Simmetrie ed invarianze per $\vec{E}$ e $\vec{B}$

1 Campo elettrico $\vec{E}$

Sia $\rho(\vec{r})$ la densità di carica nel punto $\vec{r} = (x, y, z)$ e sia $\vec{E}(\vec{r})$ il campo generato da essa in $\vec{r}$.

Consideriamo la seguente trasformazione (*di simmetria*) T:

$$\begin{aligned} \vec{r} \to \vec{r'} &= T(\vec{r}) = \vec{R} \cdot \vec{r} + \vec{a} \\ r_i \to r'_i &= R_{i,j} r_j + a_i \end{aligned}$$

Consideriamo ora la distribuzione ρ' ottenuta trasformando *rigidamente* ρ secondo T:

$$\rho'(\vec{r'}) = \rho(\vec{r}) \tag{1}$$

Esempio: Rotazione antioraria di 180^o attorno all'asse z:

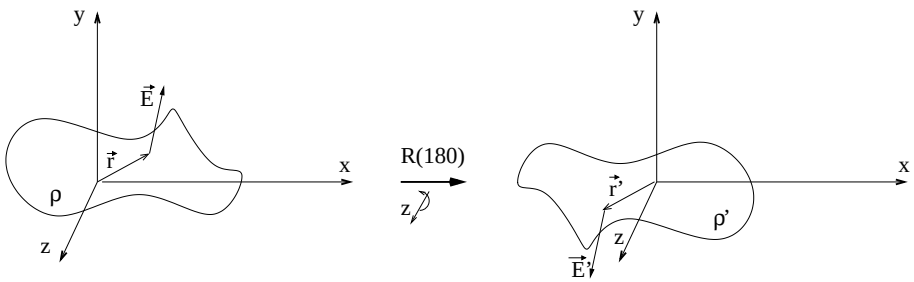

Figure 1:

Sia $\vec{E}'(\vec{r'})$ il campo generato da ρ' nel punto $(\vec{r'})$. Allora, si può verificare che:

$$E'_i(\vec{r'}) = R_{i,j} E_j(\vec{r}) \tag{2}$$

ossia il campo $E'_i(\vec{r'})$ si ottiene trasformando (ad esempio ruotando, traslando) il campo $E_i(\vec{r})$. Questa proprietà si basa sul concetto di isotropia ed omogenità dello spazio, ossia lo spazio manifesta le stesse proprietà indipendentemente dal punto scelto per l'osservazione.

Esempi di Trasformazioni

- Traslazione $\vec{r} \to \vec{r'} = \vec{r} + \vec{a}$. Allora:

$$\vec{E}'(\vec{r'}) = \vec{E}(\vec{r}) \tag{3}$$

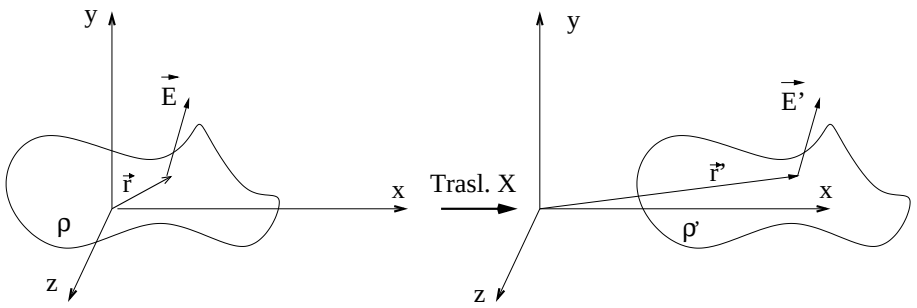

Figure 2:

Ad esempio, per traslazioni rispetto all'asse x (vedi figura 2):

$$\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow \vec{r'} = (x + a, y, z)$$
$$\vec{E}'(x + a, y, z) = \vec{E}(x, y, z)$$

- Rotazione $r_i \rightarrow r'_i = R_{i,j} r_j$. Allora (vedi figura 1) :

$$E'_i(\vec{r'}) = R_{i,j} E_j(\vec{r}) \tag{4}$$

- Riflessione rispetto ad un piano (ad esempio (x,y)):

$$\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow \vec{r'} = (x, y, -z)$$

Allora (vedi figura 3):

$$\begin{aligned} E'_x(x, y, -z) &= E_x(x, y, z) \\ E'_y(x, y, -z) &= E_y(x, y, z) \\ E'_z(x, y, -z) &= -E_z(x, y, z) \end{aligned}$$

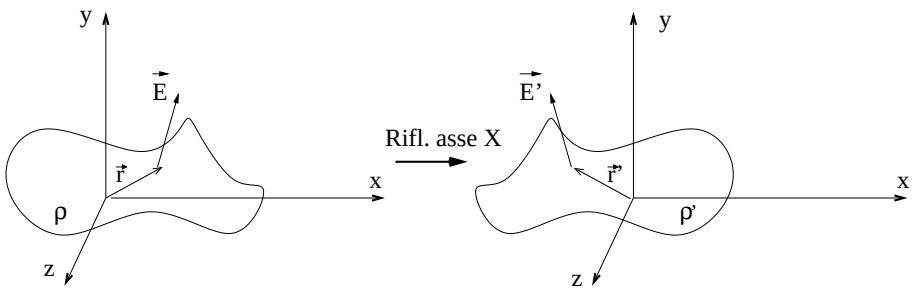

Figure 3:

Più generalmente le componenti del campo elettrico perpendicolari al piano cambiano segno, mentre quelle parallele rimangono inalterate.

Se la densità di carica rimane invariata per la trasformazione in oggetto:

$$\rho(\vec{r'}) = \rho(\vec{r})$$

allora si parla di **invarianza** per la sorgente e vale:

$$E_i(\vec{r'}) = R_{i,j}E_j(\vec{r}) \tag{5}$$

ossia se la densità di carica è invariante per una certa trasformazione (isometrica), anche il campo elettrico, pensato come entità rigida rimane invariato per la stessa trasformazione, ossia valgono le seguenti proprietà:

- Invarianza per traslazione ($\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow \vec{r'} = (x + a, y, z)$):

$$\vec{E}(x + a, y, z) = \vec{E}(x, y, z)$$

- Invarianza per rotazione($r_i \rightarrow r'_i = R_{i,j}r_j$)

$$E_i(\vec{r'})R_{i,j}E_j(\vec{r})$$

- Invarianza per riflessione rispetto ad un piano (ad esempio (x,y)): ($\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow \vec{r'} = (x, y, -z)$):

$$\begin{aligned} E_x(x, y, -z) &= E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, -z) &= E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, -z) &= -E_z(x, y, z) \end{aligned}$$

Da quest'ultima proprietà risulta inoltre che il campo elettrico nel piano in cui c'e' invarianza per riflessione (laddove esiste) ha solo componenti parallele al piano (la riflessione rispetto al piano manda ogni punto del piano in se stesso).

2 Campo Magnetico $\vec{B}$

Per quanto riguarda le leggi di trasformazione sotto traslazione e rotazione $\vec{B}$ si comporta esattamente come $\vec{E}$, ossia:

- Invarianza per traslazione ($\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow \vec{r'} = (x + a, y, z)$):

$$\begin{aligned} \vec{j}(x + a, y, z) &= \vec{j}(x, y, z) \\ \vec{B}(x + a, y, z) &= \vec{B}(x, y, z) \end{aligned}$$

- Invarianza per rotazione($r_i \rightarrow r'_i = R_{i,j}r_j$) :

$$\begin{aligned} j_i(\vec{r'}) &= R_{i,j}j_j(\vec{r}) \\ B_i(\vec{r'}) &= R_{i,j}B_j(\vec{r}) \end{aligned}$$

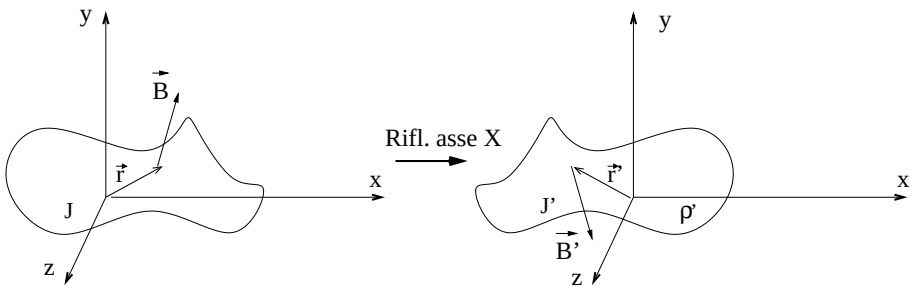

Figure 4:

Per quanto riguarda la riflessione rispetto ad un piano $\vec{B}$ si comporta in modo opposto rispetto ad $\vec{E}$ (figura 4), ossia se la densità di corrente è invariante per riflessione (rispetto al piano (x,y)), allora le componenti di $\vec{B}$ parallele al piano cambiano di segno, mentre quelle perpendicolari rimangono inalterate :

- Invarianza per riflessione rispetto ad un piano (ad esempio (x,y)): ($\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow \vec{r'} = (x, y, -z)$):

$$\begin{aligned} \vec{j}(x, y, -z) &= \vec{j}(x, y, z) \\ B_x(x, y, -z) &= -B_x(x, y, z) \\ B_y(x, y, -z) &= -B_y(x, y, z) \\ B_z(x, y, -z) &= B_z(x, y, z) \end{aligned}$$

  In questo caso, nel piano considerato, se $\vec{B}$ è diverso da zero, allora è diretto perpendicolarmente ad esso.