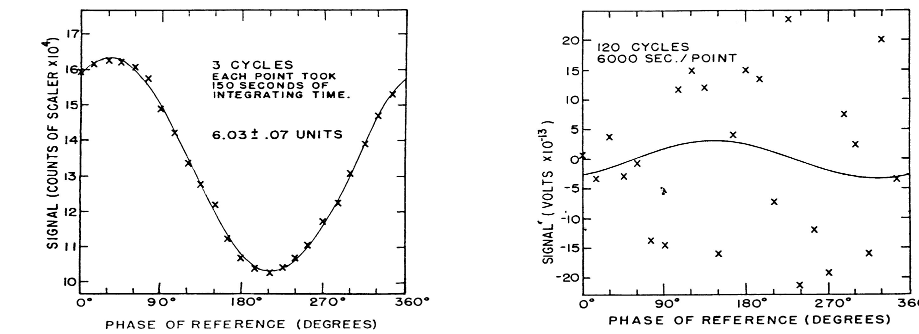

FIG. 2. Signal output of the system versus phase of the reference signal when a calibrating voltage of 3.8 $\times 10^{-10}$ V is introduced between the two icosahedrons.

FIG. 3. Data from which our experimental result is derived. The solid curve is a least squares fit of the data by a sinusoid of angular frequency ω', the phase-shifting frequency. The amplitude of this fitted curve is $(6.4 \pm 7.3) \times 10^{-13}$ V peak to peak.

Figura 4:

fibra ottica. Il segnale (di frequenza) all'uscita della fibra é poi convertito nuovamente in un segnale digitale facendo uso di un contatore. La calibrazione del sistema era effettuata anche in questo caso inviando un segnale di ampiezza nota all'interno del sistema, fino all'amplificatore. A tale scopo si faceva uso di una seconda fibra ottica.

Il grafico a sinistra in figura 4 mostra l'andamento del segnale all'uscita dell'amplificatore ad aggancio di fase in funzione della fase $\omega' t$, quando un segnale di calibrazione di circa $4\,10^{-10}$ Volt é applicato tra i gusci interni (1-2). Si vede chiaramente l'incremento del segnale in corrispondenza di valori della fase che differiscono tra loro di 2π.

Il grafico a destra in figura 4 mostra il risultato finale dell'esperimento. Ciascuno dei punti sperimentali é la media di 120 misure indipendenti. Come si nota, non c'é alcuna evidenza di un andamento sinusoidale analogo a quello mostrato nella parte sinistra della figura. La curva sovrapposta ai dati sperimentali rappresenta un fit ai dati mediante una sinusoide avente frequenza angolare ω'. Il risultato dell'esperimento, espresso come deviazione dalla legge di Coulomb tramite la parametrizzazione usata in precedenza, é:

$$\epsilon \;=\; (2.7 \pm 3.1)\,10^{-16}$$

8 Legge di Coulomb e massa del fotone

Si é visto come una possibile deviazione dalla forma $1/r^2$ della legge di Coulomb sia stata, fin dai tempi di Maxwell, parametrizzata introducendo il parametro ϵ. Un parametro fisicamente piú significativo, legato alla medesima deviazione dalla legge di Coulomb é quello che é noto come massa del fotone. Vediamo quale sia il ruolo di tale parametro in elettrostatica.

Consideriamo un'onda elettromagnetica ed esaminiamo l'andamento spazio-temporale del campo elettrico associato:

$$\vec{E} \;=\; \vec{E_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

dove $\vec{k}$ é il vettore d'onda, il cui modulo vale:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Inoltre é:

$$\omega = 2\pi\nu \ ; \ \lambda = c/\nu$$

per cui:

$$k = \frac{2\pi\nu}{c}$$

e quindi:

$$(\frac{\omega}{c})^2 - k^2 = 0$$

Il fatto che tale grandezza sia nulla é legato al fatto che i segnali elettromagnetici (i fotoni) si propagano alla velocitá della luce c. In effetti, seguendo De Broglie, possiamo associare al fotone di frequenza angolare ω e lunghezza d'onda λ, un'energia ed una quantitá di moto dati da:

$$\mathcal{E} = h\nu$$

$$P = h/\lambda$$

dove h é la costante di Planck. La massa relativistica di una particella é data da:

$$m^2 = (\frac{\mathcal{E}}{c})^2 - P^2$$

e, nel nostro caso, avremo:

$$m^2 = h^2 \left[\frac{\nu^2}{c^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right] = \frac{h^2}{4\pi^2} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right] = 0$$

Se ammettiamo ora che m^2 sia piccolo ma non nullo, la relazione tra k ed ω diventa:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}$$

con:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

ponendo poi:

$$\frac{m^2}{\hbar^2} = \mu^2$$

questa diventa:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \mu^2$$

$$\omega = c\sqrt{k^2 + \mu^2}$$

La velocitá della particella sará ora:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\,\frac{k}{\sqrt{k^2+\mu^2}} = \frac{c\sqrt{\omega^2-\mu^2c^2}}{\omega}$$

Nel caso statico ($\omega = 0$), avremo:

$$k^2 = -\mu^2$$

cioé:

$$|k| = i\mu$$

e l'quazione d'onda diventa:

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \to e^{-|\mu|r}$$

il che implica un decadimento esponenziale del campo statico, con un range pari a $1/\mu$. Si puó da far vedere [10] che nel caso di una carica puntiforme il potenziale andrá come:

$$\frac{1}{r}\,e^{-\mu r}$$

Possiamo ancora verificare, passando a coordinate polari, che l'equazione di Laplace diventa ora:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r})) = \frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial r}\left[-(1+\mu r)e^{-\mu r}\right] = \frac{1}{r^2}\left[\mu^2 r e^{-\mu r}\right] = \frac{\mu^2}{r}\,e^{-\mu r} = \mu^2 V$$

cioé

$$\nabla^2 V - \mu^2 V = 0$$

A partire da tale risultato si puó far vedere [10] che, indicando con $V_a\, e\, V_b$ i potenziali di due gusci sferici concentrici di raggi a e b, la differenza $\Delta V = |V_a - V_b|$ é data da:

$$\frac{|V_a - V_b|}{V_a} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{6}\mu^2\,(a^2 - b^2)$$

dove, nell'esperimento di Plimpton e Lawton il membro di sinistra vale:

$$\frac{\Delta V}{V} < 3\,10^{-10}$$

essendo poi a=2.5' e b=2.0', si ottiene:

$$\mu^2 < 9.56\,10^{-13}\ cm^{-2}$$

ovvero:

$$\mu < 10^{-6}\ cm^{-1}$$

In fisica, energie e masse si misurano in elettron-volt (eV), dove:

$$1eV = 50.7\,10^3\,cm^{-1}$$

$$1\,cm^{-1} = 1.973\,10^{-5}\,eV$$

Si ha quindi:

$$\mu < 1.93\,10^{-11}\,eV$$

Per confronto, si pensi che la massa dell'elettrone é circa 511 eV. Un ulteriore esperimento [11], effettuato nel 1985, ha verificato la validitá della legge di Coulomb a basse temperature (1.36 K). Senza entrare nei dettagli di tale esperimento, che fú analizzato in termini del parametro μ, ci limiteremo a menzionare il limite da esso ottenuto:

$$\mu < (9.0 \pm 8.1)\,10^{-10}\,eV$$

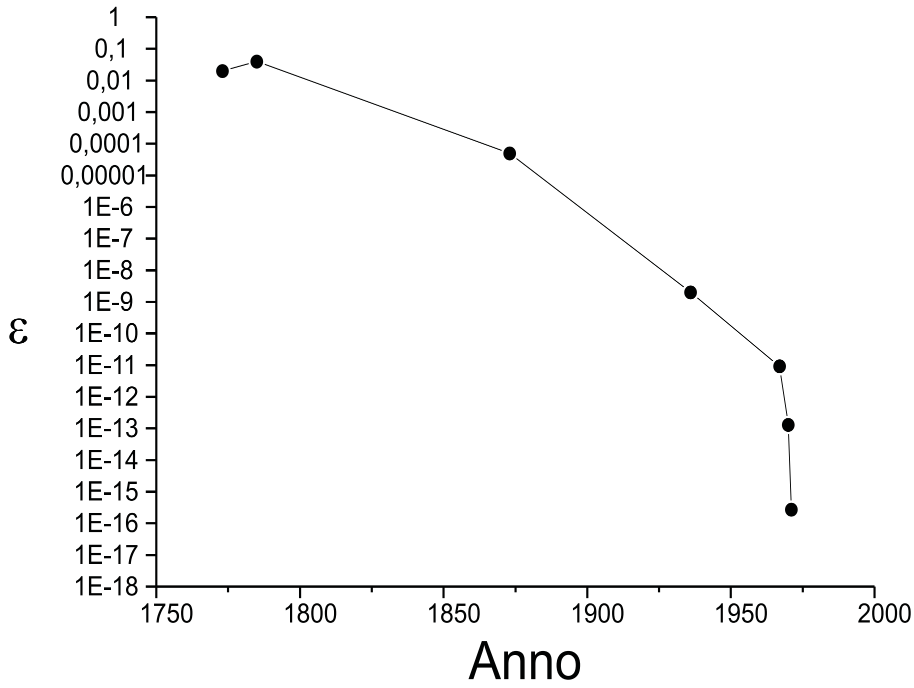

Figura 5:

9 Sommario e conclusioni

Le verifiche sperimentali della legge di Coulomb che abbiamo descritto, sono proseguite negli anni successivi ed hanno migliorato ulteriormente i limiti sul parametro ϵ. Notiamo per inciso come il miglioramento in sensibilitá degli esperimenti abbia seguito lo sviluppo di nuovi metodi e tecniche di laboratorio: amplificatori ad aggancio di fase, fibre ottiche, elettronica a basso rumore etc. Come accennato nella sezione precedente, le misure piú recenti hanno peró concentrato l'attenzione su quella che é considerata una manifestazione indiretta della deviazione: la presenza di una massa diversa da zero del fotone che, in elettrodinamica quantistica, rappresenta il *mediatore* della forza elettromagnetica. In altre parole, secondo l'elettrodinamica quantistica, una deviazione della legge di Coulomb dall'andamento $1/r^2$ sarebbe evidenza di una massa diversa da zero del fotone. Per tale motivo tutti gli esperimenti piú moderni sono stati analizzati in termini della massa μ del fotone.

La figura 5 mostra l'andamento, in funzione del tempo (misurato in anni) del limite sul parametro ϵ. Notiamo come il limite sia migliorato di molti ordini di grandezza nel secolo ventesimo.

10 Appendice

Sia F(r) la forza elettrica tra due cariche unitarie. Possiamo allora definire il potenziale U(r):

$$U(r) = \int_r^\infty F(s)ds$$

Definendo poi la funzione:

$$f(r) = \int_0^r sU(s)ds$$

avremo:

$$\frac{df}{dr} = f'(r) = rU(r)$$

Sia ora Q una carica distribuita in modo uniforme sulla superficie di un sottile guscio sferico di raggio a. Indichiamo con σ la densitá superficiale di carica:

$$Q = 4\pi a^2 \sigma$$

,con b la distanza di un generico punto P dal centro O del guscio sferico e con R la distanza di P dal generico punto del guscio. Adottiamo un sistema di coordinate polari con origine nel punto O e con asse z la direzione del segmento $\overline{OP}$; avremo:

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta \tag{9}$$

La carica posseduta da un elemento di superficie del guscio sferico sará:

$$dq = \sigma a^2 sin\theta d\theta d\phi$$

ed il potenziale che essa genera nel punto P:

$$\sigma a^2 sin\theta d\theta d\phi U(R) = \sigma a^2 sin\theta d\theta d\phi \frac{f'(R)}{R}$$

Integrando questa rispetto a ϕ tra 0 e 2π, si ha:

$$2\pi\sigma a^2 sin\theta \frac{f'(R)}{R} d\theta \tag{10}$$

che deve ancora essere integrata rispetto a θ. Per far ció conviene differenziare la 9:

$$RdR = absin\theta d\theta$$

da cui:

$$\frac{sin\theta d\theta}{R} = \frac{dR}{ab}$$

sostituendo questa nella 10:

$$2\pi\sigma a^2 \frac{dR}{ab} f'(R) = 2\pi\sigma \frac{a}{b} f'(R) dR$$

il cui integrale rispetto a θ é:

$$V = 2\pi\sigma \frac{a}{b}[f(R_1) - f(R_2)]$$

dove R_1 é il massimo valore che R puó assumere (cioé a+b) ed R_2 é il minimo valore, che é (b-a) se il punto P é esterno al guscio ed é (a-b) se il punto P é interno al guscio.

In termini della carica totale Q del guscio, per un punto esterno al guscio questa espressione fornisce:

$$V = \frac{Q}{2ab}[f(b+a) - f(b-a)]$$

e, per un punto sul guscio:

$$V = \frac{Q}{2a^2} f(2a)$$

Mentre per un punto all'interno del guscio:

$$V = \frac{Q}{2ab}[f(a+b) - f(a-b)]$$

Riferimenti bibliografici

[1] A. Coulomb Memoires de l'Academie Royale des Sciences , Volume del 1785, pag. 569

[2] J. Priestley The History and Present State of Electricity with Original Experiments (Londra, 1767) Vol. 2, Parte VIII, Sezione XVI, Sub. XV. La terza edizione é stata ristampata da Johnson Reprint Corp., New York (1966). Vedere Vol. II, p. 374

[3] J. Robinson, 1803; articolo su Electricity nella Encyclopaedia Britannica (Thompson Boner, Parliament Square, Edinburgh), 3^a edizione, Vol. 19, Supp. Vol I, page 558. Vedere anche pagine 578-580.

[4] J.C. Maxwell A treatise on Electricity and Magnetism; (Oxford University Press) Vol. I, 3^a edizione del 1891. Ristampato da Clarendon Press - Oxford; pag. 80.

[5] Laplace fù il primo a dimostrare che nessuna funzione della distanza eccetto quella dell'inverso del quadrato, soddisfa la condizione che un guscio sferico di massa non eserciti alcuna forza al proprio interno. Laplace Mec. Cel. I. 2.

[6] Andrebbe per completezza aggiunto che, in elettrodinamica quantistica, la deviazione dal valore -2 dell'esponente nella legge di Coulomb é legata ad una eventuale massa del fotone. Gli esperimenti che hanno posto dei limiti superiori sulla massa del fotone verificano implicitamente eventuali deviazioni dalla legge di forza di Coulomb; questi hanno sensibilitá considerevolmente maggiori di quelli che cercano di verificare direttamente la validitá della legge di Coulomb. Di ció discuteremo piú avanti.

[7] S.J. Plimpton e W.E. Lawton; Physical Review 50, 1066, 1936

[8] D.F. Bartlett, P.E. Goldhagen e E.A. Phillips; Physical Review D2, 483, 1970

[9] E.R. Williams, J.E. Faller e H.A. Hill; Physical Review Letters, 26, 721, 1971

[10] A. S. Goldhaber e M.M. Nieto; Reviews of Modern Physics, 43, 277, 1971

[11] John J. Ryan, Frank Accetta , Robert H. Austin; Physical Review D, 32, 802, 1985

Indice