Effetto magneto-meccanico ed esperimenti di Einstein-de Haas e di Barnett

1 Introduzione

Lo origini fisiche degli effetti che discuteremo nel seguito sono note fin dai tempi di Maxwell.

Se un conduttore in moto con una certa velocitá viene bruscamente arrestato, l'inerzia degli elettroni di conduzione fará si che essi acquistino, per un breve intervallo di tempo, una velocitá v rispetto alla massa (ioni) del metallo. Tale velocitá degli elettroni dará origine, in tale intervallo di tempo, ad una corrente elettrica e ad una corrispondente differenza di potenziale tra le estremitá del conduttore poste rispettivamente a monte ed a valle rispetto alla direzione della velocitá. Un analogo fenomeno potrá essere osservato se il conduttore subisce una brusca accelerazione.

Nel classico testo di Maxwell sull'elettromagnetismo [1] si legge: ...se termini di questo tipo hanno un'esistenza reale, sarebbe possibile produrre una forza elettromotrice indipendentemente dall'esistenza o meno di correnti, modificando semplicemente la velocitá dei conduttori. Un tale effetto fu tuttavia osservato solo nel 1916 da Richard C. Tolman e T. Dale Stewart [2].

Una bobina era avvolta lungo il bordo di un disco orizzontale, libero di ruotare attorno ad un asse vertcale. Le estremitá della bobina erano fatte passare lungo l'asse cui era fissato il disco e messe poi in contatto con i terminali di un galvanometro balistico di elevata sensibilitá. Il sistema veniva messo in rapida rotazione e poi bruscamente arrestato, in un piccolissimo intervallo di temp δt. Un breve impulso di corrente veniva cosí prodotto nell'istante di massima decelerazione, per effetto dell'inerzia legata alla massa degli elettroni di conduzione. Il galvanometro consentiva agli sperimentatori di ottenere una misura accurata della carica che, nel breve intervallo di tempo considerato, attraversava l'avvolgimento. Indicando con R la resistenza totale del circuito, con l la lunghezza dell'avvolgimento, con v la velocitá di rotazione, con q la carica che attraversa l'avvolgimento e rispettivamente con e ed m la carica e massa dell'elettrone, si puó facilmente vedere [3] che é:

$$q = \frac{mlv}{eR}$$

Infatti, la forza che agisce su di un elettrone nella fase di decelerazione é $F_e = dP/dt$ dove $P = mv$ é l'impulso. Tale forza, divisa per la carica e, equivale ad un campo elettrico $E = V/l$ dove V é la forza elettromotrice che agisce lungo l'intera bobina. Se indichiamo con L il coefficiente di autoinduzione del circuito, si ha:

$$V \;=\; Ri \;+\; L\frac{di}{dt}$$

dove:

$$V = El = \frac{F_e l}{e} = \frac{d(mv)}{dt}\frac{l}{e}$$

Ne segue:

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{e}{l}[Ri + L\frac{di}{dt}]$$

Integrando sul tempo tra 0 e δt:

$$\int_0^{\delta t} d(mv) = \frac{eR}{l}\int_0^{\delta t} idt + \frac{Le}{l}\int_0^{\delta t} di$$

cioé

$$mv_f - mv_i = \frac{eRq}{l} + \frac{Le}{l}(i_f - i_i)$$

dove le sottoscritte i ed f si riferiscono all'istante iniziale ed a quello finale (dopo l'arresto). Poiché inoltre é $i_f = i_i = v_f = 0$ avremo:

$$v = \frac{eRq}{lm}$$

da cui si ottiene la relazione scritta prima.

Da tale misura si puó ottenere una stima del rapporto tra massa e carica dell'elettrone.

Un'altro esperimento che lega l'inerzia degli elettroni in un conduttore ad effetti elettromagnetici fu suggerito dallo stesso Maxwell [1]. Egli propose di utilizzare una bobina circolare costituita da un gran numero di spire, sospesa mediante un filo verticale in modo tale che il piano della bobina fosse orizzontale e che essa potesse ruotare attorno alla verticale. Una corrente poteva esser fatta passare nella bobina, utilizzando il filo di sospensione che era collegato ad un polo della batteria ed un secondo filo che scendeva verticalmente dal centro della bobina fino ad una bacinella di mercurio collegata all'altro polo. Nell'istante in cui la corrente inizia a fluire nella bobina, al moto di drift degli elettroni sará associata una quantitá di moto e quindi, per l'insieme degli elettroni, un momento della quantitá di moto rispetto all'asse verticale. Poiché il momento angolare dell'avvolgimento deve rimanere nullo, esso comincerá a ruotare in verso contrario a quello della velocitá degli elettroni.

Maxwell non riuscí a rivelare sperimentalmente il fenomeno, che fu osservato nel 1931 da S.J. Barnett [4].

Nelle prossime sezioni ci occuperemo di un effetto, noto sotto il nome di Einstein e de Haas [5], che consiste nella rotazione di un blocco di materiale ferromagnetico quando esso venga magnetizzato nella direzione dell'asse di rotazione.

2 considerazioni qualitative sull'esperimento di Einstein-de Haas

É possibile, in uno schema classico, assimilare l'atomo ad un nucleo centrale avente carica positiva attorno a cui ruotano, su orbite circolari o ellittiche, uno o piu' elettroni. Ciascuna di tali orbite equivale ad un minuscolo circuito percorso da corrente e quindi, a distanze grandi rispetto alle dimensioni atomiche, essa sará vista come un dipolo magnetico. Vedremo nel prossimo paragrafo che il modulo di tale momento magnetico é, nel caso di un'orbita circolare, dato da **erv/2** dove r é il raggio dell'orbita, v la velocitá ed e la carica dell'elettrone. Al moto dell'elettrone sull'orbita é inoltre associato un momento della quantitá di moto pari ad **mrv**, dove m é la massa dell'elettrone. Si puo' inoltre vedere che il vettore momento magnetico e quello del momento angolare hanno direzione perpendicolare al piano dell'orbita ma versi opposti (essendo negativa la carica dell'elettrone). Ne segue che il rapporto tra momento magnetico e momento meccanico per il moto orbitale di un elettrone vale **e/2m** e che il segno é negativo se si tiene conto del verso dei vettori.

Se consideriamo un atomo con molti elettroni, le normali ai piani delle diverse orbite saranno in generale orientate in direzioni diverse e potrá essere mediamente nullo sia il vettore momento magnetico che quello del momento angolare. Anche se tali vettori avessero valor medio diverso da zero per un atomo, un blocco di materiale costituito da un grande numero di atomi, ciascuno con un diverso orientamento dei suddetti vettori, avrá normalmente momento magnetico ed angolare nulli.

Se tuttavia un qualche meccanismo che possa orientare i momenti magnetici atomici entra in azione, il blocco di materiale acquisterá un momento magnetico netto diverso da zero. Vedremo che il medesimo valore **e/2m** del rapporto tra momento magnetico e momento angolare trovato nel caso di una singola orbita elettronica, continua a valere per un sistema di N atomi. Ne segue che se il blocco di materiale acquista un momento magnetico netto, esso acquisterá anche un momento angolare netto ed il rapporto tra i due varrá **e/2m** . Il blocco quindi si metterá a ruotare.

L'effetto in questione va sotto il nome di effetto magneto-meccanico e l'esperimento, effettuato per la prima volta da Einstein e de Haas [5] nel 1915, é associato al nome dei due scienziati (anche se era in realtá stato suggerito sette anni prima da O.W. Richardson [8] e se il primo risultato significativo si ebbe 3 anni piu' tardi ad opera di J. Q. Stewart [7]).

3 Il rapporto giromagnetico

Consideriamo un elementino di volume dV di massa dm e carica dq, in moto attorno ad un centro fisso. Ammettiamo che il moto sia circolare ed uniforme, su di un'orbita di raggio r e che la velocitá angolare sia ω. La velocitá tangenziale é quindi $v = \omega r$ ed il periodo di rotazione $T = 2\pi/\omega$.

Il momento angolare $\vec{dp}$ del sistema, perpendicolare al piano dell'orbita, é dato da:

$$\vec{dp} = dm(\vec{r} \times \vec{v})$$

Alla carica in movimento puo' essere associata una corrente $di = dq/T = dq\omega/2\pi$.

A tale corrente (spira di raggio r percorsa dalla corrente di) é associato un momento magnetico $d\vec{M}$ il cui modulo vale:

$$dM = di\,S = dq(\omega/2\pi)\pi r^2 = dq\;(\omega/2)r^2 = dq\;r\;v/2$$

e la cui direzione é perpendicolare al piano dell'orbita. Il verso é uguale a quello di $\vec{dp}$. Poiché il modulo di $\vec{dp}$ vale $dm\;rv$ si ha che il rapporto tra momento magnetico e momento angolare é:

$$\frac{|d\vec{M}|}{|\vec{dp}|} = \frac{dq}{2dm} \tag{1}$$

Se applichiamo tale relazione al moto dell'elettrone attorno al nucleo, indicando con e la carica e con m la massa dell'elettrone, troviamo:

$$\vec{M} \;=\; -\frac{e}{2m}\,\vec{p} \tag{2}$$

dove il segno (-) deriva dal fatto che la carica dell'elettrone é negativa e che quindi ora $\vec{M}$ e $\vec{p}$ sono antiparalleli anziché paralleli. Notiamo per inciso che nel moto dell'elettrone attorno al nucleo possiamo considerare quest'ultimo fermo, essendo la sua massa, anche nel caso del nucleo piu' leggero (quello dell'idrogeno) circa 2000 volte quella dell'elettrone. Si puó far vedere che la (1) e la (2) continuano a valere anche nel caso in cui la particella si muova su di un'orbita ellittica.

Immaginiamo ora di considerare un disco di raggio R, dotato di una densitá superficiale di carica σ, in rotazione attorno al proprio asse con velocitá angolare ω. Indichiamo con ρ la densitá superficiale di massa del disco. Ci chiediamo quale sia il momento magnetico generato dal moto delle cariche disposte sulla superficie del disco e quale sia il suo momento angolare. Se consideriamo un elementino di superficie $ds = rdrd\phi$ e la carica da esso posseduta: $dq = \sigma ds = \sigma rdrd\phi$; la corrente che ad esso puo' essere associata é:

$$di = dq/T = dq\omega/2\pi = \sigma rdrd\phi\omega/2\pi$$

A tale corrente sará associato un momento magnetico:

$$dM = di\ s = \sigma rdrd\phi(\omega/2\pi)\pi r^2 = \sigma(\omega/2)r^3 drd\phi$$

Integrando su r e ϕ otteniamo il momento magnetico del disco:

$$M = \pi\sigma\omega\int_0^R r^3dr = \pi\sigma\omega\frac{R^4}{4} = \frac{QR^2\omega}{4}$$

dove Q é la carica totale del disco.
Il momento della quantitá di moto del singolo elementino é:

$$d\vec{p} = \rho\ ds\vec{r}\times\vec{v}$$

Il cui modulo é: $dp = \rho rdrd\phi r^2\omega$.

Il momento della quantitá di moto totale é:

$$P = 2\pi\rho\omega\int_0^R r^3dr \;=\; 2\pi\rho\omega\frac{R^4}{4} = 2M\omega\frac{R^2}{4}$$

dove M é la massa del disco. Il rapporto tra momento magnetico e momento meccanico é:

$$\frac{M}{P} = \frac{Q}{2M}$$

Cioé ha la medesima forma trovata in precedenza.

Consideriamo infine una sfera di raggio R_s, massa m_s e carica Q_s distribuite uniformemente nel volume della sfera. Calcoliamo anche per tale sistema il rapporto tra momento magnetico e momento angolare, nell'ipotesi che la sfera sia in rotazione attorno ad uno dei suoi diametri, con velocitá angolare ω. Immaginiamo

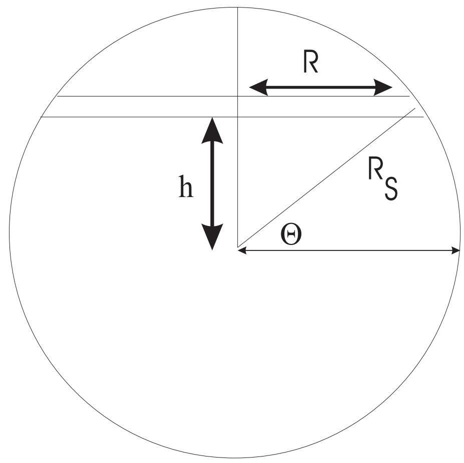

Figura 1:

di suddividere la sfera in sottili dischi, di spessore infinitesimo dh, come mostrato in figura. Se indichiamo con R il raggio del generico disco, avremo:

$$R = R_s \cos\theta$$

$$h = R_s \sin\theta$$

$$dh = R_s \cos\theta$$

Il volume del disco é dato da:

$$dV = \pi R^2 dh = \pi R_s^2 \cos^2\theta R_s \cos\theta d\theta$$

Il rapporto tra il volume del disco e quello della sfera, moltiplicato per la carica totale della sfera Q_s ci dará la carica del disco. Analogamente, il medesimo rapporto, moltiplicato per la massa totale della sfera, ci dará la massa del disco.

Tale rapporto vale:

$$\Gamma \; = \; \frac{3}{4}\cos^3\theta d\theta$$

da cui la carica Q_d e la massa m_d del disco saranno:

$$Q_d = \frac{3}{4}\cos^3\theta d\theta Q_s$$

$$m_d = \frac{3}{4}\cos^3\theta d\theta m_s$$

Il momento magnetico del disco é dato da:

$$dM \; = \; \frac{1}{4}Q_d R^2\omega \; = \; \frac{3}{16}\cos^5\theta Q_s\omega R_s^2 d\theta$$

ed il momento angolare dello stesso:

$$dP \; = \; \frac{1}{4}m_d R^2 2\omega \; = \; \frac{3}{16}\cos^5\theta m_s 2\omega R_s^2 d\theta$$

Il momento magnetico della sfera si otterrá integrando dM rispetto a θ tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Analogamente, il momento angolare si otterrá integrando dP tra i medesimi limiti.

Si ottiene in tal modo:

$$M = \frac{3}{15} Q_s R_s^2 \omega$$

Analogamente:

$$P = \frac{6}{15} m_s R_s^2 \omega$$

Il rapporto tra momento magnetico e momento angolare é quindi:

$$\frac{M}{P} = \frac{Q_s}{2m_s}$$

ed il verso dei rispettivi vettori sará l'uno l'opposto dell'altro se la carica é negativa.

Il rapporto tra P ed M é noto come rapporto giromagnetico. Da quanto visto, se un pezzo di materiale (costituito da un elevatissimo numero di atomi) é posto in un campo B tale da orientare i momenti di dipolo magnetici dei singoli atomi nella direzione del campo, ciascun atomo orienterá nella direzione opposta il proprio momento angolare. I vettori momento angolare dei singoli atomi, inizialmente orientati, al pari dei vettori momento di dipolo magnetico, in modo casuale in tutte le direzioni, si orienteranno mediamente nella direzione opposta a quella del campo B. Gli effetti del moto di agitazione termica contrasteranno in qualche misura tale tendenza, ma si avrá in ogni caso un momento magnetico netto e quindi un momento angolare netto. L'effetto sará molto piu' accentuato nel caso delle sostanze ferromagnetiche che in quello delle sostanze dia o para-magnetiche. Poiché il momento angolare del blocco di materiale é la somma vettoriale dei vettori momento angolare dei singoli atomi, e poiché questi hanno tutti acquistato un momento angolare medio parallelo a B ne segue, dovendosi conservare il momento angolare del sistema elettroni-reticolo cristallino, che l'intero blocco avrá alla fine acquistato un momento angolare netto di segno opposto a quello del sistema degli elettroni, cioé esso inzierá a ruotare dopo l'accensione del campo.

A questo riguardo é opportuna una precisazione. A rigore, cio' che abbiamo fatto vedere é che i momenti magnetici associati alle orbite degli elettroni atomici si orientano per effetto del campo e che di conseguenza si orientano i relativi momenti angolari. Ma al momento angolare del blocco contribuiscono anche i nuclei, cioé esso é la somma dei momenti angolari di tutti gli atomi, non dei soli elettroni. Di fatto, cio' che accade é analogo a cio' che si ha nel caso di una barretta di lunghezza l, percorsa da una corrente i in un campo B perpendicolare alla barretta. La forza é $i\vec{l} \times \vec{B}$ ed essa nasce dalla forza di Lorentz che agisce sugli elettroni di conduzione. Essa si traduce in una forza sulla barretta a causa dell'interazione continua che nel materiale esiste tra elettroni di conduzione e reticolo cristallino. Qualcosa di analogo accade nel caso in esame. Il momento angolare acquistato dagli elettroni viene rapidamente trasmesso al blocco per effetto dell'interazione che esiste tra elettroni e nuclei.

Indicando con $\vec{m_i}$ e $\vec{p_i}$ rispettivamente il momento magnetico e quello angolare dell'ie-mo atomo, avremo:

$$\vec{m_i} = -\vec{p_i}\frac{e}{2m} \tag{3}$$

dove e é la carica ed m la massa dell'elettrone. Da tale relazione si avrá:

$$m_{iz} \;=\; -p_{iz}\frac{e}{2m} \tag{4}$$

e, sommando su tutti gli atomi:

$$M_{bz} \;=\; -P_{bz}\frac{e}{2m} \tag{5}$$

dove M_b e P_b denotano il momento magnetico e quello angolare del blocco, rispetto all'asse z. Se $\vec{B}$ é diretto lungo l'asse z solo M_{bz} avrá valor medio non nullo, mentre saranno nulli i valori medi di M_{bx} ed M_{by}.

Notiamo che ci siamo finora limitati a considerare i momenti magnetici e quelli angolari associati al moto di rotazione degli elettroni attorno ai nuclei atomici. Se ammettiamo che ciascun elettrone possa inoltre essere assimilato ad un minuta sfera di massa m e carica e, in rotazione attorno ad un diametro, anche per tale sistema dovrebbe valere la relazione scritta in precedenza:

$$\mu_{iz} \;=\; -s_{iz}\frac{e}{2m} \tag{6}$$

dove abbiamo indicato con μ il momento magnetico della sferetta associato alla rotazione attorno al suo diametro e con s il relativo momento angolare. Si usa chiamare momento magnetico di spin il vettore $\vec{\mu}$ e momento angolare di spin il vettore $\vec{s}$. Ovviamente, il momento angolare dell'intero blocco sará la somma vettoriale dei momenti angolari atomici e dei momenti angolari di spin di tutti gli elettroni che lo compongono. Analogamente, il momento magnetico dell'intero blocco sará la somma dei momenti magnetici atomici e dei momenti magnetici di spin di tutti i costituenti.

Ancora una volta continuerá a valere la relazione:

$$M_{iz} \;=\; -P_{iz}\frac{e}{2m} \tag{7}$$

Per verificare tale relazione, Einstein e de Haas effettuarono un esperimento consistente nell'applicare un campo B ad un cilindretto di ferro il cui asse di simmetria era parallelo al campo B, in modo da magnetizzarlo. Il cilindretto, sospeso tramite un filo di torsione, veniva cosi' ad acquistare un momento angolare che era la grandezza misurata insieme al momento magnetico. Passeremo ora a descrivere tale esperimento.

4 L'esperimento di Einstein-de Haas

Consideriamo un cilindro di materiale ferromagnetico, la cui magnetizzazione sia inizialmente nulla. Il cilindro sia sospeso verticalmente mediante un filo di torsione, in modo da poter effettuare piccole oscillazioni rotazionali attorno al proprio asse. Se indichiamo con k la costante elastica del filo, con I il momento d'inerzia del cilindro e con $\Theta(t)$ l'angolo di cui esso é ruotato al tempo t rispetto alla posizione d'equilibrio, l'equazione del moto in assenza di fenomeni dissipativi sará:

$$I\ddot{\Theta} \;=\; -k\Theta$$

la cui soluzione é $\Theta = \Theta_0 \cos(\omega_0 t)$; con:

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{I}}$$

In presenza di attriti caratterizzati da una costante di smorzamento η, l'equazione differenziale del moto diventa:

$$I\ddot{\Theta} + \eta\dot{\Theta} + k\Theta \;=\; 0$$

In tal caso la soluzione sará un'oscillazione smorzata.

Ammettiamo che il cilindro sia inizialmente in quiete ($\omega(0) = 0$) e che esso sia posto coassialmente all'interno di un lungo solenoide. Se in quest'ultimo viene ad un certo istante fatta passare una corrente i, nascerá all'interno un campo d'induzione magnetica $B = \mu_0 ni$, dove n é il numero di spire per unitá di lunghezza del solenoide. Tale campo indurrá un momento magnetico M nel solenoide, parallelo a B e funzione di questo. Scegliendo un sistema di assi cartesiani con l'asse z parallelo al campo, avremo che il cilindretto verrá, come visto, ad acquistare un momento angolare:

$$P \;=\; P_z \;=\; -\frac{2m}{e}\,M$$

Il momento angolare del sistema dopo l'applicazione del campo non é piu' nullo. L'effetto é tuttavia molto piccolo. Per valutarne l'ordine di grandezza ammettiamo che il cilindretto abbia:

- raggio r = 0.015 cm
- lunghezza l = 10 cm
- densitá $d = 8g/cm^3$
- permeabilitá magnetica relativa $\mu_r = 800$ (costante)
- il campo B valga 0.1 T

Con cio' avremo:

$$H \;=\; \frac{B}{\mu_0\mu_r} \;=\; \frac{0.1}{4\pi \cdot 800 \cdot 10^{-7}} \;=\; 99.47[A/m]$$

La magnetizzazione M' sará allora:

$$M' \;=\; \frac{B}{\mu_0} - H = 79500[A/m]$$

ed il momento magnetico M della barretta, pari al prodotto della magnetizzazione per il volume: $M = 5.7\,10^{-4}[A\,m^2]$. Dalla relazione:

$$P \;=\; -\frac{2m}{e}M$$

otterremo allora:

$$P \;=\; -1.14\,10^{-11}\,5.7\,10^{-4}\;[\frac{A\,Kg\,m^2}{C}] \;=\; 6.5\,10^{-15}[Kg\,m^2\,s^{-1}]$$

e, facendo uso della relazione: $P = I\omega_r$, con $I = \frac{1}{2}mr^2 = 6.3\ 10^{-14}[Kg\ m^2]$, otterremo la velocitá angolare:

$$\omega_r \ = \ \frac{P}{I} \ = \ 0.1\ [rad/s] \tag{8}$$

Se quindi il cilindro é inizialmente in quiete, l'accensione del campo gli imprimerá una velocitá angolare di circa 100 mrad/s.

L'effetto puo' divenire apprezzabile facendo uso di un metodo risonante. Si applica cioé una corrente al solenoide, e quindi un campo B, variabile sinusoidalmente con frequenza angolare ω. Se scriviamo il campo H come:

$$H \ = \ H_0 \sin(\omega t)$$

Il momento magnetico del cilindretto sará:

$$M \ = \ \chi_m V H_0 \sin(\omega t) \tag{9}$$

con $\chi_m \ = \ \mu_r - 1$. Poiché il momento angolare P é proporzionale al momento magnetico M, ne segue che il momento meccanico dP/dt sará proporzionale a dM/dt; piu' in particolare (omettendo il segno (-)):

$$\frac{dP}{dt} \ = \ 2\frac{m}{e}\frac{dM}{dt} \ = \ 2\frac{m}{e}\chi_m H_0 V \omega \cos(\omega t) \tag{10}$$

L'equazione differenziale del moto sará allora:

$$I\ddot{\Theta} + \eta\dot{\Theta} + k\Theta \ = \ 2\frac{m}{e}\chi_m H_0 V \omega \cos(\omega t) \tag{11}$$

Cioé:

$$\ddot{\Theta} + \frac{\eta}{I}\dot{\Theta} + \frac{k}{I}\Theta \ = \ 2\frac{m}{e}\frac{\chi_m H_0 V}{I}\omega \cos(\omega t) \tag{12}$$

che, ponendo:

$$\rho = \frac{\eta}{I}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I}$$

$$b = 2\frac{m}{e}\ \frac{\chi_m H_0 V}{I}$$

diventa:

$$\ddot{\Theta} + \rho\dot{\Theta} + \omega_0^2\Theta \ = \ b\omega \cos(\omega t) \tag{13}$$

la cui soluzione é:

$$\Theta = \Theta_a \cos(\omega t - \chi) \tag{14}$$

dove:

$$\tan\chi \ = \ \frac{\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{15}$$

$$\Theta_a = \frac{b\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \rho^2\omega^2}} \tag{16}$$

Questa ha la tipica forma di una risonanza, con un massimo in corrispondenza ad $\omega = \omega_0$, che vale:

$$\Theta_0 = \frac{b}{\rho} = 2\frac{m}{e}\frac{\chi_m H_0 V}{\eta} \tag{17}$$

La misura di Θ_0, noti i valori delle costanti χ_m, H_0, V ed η, che compaiono nell'ultima espressione, ci consente di verificare se il coefficiente di proporzionalitá é veramente $2m/e$. É prassi comune scrivere il coefficiente di proporzionalitá come

$$2m/ge \tag{18}$$

e determinare, noti e ed m, la costante g che dovrebbe, classicamente, valere 1.

La determinazione fatta a partire da Θ_0, nel modo descritto é resa difficile dal fatto che il valore di η non é ben noto. Per tale motivo si ricorre ad una misura completa della curva di risonanza: si determina cioé l'ampiezza Θ_a di oscillazione per valori di ω diversi da ω_0 e da tale misura si ottiene il valore di $\rho = \eta/I$.

Dall'espressione dell'ampiezza Θ_a si ottiene infatti:

$$\Theta_a^2 = \frac{b^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \rho^2\omega^2}$$

da cui si ottiene con facili passaggi:

$$\rho^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2/\omega^2}{(\Theta_0/\Theta_a)^2 - 1} \tag{19}$$

Misurando Θ_0 e Θ_a per diversi valori di ω si puo' quindi determinare il parametro incognito ρ e quindi η.

La trattazione fatta prescinde dall'isteresi magnetica del materiale, che é in realtá importante e che fa si che la relazione tra H ed M sia non lineare. Si puo' tuttavia vedere che i risultati ottenuti continuano ad essere validi con ottima approssimazione. Per una discussione di questo punto si veda la referenza [9].

I risultati ottenuti da Einstein e de Haas risultavano in accordo con il valore g=1 predetto dalla teoria classica, e confermavano quindi le previsioni teoriche [6]. Tuttavia, quasi simultaneamente, S.J. Barnett ottenne, con il metodo che sará descritto piú avanti, un valore per g che era all'incirca 2. L'esperimento di Einstein e de Haas fu ripetuto, con un apparato modificato e con migliore sensibilitá, da John Q. Stewart [7] nel 1918, confermando un valore di g che era consistente con 2 e non con il valore classico g=1 ottenuto da Einstein e de Haas. Stewart rinunció ad usare il metodo risonante adoperato da Einstein e de Haas, e preferí misurare con grande accuratezza la rotazione del cilindretto fissato al filo di torsione (di quarzo) subito dopo l'applicazione di un impulso di corrente al solenoide. Il risultato che ottenne: $g = 1.96 \pm 0.15$ era consistente con quello di Barnett e non con la teoria classica (né con il risultato dell'esperimento di Einstein-de Haas).

Una rassegna di molti esperimenti effettuati fino al 1962 é stata pubblicata da Scott [10] che ha effettuato un gran numero di misure di questo tipo su vari materiali. L'esperimento richiede numerosi accorgimenti, essendo l'effetto molto piccolo, per ridurre l'influenza di fattori esterni, quale ad esempio il campo magnetico terrestre, che eserciterebbe da solo un momento rotazionale che é molti ordini di grandezza piu' intenso di quello che si vuol misurare. A tale scopo l'intero apparato é posto all'interno di coppie parallele di avvolgimenti circolari (coppie di Helmotz) percorse da correnti tali da generare dei campi B uguali ed opposti a quello terrestre. Diverse coppie di Helmotz sono adoperate per neutralizzare le diverse componenti del campo magnetico terrestre. Inoltre l'apparato é isolato meccanicamente in modo da annullare l'effetto di vibrazioni e movimenti di vario tipo del pavimento. Il risultato ottenuto per il parametro g che figura nell'equazione (18) (che dovrebbe valere 1 nella semplice teoria delineata) é, nel caso del Fe:

$$g \;=\; 1.938 \pm 0.006$$

valore che é significativamente diverso da 1, e molto piu' prossimo a 2.

Analoghi risultati furono trovati da altri autori e per un gran numero di elementi. Se ne dedusse che il momento angolare associato ad un dato momento magnetico non era $2m/e$ volte questo, ma semplicemente m/e volte. Al problema fu data una soluzione nel 1925 da Goudsmith e Uhlenbeck [11]. Costoro, anche sulla base di misure di tipo spettroscopico (effetto Zeeman), avanzarono l'ipotesi che al moto dell'elettrone attorno al proprio asse (lo spin) fosse associato un momento angolare ed un momento magnetico il cui rapporto era esattamente uguale ad m/e. Piú in particolare, Goudsmith e Uhlenbeck avanzarono l'ipotesi che alla rotazione dell'elettrone attorno al proprio asse fossero associati un momento angolare J_s ed un momento magnetico M_s dati rispettivamente da:

$$J_s \;=\; \frac{h}{4\pi}$$

$$M_s \;=\; \frac{eh}{4\pi m}$$

dove h (costante di Planck) vale $6.626 \cdot 10^{-34} Js$.

Cio' implica che il valore di g nella (18) sia esattamente uguale a 2, se si ignora il moto orbitale dell'elettrone. Il valore di g per il moto orbitale é ancora 1.

Il fatto che il valore sperimentale sia cosi' vicino a 2 si attribuisce al fatto che alla magnetizzazione contribuisce sopratutto il momento di spin e molto poco quello orbitale

5 Ulteriori considerazioni relative all'esperimento di Einstein-de Haas

Puó a prima vista apparire strano che, aumentando l'intensitá del campo magnetico da zero ad un certo valore, la barretta acquisti un momento angolare. Infatti, ció implica una certa energia cinetica di rotazione e quindi un lavoro fatto sulla barretta. Da dove viene tale lavoro, se sappiamo che il campo magnetico non compie alcun lavoro ? In realtá ció é perfettamente comprensibile se ricordiamo che il nostro campo magnetico é variabile e che, in base alle equazioni di Maxwell, ad un campo magnetico variabile é associato un campo elettrico:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{20}$$

Consideriamo, a solo scopo illustrativo, un semplicissimo modellino in cui l'atomo é schematizzato come una circonferenza di raggio costante r, lungo la quale é depositata una carica q ed una massa m, distribuite uniformemente con densitá lineari rispettivamente λ_q e λ_m. Ammettiamo che la circonferenza giaccia nel piano $x - y$ di un sistema di coordinate cartesiane e che il campo B, inizialmente nullo, acquisti un valore lungo z che cresce col tempo t come:

$$B = \alpha t$$

Ammettiamo che la materia distribuita lungo la circonferenza ruoti inizialmente con velocitá angolare ω_0. Possiamo ora far uso del teorema di Stokes ed applicare l'quazione 20 alla superficie del cerchio di raggio r, per ottenere:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} \;=\; -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \;=\; -\frac{\partial}{\partial t}(\pi r^2)\alpha t$$

da cui:

$$2\pi r E \;=\; -\pi r^2 \alpha$$

e quindi:

$$E \;=\; -\frac{\alpha}{2} r$$

L'energia del sistema, coincidente con quella cinetica del disco, é:

$$W \;=\; \frac{1}{2} m v^2 \;=\; \pi \lambda_m \omega^2 r^3$$

e la sua variazione in un intervallino di tempo infinitesimo dt, indicando con $d\omega$ la corrispondente variazione di velocitá angolare:

$$dW \;=\; d(\pi \lambda_m \omega^2 r^3) \;=\; 2\pi \lambda_m r^3 \omega d\omega$$

Questa deve uguagliare il lavoro fatto dal campo elettrico nel tempo dt:

$$dL \;=\; Eqvdt \;=\; -\frac{\alpha}{2} r (2\pi r \lambda_q) \omega r dt \;=\; -\alpha \pi \omega \lambda_q r^3 dt$$

Uguagliando i termini:

$$d\omega \;=\; -\frac{\lambda_q}{2\lambda_m} \alpha dt$$

cioé

$$\omega(t) \;=\; -\frac{\lambda_q}{2\lambda_m} \alpha t \;+\; \omega_0 \;=\; -\frac{q}{2m}\, B \;+\; \omega_0$$

Vediamo cosí che l'aumento di velocitá angolare e quindi di energia, viene dal lavoro fatto dal campo elettrico generato dalla variazione di B. Il modellino che abbiamo considerato é totalmente irrealistico, ma illustra in modo semplice il fenomeno che ha luogo. Vedremo piú avanti un modello piú aderente alla realtá.

6 Il teorema di Larmor

Consideriamo un semplice modellino atomico, quello di un atomo con un solo elettrone legato elasticamente ad una posizione di equilibrio. Sia $-k\vec{r}$ la forza elastica diretta verso il nucleo atomico, che supporremo fermo. Ammettiamo che la traiettoria dell'elettrone sia circolare. Uguagliando la forza centripeta e quella elastica, possiamo ottenere il valore della velocitá angolare ω_0:

$$-k\vec{r} \,+\, m\omega_0^2\vec{r} \,=\, 0$$

da cui:

$$\omega_0 \,=\, \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

In presenza di una campo d'induzione magnetica B, perpendicolare al piano dell'orbita, dobbiamo tener conto del termine aggiuntivo dovuto alla forza di Lorentz: $e\vec{v} \times \vec{B}$, che ha la direzione di $\vec{r}$ e modulo uguale a $erB\omega$, se assumiamo per ω il segno positivo per un moto destrorso (orario) dell'elettrone attorno alla direzione di B. In presenza del campo l'equazione del moto diviene allora:

$$-k + m\omega^2 + e\omega B \,=\, 0$$

ponendo:

$$\omega_L \,=\, -\frac{eB}{2m}$$

questa diventa:

$$-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\omega\omega_L \,=\, 0$$

la cui soluzione é:

$$\omega \,=\, \omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}$$

Come si puó verificare in concreto, per campi non troppo intensi (in pratica sempre) il termine ω_L é trascurabile rispetto ad ω_0. Le soluzioni diventano allora:

$$\omega_1 \,=\, -\omega_0 + \omega_L$$

$$\omega_2 \,=\, +\omega_0 + \omega_L$$

Poiché avevamo ammesso che la velocitá angolare in assenza di campo fosse $+\omega_0$, nel caso specifico dovremo scegliere la seconda delle due soluzioni. Ne segue che, in presenza del campo, la velocitá angolare aumenta della quantitá ω_L. Se il moto iniziale fosse stato sinistrorso, avremmo dovuto scegliere la prima delle due soluzioni, ed avremmo avuto per il modulo della velocitá angolare dopo l'applicazione del campo: $\omega_0 - \omega_L$. Se quindi la velocitá angolare era ω_0 prima dell'applicazione del campo, dopo essa sará $\omega_0 + \omega_L$ o $\omega_0 - \omega_L$ a seconda di quella che é l'orientazione della velocitá dell'elettrone rispetto alla direzione del campo.

Esaminiamo ora l'energia dell'elettrone. Essa era $(1/2)mv^2 = (1/2)mr^2\omega_0^2$ prima dell'applicazione del campo ed é invece: $(1/2)mr^2(\omega_0 + \omega_L)^2$ dopo. Come visto nella sezione precedente, la differenza di energia viene dal lavoro fatto dal campo elettrico associato alla variazione di B.

Infatti il lavoro fornito dal campo all'elettrone in un giro completo é:

$$\oint e\vec{E}\cdot d\vec{r} \;=\; e\int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot ds \;=\; e(\vec{\nabla}\times\vec{E})_n\,\pi\, r^2$$

dove $\vec{n}$ é la normale alla superficie dell'orbita.

Il lavoro fatto in un secondo sará:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_n\frac{er^2\omega_0}{2}$$

Se il senso di rotazione dell'elettrone é destrorso, il lavoro ad esso fornito in un secondo sará allora:

$$-\frac{\partial B}{\partial t}\frac{er^2\omega_0}{2}$$

ed il lavoro totale nel passaggio del campo dal valore zero al valore B sará:

$$-B\frac{er^2\omega_0}{2} \;=\; -mr^2\omega_0\frac{eB}{2m} \;=\; -\frac{1}{2}mr^2\omega_0\,2\frac{eB}{2m} \;=\; \frac{1}{2}mr^2(2\omega_0\omega_L)$$

Si vede che, a meno di termini in ω_L^2, questo é l'aumento di energia calcolato prima.

I due casi appena esaminati, quello di un elettrone che, in un campo B segue una traiettoria circolare destrorsa attorno alla direzione del campo, e quello di un elettrone che segue una traiettoria circolare sinistrorsa, rientrano in un unico teorema generale, che é quello di Larmor, secondo il quale *per effetto dell'inserimento del campo B, l'elettrone descrive dopo l'inserimento il medesimo moto rotatorio che esso descriveva prima, ma ora in un riferimento ruotante con velocitá angolare* ω_L.

Verifichiamo ora che il medesimo risultato continua a valere nel caso piú generale di un elettrone legato elasticamente ad un nucleo fisso, nel caso in cui si applichi un campo B. In tal caso, l'equazione del moto si scriverá:

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} \;=\; e\vec{v}\times\vec{B} \tag{21}$$

che, ponendo al solito $k/m = \omega_0^2$, in coordinate cartesiane diventa:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \;=\; \frac{e}{m}\dot{y}B$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y \;=\; -\frac{e}{m}\dot{x}B$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z \;=\; 0$$

dove si é ammesso che B sia diretto lungo l'asse z.

Moltiplicando la seconda di queste equazioni per l'unitá immaginaria i, sommandola poi alla prima ed introducendo la variabile complessa: $\alpha = x + iy$, si ottiene:

$$\ddot{\alpha} \;+\; \omega_0^2\alpha \;=\; -i\frac{eB}{m}\dot{\alpha} \;=\; 2i\omega_L\dot{\alpha}$$

dove:

$$\omega_L = -\frac{eB}{2m}$$

La soluzione generale di tale equazione é:

$$\alpha \;=\; A \exp i(\omega_0 + \omega_L)t \;+\; B \exp i(-\omega_0 + \omega_L)t$$

ovvero:

$$\alpha \;=\; x + iy \;=\; \exp i\omega_L t(A \exp i\omega_0 t + B \exp -i\omega_0 t)$$

che differisce dal moto in assenza del campo B per la presenza del fattore $\exp i\omega_L t$, corrispondente ad una rotazione attorno alla direzione dell'asse z con velocitá angolare ω_L (frequenza di Larmor). Notiamo che il moto lungo l'asse z non é alterato dal campo.

Ne concludiamo che, quando si stabilisce il campo, al movimento iniziale si sovrappone una rotazione con velocitá angolare uniforme ω_L. In generale, si puó dimostrare per il caso di un generico sistema atomico con un generico numero di elettroni, che l'aggiunta di una campo magnetico ha come unico risultato quello di imprimere al sistema di elettroni un ulteriore moto di rotazione con frequenza angolare ω_L. Poiché tale moto rotatorio addizionale crea un ulteriore momento di dipolo, ne segue che il momento magnetico del materiale sará modificato e, se prima era nullo, ora verrá ad essere diverso da zero. É questa l'origine del diamagnetismo.

Ammettiamo ora di porre un pezzo di metallo in un campo B. L'effetto della rotazione di Larmor é quello di aggiungere, al moto iniziale di rotazione degli elettroni attorno ai rispettivi nuclei, un ulteriore moto rotatorio di frequenza angolare $\omega_L = -(e/2m)B$. Se ora immaginiamo di far ruotare il metallo, attorno alla direzione di B, con velocitá angolare $-\omega_L$, ciascun elettrone di ciascun atomo si comporterá esattamente come si comportava prima dell'applicazione del campo: ruoterá con velocitá angolare ω_0. Cioé il moto di rotazione ha annullato l'effetto del campo. Se in seguito all'applicazione di un campo il materiale aveva acquistato un momento magnetico, dopo la rotazione che gli abbiamo impresso tale momento magnetico verrá a mancare. Ció peró vuol anche dire che, *se non applichiamo alcun campo, ma facciamo ruotare il blocco di metallo, questo si comporterá come se fosse stato messo in un campo magnetico di intensitá $B = 2m\omega/e$.* Tale fenomeno é l'opposto di quello relativo all'effetto Einstein-de Haas (o effetto magneto-meccanico) ed é noto sotto il nome di Barnett, che per primo lo mise in evidenza.

É possibile dedurre il medesimo risultato per altra via, che mette in evidenza in modo immediato il legame tra quest'ultimo effetto e quello di Einstein-de Haas.

Ricordiamo dalla meccanica che la derivata rispetto al tempo di un vettore $\vec{u}$ in un sistema fisso, é legata alla derivata rispetto al tempo del vettore $\vec{u_r}$ espresso in un sistema di riferimento che ruota con velocitá angolare $\vec{\omega}$, dalla relazione:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \;=\; \frac{d\vec{u_r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

Se applichiamo tale relazione al vettore momento angolare $\vec{p}$ di un sistema atomico, parte di un blocco di materiale in rotazione attorno ad un asse fisso con velocitá angolare $\vec{\omega}$, avremo:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \;=\; \frac{d\vec{p_r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

Se nessun momento meccanico agisce sul sistema, il termine $d\vec{p}/dt$ deve esser nullo. Ne segue:

$$\frac{d\vec{p_r}}{dt} = \vec{p} \times \vec{\omega}$$

Ció vuol dire che nel sistema ruotante agisce sul vettore $\vec{p}$ un momento meccanico, che chiameremo $\vec{K}$: $\vec{K} = \vec{p} \times \vec{\omega}$. In altre parole, un osservatore nel sistema ruotante vedrá un momento meccanico $\vec{K}$ agente sul vettore momento angolare $\vec{p}$. Sappiamo d'altronde che al momento angolare é associato un momento magnetico $\vec{M}$ pari a $-(e/2m)\vec{p}$ e che questo, in un campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ (che potremo scegliere parallelo al vettore $\vec{\omega}$) subirebbe un momento torcente

$$\vec{K'} = \vec{M} \times \vec{B} = -\frac{e}{2m}\vec{p} \times \vec{B}$$

Possiamo ora, con un'opportuna scelta del modulo di $\vec{B}$, far si che il momento meccanico totale si annulli:

$$\vec{K'} = -\vec{K}$$

cioé

$$\vec{p} \times \vec{\omega} = \frac{e}{2m}\vec{p} \times \vec{B}$$

da cui segue:

$$\vec{B} = \frac{2m}{e}\vec{\omega}$$

Vediamo quindi che possiamo compensare l'effetto della rotazione mediante l'applicazione di un opportuno campo magnetico $\vec{B}$. Segue allora che una rotazione é equivalente all'applicazione di un campo, purché tra campo e vettore velocitá angolare susssista la relazione scritta.

7 L'esperimento di Barnett

Se un cilindretto di materiale é messo in rapida rotazione attorno al suo asse, dobbiamo aspettarci, per quanto visto sopra, che esso si magnetizzi. Che ció dovesse avvenire era stato predetto da John Perry [12] fin dal 1890, che tuttavia non riuscí a rivelare l'effetto. Perry attribuí la causa dell'insuccesso alla inadeguata velocitá di rotazione impressa al suo campione.

L'effetto fu poi osservato per la prima volta da Barnett [13] nel 1914-1915.

Non entreremo in una discussione dei dettagli dell'esperimento di Barnett. Ci limiteremo a menzionare che egli adoperó un cilindro, del diametro di circa 7 cm e lungo circa 85 cm, attorno a cui era posto un solenoide, adoperato per misurare il campo prodotto dalla rotazione. La velocitá angolare di rotazione veniva fatta variare tra circa 20 e 40 rotazioni al secondo. Un secondo cilindro simile al primo, posto anch'esso in un solenoide e collocato, parallelamente al primo, ad una certa distanza da esso, veniva usato (senza imprimergli alcuna rotazione) come campione di confronto. Per ridurre gli effetti del campo magnetico terrestre, entrambi i sistemi erano posti orizzontalmente, ad un angolo di circa 90^0 rispetto alla direzione del meridiano magnetico. La grandezza misurata era la differenza tra i segnali (flussi magnetici) nei due solenoidi. Il risultato veniva riportato in un diagramma, in funzione della velocitá angolare e mostrava una andamento all'incirca lineare in funzione di questa.

Anche da tali misure fu possibile estrarre il valore del parametro g definito dall'equazione 18. Si trovó che, sia pure con grossi errori, il valore di g era compatibile con quello ottenuto nell'esperimento di J.Q.Stewart ma non con il valore 1 predetto dalla teoria classica. Tale risultato é stato poi confermato da numerosi altri esperimenti e, come giá detto, trova la sua spiegazione nello spin dell'elettrone.

Riferimenti bibliografici

[1] J.C. Maxwell A treatise on Electricity and Magnetism; (Oxford University Press) Vol. II, 3^a edizione del 1891. Ristampato da Clarendon Press - Oxford; pag. 221.

[2] R.C. Tolman e T. Dole Stewart; Physical Review VIII, 97 (1916); Physical Review IX, 164 (1917); R.C. Tolman, S. Karrer e E.W. Guernsey Physical Review XXI, 525 (1923); R.C. Tolman e L.M. Mott-Smith, Physical Review XXVIII, 794 (1926)

[3] Per una dimostrazione ed una descrizione dell'esperimento si veda il libro di elettricitá di D. V. Sivuchin, pagg. 453-455

[4] S.J. Barnett; Phil. Mag. XII, 349 (1931)

[5] A. Einstein e W.J. de Haas, Verhandl. Deut. Physik Ges. 17, 152 (1915); 18, 173 (1916)

[6] I risultati trovati da Einstein e de Haas furono, in due misure separate: g=1.33 e g=1.02. Vedasi peró una critica di questi risultati nell'articolo di J.Q. Stewart (pagina 116)

[7] J.Q. Stewart; Physical Review 11, 110 (1918)

[8] O.W. Richardson; Physical Review 26, 194 (1908)

[9] R. Becker; Teoria dell'elettricitá; sesta edizione. Sansoni Editore, secondo volume p. 122-123

[10] G.G. Scott; Reviews of Modern Physics 34, 102 (1962)

[11] G.E. Uhlenbeck e S. Goudsmith; Naturwiss, XIII, 953 (1925). Nature, CXVII, 264 (1926)

[12] J. Perry: Spinning Top; p. 112

[13] S.J. Barnett: Physical Review VI, 239 (1915); Phys. Rev. XX, 90 (1922); Nature CXII, 186 (1923)

Indice