Onde elettromagnetiche

1 Equazioni di Maxwell ed onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell in un mezzo omegeneo, di costante dielettrica ϵ e permeabilitá magnetica μ, in assenza di correnti e cariche, sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Sono queste equazioni, e piú in particolare le (3) e (4), che spiegano la propagazione delle onde elettromagnetiche. La (4) prevede infatti che, se in una certa zona di spazio é presente un campo elettrico variabile, questo dia origine ad un campo magnetico. Se ad esempio il campo elettrico varia in modo sinusoidale, avremo un campo $\vec{B}$, le cui linee di forza si avvolgono attorno a quelle di $\vec{E}$ ed il cui rotore varia in funzione del tempo t come un coseno. La (3) ci dice che allora nasce un campo elettrico, le cui linee di forza si avvolgono attorno a quelle di $\vec{B}$, che varia in modo sinusoidale. Si ha cosí una *propagazione del campo elettromagnetico*. Nel campo, la componente elettrica genera continuamente una componente magnetica e questa a sua volta genera una nuova componente elettrica. É anche naturale aspettarsi che le due componenti siano ortogonali l'una all'altra (le linee di forza di uno dei due campi si avvolgono attorno a quelle dell'altro).

Esaminiamo ora in modo quantitativo come l'onda si propaghi.

Moltiplicando da sinistra la (3) per l'operatore $\vec{\nabla}$ si trova:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Facciamo ora uso della relazione:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right)$$

dove l'ultimo dei termini a secondo membro é nullo, in assenza di cariche. Si ha quindi:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \tag{5}$$

D'altronde, derivando la (4) rispetto al tempo si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B} \ = \ \epsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Sostituendo questa nella (5) si trova infine:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \ = \ 0 \qquad (6)$$

Vediamo cosí che il vettore $\vec{E}$ soddisfa l'equazione delle onde.

Si puó facilmente verificare che la medesima equazione é soddisfatta dal vettore $\vec{B}$:

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \ = \ 0 \qquad (7)$$

Queste equazioni ci dicono che i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano nello spazio con velocitá:

$$v \ = \ \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Se il mezzo é il vuoto, sostituendo i valori numerici di ϵ_0 e μ_0:

$$\epsilon_0 = 8.854\,10^{-12} \quad \left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]$$

$$\mu_0 \ = \ 4\pi\,10^{-7} \quad \left[\frac{N}{A^2}\right]$$

si trova:

$$v \ = \ c \ = \ \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \ \approx \ 299790000\,\frac{m}{s}$$

cioé la velocitá della luce nel vuoto.

In un mezzo denso, caratterizzato da un valore ϵ_r della costante dielettrica relativa e μ_r della permeabilitá magnetica, avremo:

$$v \ = \ \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \ = \ \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \ = \ \frac{c}{n}$$

dove n é l'*indice di rifrazione* relativo al mezzo considerato.

2 Onde piane

La soluzione generale dell'equazione d'onda, nel caso di propagazione di un'onda *scalare* [1] lungo una direzione determinata, (x) é del tipo:

$$f(x,t) \ = \ f_+(x - vt) + f_-(x + vt)$$

[1] Cioé di un'onda descrivibile da una singola funzione, quale potrebbe essere la pressione, nel caso di un'onda in un gas, lo spostamento trasversale di un elemento di corda nel caso di un'onda in una corda tesa, etc

dove la f_+ rappresenta un'onda progressiva e la f_- una regressiva. Nel caso di un'onda elettromagnetica piana [2] che si propaghi lungo l'asse x, ciascuna delle componenti del campo elettrico (come pure ciascuna delle componenti del campo $\vec{B}$) dovrá essere descritta da una funzione del tipo della f(x,t) e dovrá quindi dipendere da x e t solo nella combinazione $(x \mp vt)$.

Scriveremo:

$$\vec{E} = \vec{E}(x \mp vt) \tag{8}$$

per il campo elettrico $\vec{E}$, e:

$$\vec{B} = \vec{B}(x \mp vt) \tag{9}$$

per il vettore induzione magnetica $\vec{B}$, dove abbiamo indicato con v la velocitá di propagazione dell'onda e.m. nel mezzo considerato.

Dalle equazioni (1) e (2) otteniamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

Vediamo cosí che le componenti x dei campi non dipendono dal tempo.

La componente x dell'equazione (3) fornisce:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) = 0$$

poiché per l'ipotesi fatta, di un'onda piana che si propaga lungo l'asse x, $\vec{E}$ non dipende dalle coordinate y, z. Vediamo quindi che la componente x del campo $\vec{B}$ non dipende neanche dalla coordinata x. Essa é quindi una costante, e non descrive alcuna propagazione di tipo ondulatorio.

Le altre due componenti della (3) danno poi:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} = +\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Mentre dalla componente x della (4) si ottiene:

$$\epsilon\mu\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$$

Questa ci fa vedere che la componente x del campo $\vec{E}$ non dipende dal tempo. Poiché essa, come visto, non dipende neanche dalla coordinata x, ne concludiamo, come giá per B_x che tale termine é una costante, irrilevante per ció che concerne la propagazione dell'onda.

[2]Si definisce piana un'onda la cui ampiezza e fase in un dato istante é la medesima in tutti i punti di un piano (fronte d'onda) perpendicolare alla direzione di propagazione

Le altre due componenti della (4) forniscono:

$$\epsilon\mu\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\epsilon\mu\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Abbiamo in tal modo visto che le sole componenti dei campi rilevanti agli effetti della propagazione dell'onda, sono quelle lungo y e z, cioé lungo gli assi perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda. Le eventuali componenti longitudinali di $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ descrivono campi uniformi e costanti, che non corrispondono ad alcuna propagazione di tipo ondulatorio.

Le equazioni differenziali soddisfatte dalle componenti y e z sono quelle appena scritte, che riportiamo qui per comoditá:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{10}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{11}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon\mu\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{12}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon\mu\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{13}$$

Notiamo che la prima e l'ultima di tali equazioni contengono le sole variabili B_y ed E_z, mentre le altre due contengono solo E_y e B_z.Ció ci dice che il problema puó esser affrontato separatamente per ciascuna coppia. Essendo peró uguali le equazioni cui ciascuna coppia soddisfa, dobbiamo aspettarci di trovare anche soluzioni uguali.

Esaminiamo ora una soluzione particolare delle equazioni. Ammettiamo che il campo elettrico $\vec{E}$ abbia nulla la componente z. In tale caso, le equazioni (10) e (13) ci dicono che é:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

Cioé B_y é costante nel tempo e nello spazio. Nuovamente abbiamo una componente che non corrisponde ad un'onda e che possiamo quindi ignorare. L'unica componente di $\vec{B}$ che sopravvive é quella z. Abbiamo quindi che le componenti dei campi elettrico e magnetico che rimangono sono E_y e B_z. Le soluzioni saranno allora:

$$\vec{E} \equiv E_y\hat{y} = f(x \mp vt)$$

$$\vec{B} \equiv B_z\hat{z} = g(x \mp vt)$$

dove abbiamo indicato con $\hat{y}$ e $\hat{z}$ i versori dei relativi assi cartesiani e dove il segno (-) é relativo ad un'onda progressiva, quello (+) ad una regressiva.

L'onda che si propaga é cioé caratterizzata da un campo elettrico $\vec{E}$ e da un campo $\vec{B}$ che sono perpendicolari tra loro, oltre ad essere perpendicolari alla direzione (x) di propagazione dell'onda.

Possiamo in aggiunta vedere che, in tale situazione, esiste una relazione definita tra i moduli dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Ponendo: $\xi = x \mp vt$, possiamo infatti scrivere:

$$E_y = E_y(x \mp vt) = E_y(\xi)$$

$$B_z = B_z(x \mp vt) = B_z(\xi)$$

e, facendo uso della (11):

$$\mp v \frac{\partial B_z}{\partial \xi} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial \xi}$$

cioé:

$$\frac{\partial E_y}{\partial \xi} = \pm v \frac{\partial B_z}{\partial \xi}$$

da cui:

$$E_y = \pm v B_z + costante$$

dove il termine costante puó, come prima, essere ignorato. Si ottiene infine:

$$\frac{E_y}{B_z} = \pm v = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{14}$$

Tenendo conto del fatto che il vettore $\vec{E}$ é diretto lungo l'asse y ed il vettore $\vec{B}$ lungo l'asse z, mentre l'onda viaggia lungo il verso positivo dell'asse x se progressiva, lungo quello negativo se regressiva, vediamo che si puó scrivere:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} \tag{15}$$

Il rapporto tra il modulo di $\vec{E}$ e quello di $\vec{B}$ é:

$$\frac{E}{B} = v$$

Una soluzione particolare alternativa a quella considerata é ottenibile ammettendo che il campo elettrico $\vec{E}$ abbia nulla la componente y. In modo analogo a quello seguito in precedenza si trova allora, facendo uso delle equazioni (11) e (12):

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

Cioé la componente z del campo $\vec{B}$ corrisponde ad un campo uniforme e costante che, come nei casi precedenti, puó essere ignorato. Le componenti dei campi che rimangono sono in questo caso B_y e E_z:

$$B_y = B_y(x \mp vt)$$

$$E_z = E_z(x \mp vt)$$

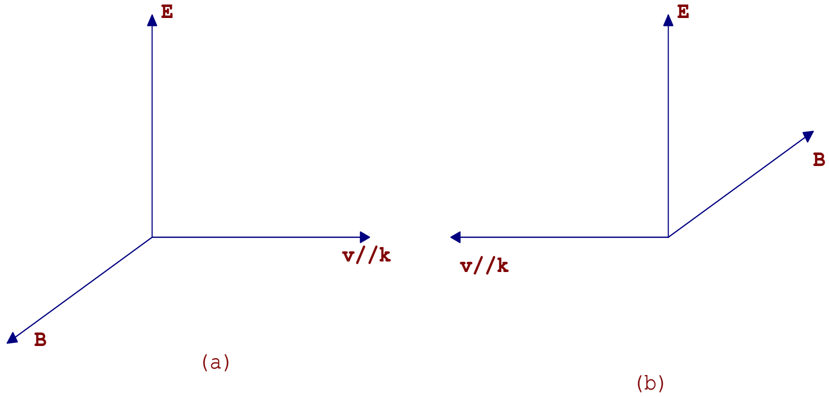

Figura 1:

Ancora una volta troveremo poi che i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono legati da una relazione analoga alla (14). Facendo infatti uso della (10), si trova:

$$E_z = \pm v B_y \tag{16}$$

Da questa si vede poi che anche in questo caso é:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$$

Questa equazione mostra che i vettori $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{v}$ (o il "vettore d'onda $\vec{k}$" che incontreremo tra poco) sono tali che, per un'osservatore che guardi nel verso negativo di $\vec{v}$, $\vec{E}$ debba ruotare in verso antiorario per andare a sovrapporsi a $\vec{B}$ (vedi figura 1(a)). Si noti che se si inverte il verso di propagazione dell'onda, si scambiano $\vec{E}$ e $\vec{B}$(vedi figura 1(b)).

Nel caso in cui siano diverse da zero sia la componente y che quella z di $\vec{E}$, la soluzione puó poi essere ottenuta, facendo uso della linearitá delle equazioni differenziali, combinando le soluzioni particolari ottenute nel caso $E_y = 0$ ed in quello $E_z = 0$. Si ha cosí (limitandoci al caso di un'onda progressiva):

$$\vec{E} = E_y(x - vt)\hat{y} + E_z(x - vt)\hat{z}$$

$$\vec{B} = B_y(x - vt)\hat{y} + B_z(x - vt)\hat{z}$$

dove, come segue dalle (14 e (16):

$$B_y(x - vt) = -\frac{1}{v} E_z(x - vt)$$

$$B_z(x - vt) = \frac{1}{v} E_y(x - vt)$$

Come vediamo, anche in questo caso le componenti del campo $\vec{B}$ sono dipendenti da quelle di $\vec{E}$. Potremo scrivere:

$$\vec{E} = E_y(x - vt)\hat{y} + E_z(x - vt)\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{v}\left[-E_z(x-vt)\hat{y} + E_y(x-vt)\hat{z}\right]$$

da cui si ottiene la relazione tra i moduli dei vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2}\left(E_y^2 + E_z^2\right) = \frac{E^2}{v^2}$$

I vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ancora una volta prependicolari tra loro, come si verifica facilmente calcolando il loro prodotto scalare:

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = \frac{1}{v}\left(-E_y(x-vt)E_z(x-vt) + E_z(x-vt)E_y(x-vt)\right) = 0$$

Il prodotto vettoriale di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é poi dato da:

$$\vec{E}\times\vec{B} = \frac{E^2}{v}\hat{x} = B^2 v\hat{x} = EB\hat{x} = B^2\vec{v} \tag{17}$$

Moltiplicando vettorialmente entrambi i membri di questa equazione a sinistra per $\vec{B}$, troviamo poi:

$$\vec{B}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = B^2\vec{B}\times\vec{v}$$

e, facendo uso dell'identitá vettoriale:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

otteniamo:

$$\vec{E} = \vec{B}\times\vec{v}$$

cioé la medesima relazione trovata in precedenza.

La relazione tra i moduli di $\vec{B}$ ed $\vec{E}$:

$$\frac{E}{B} = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

si puó esprimere come una relazione tra $\vec{E}$ e $\vec{H}$:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \equiv Z$$

La grandezza $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z$, che ha le dimensioni di una resistenza, é nota come l'*impedenza caratteristica* del mezzo. Nel vuoto essa vale $377\,\Omega$.

3 Onde piane monocromatiche

In questa sezione considereremo onde piane monocromatiche, cioé onde piane la cui dipendenza spazio-temporale sia di tipo sinusoidale.

Un'onda piana monocromatica puó essere espressa nella forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{18}$$

per il campo elettrico $\vec{E}$, e:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{19}$$

per il vettore induzione magnetica $\vec{B}$.

Il vettore $\vec{k}$ é il vettore d'onda, diretto nella direzione di propagazione dell'onda ed avente modulo:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Sostituendo tali espressioni dei campi nelle equazioni (1)-(4) e tenendo conto del fatto che:

$$\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}$$

si trova che:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{B} = -\omega\epsilon\mu\vec{E}$$

e:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$$

Mentre dalle equazioni della divergenza (1) e (2) segue:

$$\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

Segue da tali relazioni che i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ di un'onda piana monocromatica sono perpendicolari al vettore $\vec{k}$, cioé alla direzione di propagazione dell'onda.

L'onda elettromagnetica é *trasversale*. Inoltre i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari tra loro e, insieme al vettore $\vec{k}$, formano una terna di vettori ortogonali (vedi figura 1). La fase di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é la medesima in ogni istante.

Il fatto che le onde elettromagnetiche fossero trasversali fu scoperto nel 1817 da Young. Basandosi su tale ipotesi egli spiegó infatti l'assenza di interferenza tra raggi luminosi polarizzati in direzioni perpendicolari, osservata quasi contemporaneamente da Arago e Fresnel nel 1816.

Dalla relazione:

$$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$$

prendendo il modulo di entrambi i membri:

$$|\vec{k}\times\vec{E}| = \omega|\vec{B}|$$

e tenendo conto del fatto che:

$$|\vec{k}\times\vec{E}| = |k||E|$$

nonché del fatto che:

$$|\vec{k}| = k = \frac{\omega}{v}$$

si trova ancora una volta:

$$E = vB$$

e, nel vuoto:

$$E = cB$$

4 Onde elettromagnetiche nei mezzi materiali

Consideriamo un mezzo caratterizzato da valori costanti della permeabilitá magnetica relativa μ_r, della costante dielettrica relativa ϵ_r e della conducibiltá σ. Ammettiamo inoltre che per tale mezzo valga la legge di Ohm: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ con J eventualmente complesso.

Cerchiamo soluzioni di onda piana delle equazioni di Maxwell in tale mezzo, soluzioni che scriveremo nella forma:

$$\vec{E} \;=\; \vec{E_0}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{20}$$

$$\vec{H} \;=\; \vec{H_0}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{21}$$

Facciamo uso delle equazioni di Maxwell relative al mezzo considerato, ricordando che é:

$$\vec{B} \;=\; \mu_0\mu_r\vec{H} \;=\; \mu\vec{H}$$

$$\vec{D} \;=\; \epsilon_r\epsilon_0\vec{E} \;=\; \epsilon\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} \;=\; \epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \;+\; \sigma\vec{E} \tag{22}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} \;=\; -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;=\; -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{23}$$

Moltiplicando la prima delle due ultime equazioni vettorialmente da sinistra per l'operatore $\vec{\nabla}$, avremo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{H} \;=\; \vec{\nabla}\times[\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \;+\; \sigma\vec{E}]$$

e, ricordando l'identitá matematica:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{H} \;=\; -\nabla^2\vec{H} \;+\; \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H})$$

la (22) diventa:

$$-\nabla^2\vec{H} \;+\; \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}) \;=\; \sigma\vec{\nabla}\times\vec{E} \;+\; \epsilon\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Ricordando ora che $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} \;=\; 0$ e che la derivata $(\partial\vec{E})/\partial t$ per l'onda di frequenza angolare ω considerata é uguale a $-i\omega\vec{E}$, avremo:

$$\nabla^2\vec{H} \;+\; (\sigma - i\omega\epsilon)\vec{\nabla}\times\vec{E} \;=\; 0$$

Questa espressione puó essere ridotta ad un'equazione nella sola variabile $\vec{H}$ facendo uso della (23):

$$\nabla^2\vec{H} \;-\; (\sigma - i\omega\epsilon)\,\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \;=\; 0 \tag{24}$$

Scegliamo ora un sistema di assi cartesiani con l'asse x diretto lungo la direzione di propagazione dell'onda.

Sostituendo ora al vettore $\vec{H}$ (che giace nel piano y-z) il suo modulo, alla derivata $\frac{\partial H}{\partial t}$ il termine $-i\omega H$, e ricordando che per l'onda piana che stiamo considerando le derivate rispetto ad y e rispetto a z sono nulle, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \ + \ (i\omega\mu\sigma + \omega^2\epsilon\mu)H \ = \ 0 \tag{25}$$

Cerchiamo ora soluzioni di tale equazione del tipo di onda piana monocromatica scritta sopra (21):

$$H(x) \ = \ H_0 e^{ikx}$$

sostituendo tale espressione nell'equazione precedente, possiamo ricavare k:

$$k \ = \ \sqrt{\epsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}$$

Ricordando poi le relazioni:

$$\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$$

$$\mu = \mu_0\mu_r$$

$$c^2 \ = \ \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$$

$$k_0 \ = \ \omega/c$$

troviamo:

$$k \ = \ \sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r\omega^2 + i\omega\mu_0\mu_r\sigma} \ = \ \sqrt{\frac{\epsilon_r\mu_r\omega^2}{c^2} + i\omega\sigma\frac{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}{\epsilon}} \ =$$

$$= \ \sqrt{\frac{\epsilon_r\mu_r\omega^2}{c^2} + i\omega\sigma\frac{\epsilon_r\mu_r}{\epsilon c^2}} \ = \ \sqrt{\epsilon_r\mu_r}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\omega\sigma}{\epsilon c^2}}$$

cioé:

$$k \ = \ \sqrt{\epsilon_r\mu_r}\sqrt{k_0^2 + ik_0^2\frac{\sigma}{\epsilon\omega}} \ = \ k_0\ \sqrt{\mu_r\epsilon_r}\sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{26}$$

e per B abbiamo:

$$B \ = \ \frac{E}{v} \ = \ \frac{k}{\omega}E$$

Possono ora verificarsi tre casi distinti:

1. dielettrici: σ é trascurabile
2. conduttori: σ é molto grande
3. plasmi: σ é immaginario

Esamineremo ora nell'ordine questi tre casi.

5 Dielettrici

L'equazione (26) ottenuta nella precedente sezione, nel caso di sostanze aventi conducibilitá molto basse, come appunto i dielettrici, diventa:

$$k = k_0\sqrt{\mu_r\epsilon_r} \approx k_0\sqrt{\epsilon_r}$$

poiché é $\mu_r \approx 1$ nel caso dei dielettrici. Per la lunghezza d'onda ció implica:

$$\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r} = \lambda_0/n$$

dove n é l'indice di rifrazione. Notiamo qui che ϵ_r non é necessariamente reale, e quindi n sará in genere complesso. Si puó poi vedere che esso, in generale, dipenderá dalla frequenza dell'onda monocromatica adoperata.

Per vederlo é sufficiente considerare un semplice modellino classico dell'atomo, in cui, per effetto del campo $\vec{E}$ dell'onda la carica negativa associata all'insieme degli elettroni subisce uno spostamento netto rispetto alla carica positiva del nucleo (polarizzazione per deformazione). Se indichiamo con α_d la polarizzabilitá, il momento di dipolo atomico sará:

$$\vec{p} = \alpha_d\vec{E}$$

La deformazione atomica, descritta dal "vettore spostamento" delle cariche negative rispetto al nucleo, sará cioé proporzionale al campo. Dal bilancio della forza deformante dovuta al campo ($\vec{F} = Ze\vec{E}_l$, con Z il numero atomico ed E_l il campo "locale") con la forza di richiamo elastica[3] ($-k\vec{r}$) che nasce a seguito dello spostamento delle cariche, si otterrebbe, se il campo fosse costante:

$$\vec{p} = Ze\vec{r} = \frac{(Ze)^2}{k}\vec{E}_l$$

da cui:

$$\alpha_d = \frac{(Ze)^2}{k}$$

Se il campo $\vec{E}$ é variabile come nel caso del campo elettrico dell'onda:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_{0l}e^{i\omega t}$$

dove abbiamo indicato con $\vec{E}_{0l}$ il campo "locale", cioé l'ampiezza del campo effettivamente agente sulla singola molecola, il dipolo che nasce é oscillante. In tali circostanze, come vedremo in seguito, esso irradia onde e.m. e perde energia. Tale effetto puó essere descritto introducendo l'equivalente di una forza dissipativa:

$$-m\gamma\dot{\vec{r}}$$

dove m é la massa dell'elettrone e γ una costante che dipende dalla perdita d'energia per unitá di tempo subita dall'elettrone.

L'equazione del moto diventa allora:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - m\gamma\dot{\vec{r}} + Ze\vec{E}_{0l}e^{i\omega t}$$

[3]Se indichiamo con R il raggio atomico, é facile verificare che, nel modellino classico che stiamo analizzando, é: $k = \frac{(Ze)^2}{4\pi R^2}$

cioé:

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{Ze}{m}\vec{E}_{0l}e^{i\omega t}$$

dove si é posto:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La soluzione di questa equazione é del tipo:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_0 e^{i\omega t}$$

Sostituendo si ottiene con facili passaggi:

$$\vec{R}_0 = \frac{Ze}{m\left[\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right]}\vec{E}_{0l}$$

La polarizzabilitá α_d é il rapporto tra il momento di dipolo $(Zer(t))$ ed il campo $E_l(t)$, cioé:

$$\alpha_d = \frac{(Ze)^2}{m\left[\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right]}$$

Vediamo che ora la polarizzabilitá é complessa. Possiamo scriverla nella forma:

$$\alpha_d = |\alpha_d|e^{i\delta}$$

con:

$$|\alpha_d| = \frac{(Ze)^2}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

e:

$$\tan\alpha_d = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Vediamo che per $\omega = 0$ (campo elettrico statico) ritroviamo il risultato giá noto dall'elettrostatica:

$$\alpha_d = |\alpha_d| = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2}$$

e $\delta = 0$.

Risultando, nel nostro caso di un'onda sinusoidale, complessa la polarizzabilitá α_d, segue che il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ e quindi la polarizzazione $\vec{P}$ saranno sfasati rispetto al campo. Se consideriamo ora il caso di un liquido denso, la costante dielettrica relativa puó esser ottenuta facendo uso della formula di Clausius-Mossotti. Cioé:

$$\epsilon_r = \chi + 1 = \frac{N\alpha_d}{\epsilon_0 - N\alpha_d/3} + 1 = \frac{1 + 2N\alpha_d/3\epsilon_0}{1 - N\alpha_d/3\epsilon_0}$$

dove N é il numero di atomi per unitá di volume.

Ora ϵ_r é una grandezza complessa. Ne segue che sará complesso l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

Esso sará dato da:

$$n \;=\; \sqrt{\frac{1+2N\alpha_d/3\epsilon_0}{1-N\alpha_d/3\epsilon_0}} \;\equiv\; n_1 + in_2 \tag{27}$$

Vediamo ora cosa ció implichi per il campo elettrico associato all'onda. Questo sará dato da:

$$\vec{E} \;=\; \vec{E}_0 e^{i\omega(t-x/v)} \;=\; \vec{E}_0 e^{i\omega(t-\frac{n}{c}x)} \;=$$
$$= \vec{E}_0 e^{i\omega\left[t-\frac{(n_1-in_2)x}{c}\right]} \;=\; \vec{E}_0 e^{-\omega n_2 x/c}\, e^{i\omega(t-n_1x/c)}$$

Questa rappresenta un'onda che si propaga con velocitá $v = c/n_1$ e la cui ampiezza subisce un'attenuazione esponenziale, cioé:

$$\vec{E}_0' \;=\; \vec{E}_0 e^{-\omega n_2 x/c} \;=\; \vec{E}_0 e^{-\beta x}$$

La grandezza $\beta = \omega n_2/c$ rappresenta il *coefficiente di assorbimento* dell'onda alla frequenza $f = \omega/2\pi$. L'inverso di β, cioé la grandezza $d = c/(\omega n_2)$ é noto come *lunghezza d'attenuazione*. Questa é la distanza nel dielettrico alla quale l'ampiezza del campo elettrico si é ridotta di un fattore e.

Sia la parte reale n_1 dell'indice di rifrazione complesso n che la parte immaginaria n_2 sono funzioni della frequenza angolare ω. Se la quantitá $N|\alpha_d|/\epsilon_0$ é molto minore dell'unitá, l'espressione (27) puó essere sviluppata al primo ordine in tale variabile, ottenendo:

$$n \;\approx\; 1 + \frac{N\alpha_d}{2\epsilon_0}$$

cioé:

$$n_1 \;=\; Re(n) \;=\; 1 + \frac{N(Ze)^2}{2\epsilon_0 m}\,\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$
$$n_2 \;=\; -Im(n) \;=\; \frac{N(Ze)^2}{2\epsilon_0 m}\,\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

L'andamento in funzione di ω, di n_1 ed n_2 quale predetto da queste relazioni, é mostrato in figura 2. Si vede che la parte reale dell'indice di rifrazione, n_1, passa da valori maggiori di 1 a valori minori di 1 quando la pulsazione ω passa per la risonanza ω_0. La regione in cui tale transizione avviene é nota come *regione della dispersione anomala.* Si dicono invece *di dispersione normale* le regioni in cui n_1 ha un andamento crescente. Notiamo che, quando n_1 diviene minore di 1, la velocitá *di fase* dell'onda nel mezzo:

$$v \;=\; \frac{c}{n_1}$$

diviene maggiore di 1. Ció non costituisce una violazione del principio su cui si basa la relativitá, poiché alla velocitá di fase non é associato alcun trasporto di informazione.

In corrispondenza alla frequenza angolare ω_0 la parte immaginaria n_2, e quindi il coefficiente di assorbimento β passa per un massimo, come si vede nella medesima figura.

Il modellino classico descritto, pur dando risultati in ragionevole accordo qualitativo con i dati sperimentali, é stato superato con l'avvento della meccanica quantistica. Esso costituisce tuttavia un utile meccanismo quando ci si voglia fare un'idea intuitiva del comportamento delle onde elettromagnetiche in un dielettrico.

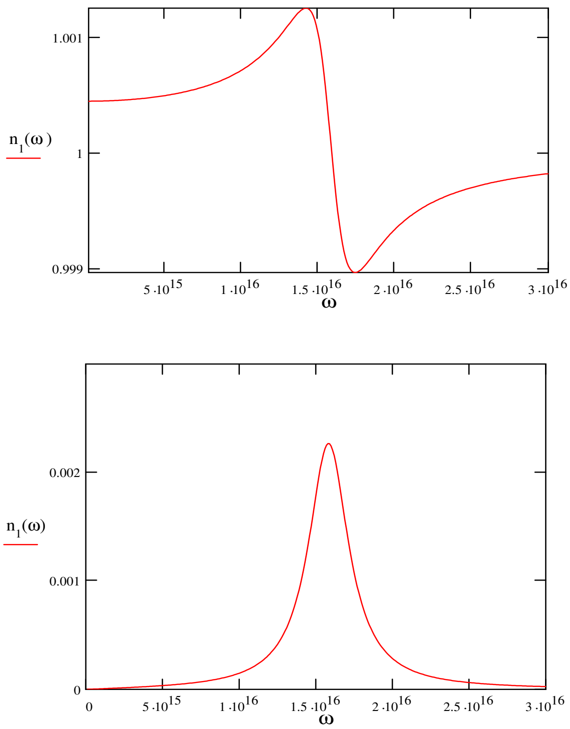

Figura 2:

6 Conduttori

Nel caso dei conduttori, come vedremo, é possibile in molti casi trascurare nell'equazione (26) il termine costante (1) rispetto all'altro. Ció accade se:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

Possiamo vedere che ció equivale a richiedere che nell'equazione di Maxwell (22) che dá il rotore di H, il termine di corrente di spostamento sia trascurabile rispetto a quello di conduzione. Infatti il rapporto dei due termini vale:

$$\frac{J_d}{J} = \frac{\epsilon \partial E/\partial t}{\sigma E}$$

che per un segnale sinusoidale: $E = E_0 exp(i\omega t)$ vale:

$$\frac{J_d}{J} = \frac{\epsilon\omega E}{\sigma E} = \frac{\epsilon\omega}{\sigma}$$

Ad esempio, per il rame ad una frequenza $f = 10^{16} s^{-1}$ avremo:

$$\sigma = 5.8\ 10^7\ S/m$$

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$$

$$\frac{J_d}{J} = \frac{8.85\ 10^{-12}\ 10^{16}\ \ 6.28}{5.8\ 10^7} \approx 0.01$$

Cioé la corrente di spostamento contribuisce per circa 1% per frequenze di $10^{16}s^{-1}$ ed ancor meno a frequenze piú basse.

Nelle ipotesi fatte, dall'equazione (26) otteniamo:

$$k = k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}\,\sqrt{i} \;=\; k_0\sqrt{\frac{\sigma\mu_r}{\omega\epsilon_0}}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Facendo poi uso della relazione: $k_0 \;=\; \frac{\omega}{c}$ da questa si ottiene con facili passaggi:

$$k \;=\; \sqrt{\omega\sigma\mu}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Sostituendo tale espressione di k nell'equazione dell'onda piana:

$$e^{i(kx-\omega t)} \;=\; e^{-i(\omega t)}e^{i\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}\,x}\;e^{-\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}\,x}$$

Ponendo poi:

$$\delta \;=\; \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

l'equazione dell'onda nel conduttore diventa:

$$e^{i(\frac{x}{\delta}-\omega t)}\;e^{-\frac{x}{\delta}} \tag{28}$$

cioé abbiamo un'onda piana, avente modulo del vettore d'onda uguale a $1/\delta$ e che si attenua di un fattore e=2.718 dopo una lunghezza $x = \delta$.

Consideriamo come primo esempio quello del rame, per il quale $\sigma = 5.8\ 10^7 Siemens/m$ e $\mu_r \approx 1$. Ad una frequenza di 60 Hz troviamo:

$$\delta \;=\; \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \;=\; \sqrt{\frac{2}{377\cdot 5.8\ 10^7\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}} \;=\; 0.85\,cm$$

vediamo quindi che un'onda avente una frequenza di 60 Hz é attenuata di un fattore e=2.718 dopo una profonditá di 8.5 mm. Frequenze piú alte sono attenuate ancora di piú. A 60 MHz il campo é ridotto a meno dell'1% ad una profonditá di 0.05 mm.

Osserviamo per inciso che il fenomeno ha un analogo nella conduzione del calore (che é descritta da un'analoga equazione differenziale). In tal caso si nota che le variazioni diurne (alta frequenza) di temperatura non sono apprezzabili sottoterra quanto lo sono le variazioni stagionali (bassa frequenza).

Come il campo, cosí la corrente, ad alte frequenze, é limitata ad un sottile strato superficiale, tanto piú sottile quanto piú é elevata la frequenza (effetto pelle). Ció porta ad una effettiva riduzione della sezione utile dei conduttori e ad un aumento della resistenza.

Se il materiale é ferromagnetico, il parametro μ che compare nell'espressione di δ diverrá μ_r volte piú grande e l'effetto sará ulteriormente accentuato.

Notiamo ancora che la grandezza δ, come é evidente dalla (28) é legata alla lunghezza d'onda nel mezzo dalla relazione:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \;=\; \frac{1}{\delta}$$

da cui, nell'esempio appena considerato, si trova:

$$\lambda \;=\; 5.34\,cm$$

mentre la lunghezza d'onda nel vuoto era:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} \approx 5\,10^6 \ m$$

Nel caso di un conduttore atipico come l'acqua del mare, con $\sigma = 5 \ S/m$ ed alla medesima frequenza, troviamo per la lunghezza d'attenuazione:

$$\delta = 29m$$

Conviene esaminare anche il rapporto tra il vettore elettrico e quello magnetico nel materiale. Dall'equazione di Maxwell per il rotore di E:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

facendo uso dell'onda piana data dalle equazioni (20) e (21), troviamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}) = -\vec{E}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} =$$

$$= -i\vec{E}_0 \times \vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\,\vec{k} \times \vec{E}$$

che deve essere uguale a:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$$

per cui, in definitiva avremo:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\,\vec{B} = \omega\mu\vec{H}$$

Vediamo quindi che anche nel mezzo i vettori $\vec{E}$, $\vec{H}$ ed il vettore d'onda $\vec{k}$ formano una terna ortogonale. Il rapporto tra i moduli di E e di B é pari a ω/k che, come si puó facilmente vedere, vale:

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{\omega}{\sigma\mu}}$$

ed é anche uguale alla velocitá (di fase) di propagazione della radiazione nel mezzo. Nel caso del rame ad una fequenza di 1 MHz troveremmo un rapporto pari a circa 300 m/s. Nel vuoto, alla medesima frequenza, troveremmo un valore pari a c = $310^8 m/s$. Vediamo quindi che nel mezzo considerato, ad 1 MHz, il campo elettrico é ridotto di un fattore 10^6, se rapportato al campo B, rispetto all'analogo valore nel vuoto. Il rapporto tra l'energia magnetica e l'energia elettrica sará:

$$R = \frac{B^2/2\mu}{\epsilon E^2/2} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \approx 10^{12}$$

cioé l'energia é quasi interamente magnetica.

7 Plasmi

Un plasma é un gas ionizzato ed elettricamente neutro: elettroni e nuclei non sono piú legati. Ció accade ad esempio a temperature estremamente elevate, o in presenza di intense sorgenti ionizzanti [1]. É un plasma ad esempio una scintilla, cosí come lo é in larga misura una stella. Un plasma (debolmente ionizzato) é la ionosfera, cioé la zona esterna dell'atmosfera terrestre, situata ad altezze comprese tra circa 100 e 400 km, ionizzata per effetto della radiazione solare.

In un plasma accade che la corrente segua il campo elettrico dell'onda con un'anticipo di fase pari a $\pi/2$; cioé la conducibilitá σ é immaginaria. Vediamo come ció accada.

Consideriamo al solito il caso di un'onda piana, diretta lungo un asse (asse z) e sia il campo elettrico diretto lungo l'asse y. Il campo elettrico dell'onda sia descritto da:

$$E = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

La velocitá raggiunta al tempo t da un elettrone investito dall'onda sará:

$$v = \int a\, dt = \int \frac{e\,E}{m_e}\, dt = \frac{e\,E_0}{m_e} \int e^{i(kz-\omega t)}\, dt =$$

$$= -\frac{e\,E_0}{i\omega m_e}\, e^{i(kz-\omega t)} = -\frac{e\,E}{i\omega m_e}$$

dove con e ed m_e abbiamo indicato la carica e la massa dell'elettrone.

Segue poi per la densitá di corrente $J = \rho v$:

$$J = e\,N\, \frac{ieE}{\omega m_e}$$

dove N é il numero di elettroni per unitá di volume. Si vede quindi che la conducibilitá é data da:

$$\sigma = \frac{J}{E} = \frac{iNe^2}{\omega m_e}$$

che é immaginaria, come anticipato.

Ricordiamo ora la relazione (26):

$$k = k_0\, \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

Possiamo ammettere che in tale espressione sia μ_r che ϵ_r valgano 1, trattandosi di gas a bassa densitá. Sostituendo allora l'espressione trovata per la conducibilitá, troviamo:

$$k = k_0 \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0}}$$

Introduciamo ora la *frequenza di plasma* ω_P:

$$\omega_P^2 = \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}$$

per scrivere il numero d'onda k nella forma semplificata:

$$k \;=\; k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$$

Notiamo che la frequenza di plasma é determinata essenzialmente dalla densitá N di elettroni nel plasma, essendo gli altri parametri che intervengono nella definizione delle costanti universali. Ad esempio, nel caso della ionosfera terrestre, la densitá di elettroni varia tra circa 10^{12} e 10^{13} per m^3, il che implica valori di ω_P compresi tra $5.6\,10^7$ e $1.8\,10^8$ rad/s, cioé valori della variabile $f_P \;=\; \omega_P/2\pi$ compresi tra $8.9\,10^6$ e $2.8\,10^7 s^{-1}$.

Ora possono verificarsi tre casi, a seconda del valore relativo di ω e di ω_P.

a) $\omega \;<\; \omega_P$

In tal caso il radicando é negativo, e k immaginario. Ne segue che l'andamento spaziale dell'ampiezza del campo elettrico sará del tipo:

$$E \;=\; E_0\, e^{-|k|}$$

Ció implica una rapida attenuazione dell'onda che entra nella zona occupata dal plasma. Di fatto l'onda sará riflessa quasi totalmente (visto che nel meccanismo esaminato non intervengono, in prima approssimazione, fenomeni dissipativi). É quel che accade nelle trasmissioni radio in AM, dove si lavora con frequenze tipiche inferiori a qualche MHz. Si é visto infatti che le frequenze di plasma nella ionosfera sono dell'ordine di 10 Mhz. Tale fenomeno consente trasmissioni radio, in tale range di frequenze, a gandi distanze. Che l'onda non perda energia nel plasma é ovvio anche se si pensa che l'energia dissipata per unitá di tempo ed unitá di volume é: $\vec{E} \cdot \vec{J}$ e che $\vec{J} \;=\; \sigma \vec{E}$, con σ immaginario, il che implica un'energia dissipata nulla.

b) $\omega \;=\; \omega_P$

In tal caso avremo $k = 0$ cioé una lunghezza d'onda infinitamente lunga nel plasma.

c) $\omega \;>\; \omega_P$

In tal caso k é reale e minore di k_0. Ció implica una lunghezza d'onda nel plasma (e quindi una velocitá di fase) maggiore di quella nel vuoto.

Notiamo che, fissato N, l'indice di rifrazione n tende ad 1 per $\omega \gg \omega_p$. Se invece fissiamo ω (ad un valore maggiore di ω_p), n diminuisce all'aumentare di N, cioé della densitá elettronica. Numericamente troviamo:

$$\omega_p \;=\; 56.415\,\sqrt{N}$$

$$n \;=\; \sqrt{1 - 3182.7\,N/\omega^2}$$

Per $\omega < \omega_p$ l'onda é riflessa qualunque sia l'angolo d'incidenza.
Se invece $\omega > \omega_p$, n é reale e minore di 1 ed avremo quindi, indicando con i l'angolo d'incidenza dell'onda sulla superficie del plasma e con r l'angolo di rifrazione:

$$\sin i \;=\; n\, \sin r$$

con $n < 1$; da cui:

$$\sin i_{max} \;=\; n \;=\; \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}}$$

e quindi anche:

$$\cos i_{max} \;=\; \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e\epsilon_0\omega^2}}$$

La parte dell'atmosfera situata ad altezze superiori a circa 60 km é interessata da fenomeni rilevanti per la fisica dei plasmi e per le trasmissioni radio.

Infatti, la parte esterna dell'atmosfera terrestre é investita dalla radiazione solare con una intensitá (potenza per unitá di superficie) di circa 1370 $Watt/m^2$ (tale valore é noto come la costante solare). Tale radiazione copre un'ampio spettro di frequenze, che va dalle onde radio, all'infrasso ed arriva fino all'ultravioletto (uv). La radiazione uv, e quella a frequenze ancora piú elevate, ha un'energia sufficiente a ionizzare le molecole di gas incontrate. Nelle parti piú esterne dell'atmosfera l'intensitá della radiazione é molto elevata, ma la densitá del gas é ridotta, quindi la ionizzazione non é molto elevata. Via via che l'altezza diminuisce, la densitá dei gas aumenta e quindi aumenta anche la ionizzazione. Tuttavia tale aumento é compensato da un parallelo aumento della ricombinazione tra ioni ed elettroni, dovuto all'aumento della densitá e quindi ad una diminuzione del cammino libero medio degli elettroni tra una collisione e la successiva. La densitá del plasma ad una data altezza é quindi determinata dal bilanciamento tra i processi di ionizzazione e ricombinazione.

Ad altezze ancora minori, la densitá di atomi e molecole aumenta ulteriormente, ma in parallelo diminuisce l'intensitá della radiazione che vi arriva, a causa dell'assorbimento negli strati piú alti dell'atmosfera. Si raggiunge infine un punto in cui la ridotta intensitá della radiazione, la maggiore densitá del gas e l'accresciuto rate di ricombinazione si fanno equilibrio, e la densitá del plasma comincia a diminuire con il diminuire dell'altezza. Si formano cosí della fascie, situate a varie altezze, cui corrispondono densitá ioniche diverse. Queste fasce vanno sotto il nome di strati di Heaviside e, a seconda della relativa densitá di ionizzazione, sono classificati con le sigle D, E, F1, F2 e G.

Lo strato D si estende da 60 a 90 km di altezza. Esso fu scoperto casualmente, quando ci si rese conto che emissioni radio dall'europa potevano esser rivelate negli Stati Uniti. Ci si rese allora conto che doveva esistere una qualche riflessione. Fu appunto Oliver Heaviside (e simultaneamente l'ingegnere elettronico americano Arthur Kennelly) a postulare l'esistenza di uno strato riflettente situato nella stratosfera.

Nel 1912 uno degli ex assistenti di Marconi, William Eccles, che aveva collaborato con Marconi alla preparazione della prima trasmissione radio intercontinentale, elaboró la teoria che spiegava come uno strato di gas ionizzato potesse svolgere tale ruolo. Nel 1924 Edward Appleton dimostró la fondatezza di tale teoria, quando egli scoprí la ionosfera. Lo strato E é quello cui corrisponde la riflessione di onde corte. Esso si estende da 90 a 140 km di altezza. Gli strati F1 ed F2 sono quelli dove la densitá di ioni é maggiore. Essi si estendono da 140 a 1000 km. Il massimo della densitá ionica é raggiunto ad altezze comprese tra 200 e 500 km, dove la densitá varia tra $4\ 10^{10}$ e $4\ 10^{12}$ m^{-3}, che corrisponde a valori della frequenza di plasma ω_p compresi tra 1.8 e 18 MHz. La figura mostra l'andamento della densitá ionica in funzione dell'altezza. Le onde radio sono totalmente riflesse per frequenze inferiori alla frequenza di plasma (o frequenza critica). La riflessione puó anche aver luogo per frequenze piú elevate, se le onde incidono sulla ionosfera a grandi angoli. Ovviamente, le tasmissioni radio a lunga distanza sulla Terra debbono far uso di

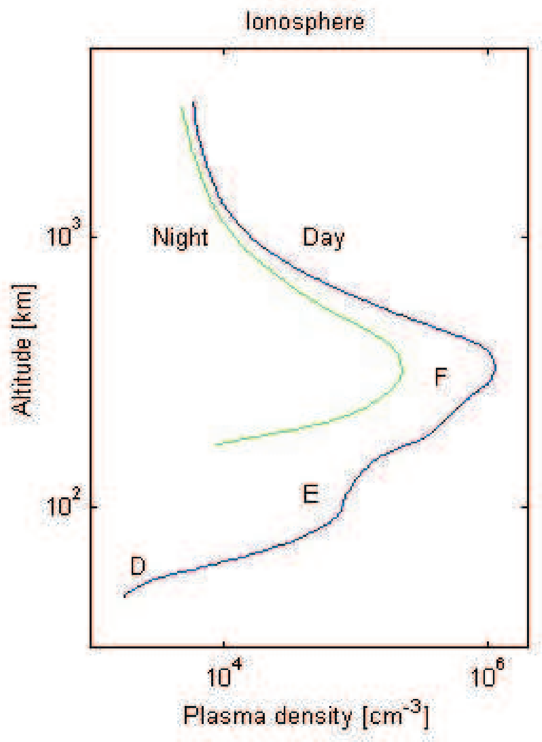

Figura 3:

frequenze inferiori a quella critica, mentre la radioastronomia e le comunicazioni via satellite possono essere effettuate solo a frequenze tali da riuscire ad attraversare la ionosfera.

Riferimenti bibliografici

[1] Per una discussione piú approfondita delle proprietá dei plasmi, di quel che non sia possibile quí, si veda a pag. 554 del volume 3 (Elettricitá) di D. V. Sivuchin.