Prima prova del corso di Fisica Generale IIB – 8/4/2002

Esercizio 1

Sia dato un condensatore cilindrico di lunghezza L, raggio interno a e raggio esterno b, con $L >> a, b$. Tra le due armature poste a differenza di potenziale V, vi è un mezzo di costante dielettrica ϵ_0 e conduttività $\sigma = \sigma_a \cdot (a/r)^2$. Si calcoli in condizioni di stazionarietà :

- il campo elettrico ovunque;
- la resistenza del condensatore;
- la densità di carica libera di volume e di superficie.

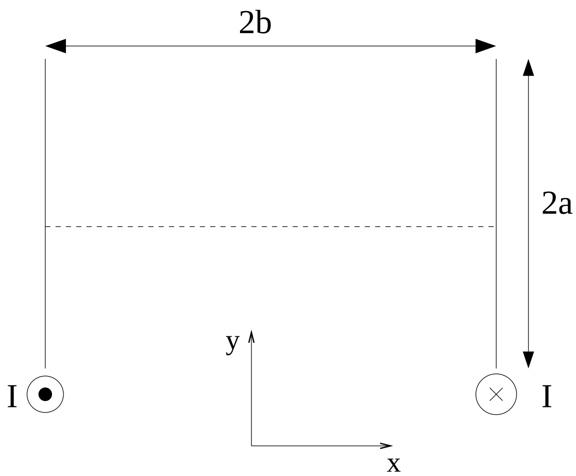
Esercizio 2

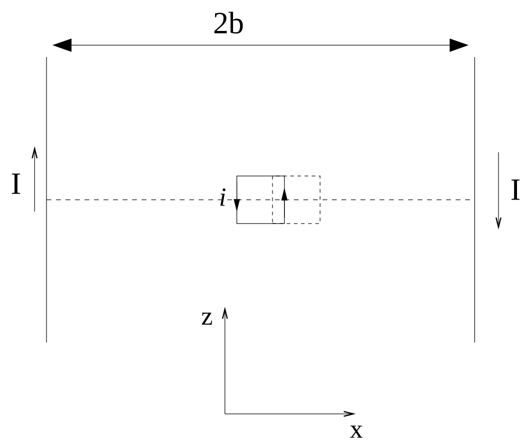
Siano dati due nastri conduttori di lunghezza indefinita, larghezza $2a$ e spessore trascurabile, disposti parallelelamente a distanza $2b$. La loro resistenza elettrica sia trascurabile. Una corrente uniforme e costante di modulo I scorre come disegnato in figura (sinistra).

- si calcoli il campo di induzione magnetica in ogni punto del piano mediano perpendicolare ai nastri di corrente;

Una spira quadrata di massa M e lato $2d$, percorsa da una corrente costante i che scorre come disegnato in figura (destra), di resistenza trascurabile, viene posta tra i due nastri di corrente come disegnato in figura (destra). La spira è vincolata a muoversi lungo l'asse x e le sue dimensioni sono tali che $b, a >> d$.

- si calcoli la forza che la spira risente in una posizione generica tra i due nastri;
- si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni della spira per oscillazioni lungo l'asse x intorno alla posizione di equilibrio, nel limite $b >> a$.





Soluzione

Esercizio 1 - Metodo I

Data la simmetria del problema il campo elettrico è radiale ed indipendente da z (coordinata lungo lasse del cilindro). Applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica concentrica al condensatore con raggio $r < a$ si dimostra che il campo elettrico é nullo per $r < a$. Inoltre siccome si ha induzione totale la carica totale all'interno del condensatore è nulla ed anche il campo elettrico per $r > b$ è nullo. Se si indica con λ_i la densità di carica lineare disposta sul cilindro interno, il campo elettrico sulla superficie della armatura interna, $r = a$ vale :

$$\vec{E}(a) = \frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0 a}\hat{r} \tag{1}$$

Consideriamo ora una superficie cilindrica di raggio r e altezza Δz ed utilizziando la condizione di stazionarietà della corrente imponiamo che il flusso della densità di corrente $\vec{J}$ sia nullo :

$$J(a)2\pi a\Delta z = J(r)2\pi r\Delta z \quad \rightarrow \quad \sigma(a)E(a)2\pi a\Delta z = \sigma(r)E(r)2\pi a\Delta z \tag{2}$$

quindi si ottiene :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0 a^2}\vec{r} \tag{3}$$

La corrente è quindi data dal flusso della densità di corrente attraverso una superficie cilindrica :

$$i = \sigma(a)E(a)2\pi aL = \frac{\sigma_a\lambda_i L}{\epsilon_0} \tag{4}$$

La differenza di potenziale è data da :

$$V(a) - V(b) = V = \int_a^b E(r)dr \quad \rightarrow \quad V = \frac{\lambda_i}{4\pi\epsilon_0 a^2}(b^2 - a^2) \tag{5}$$

da cui si può ricavare λ_i, quindi il campo elettrico é dato da :

$$\vec{E}(r) = \frac{2V}{(b^2 - a^2)}\vec{r} \tag{6}$$

La resistenza a questo punto può essere ricavata come :

$$R = \frac{V}{i} = \frac{b^2 - a^2}{4\pi\sigma_a L a^2} \tag{7}$$

Alternativamente si può ottenere la resistenza come resistenza equivalente di cilindri di raggio dr e lunghezza L connessi in serie :

$$R = \int_a^b \frac{\rho_a r^2}{a^2 2\pi r L} dr = \frac{1}{\sigma_a 2\pi L a^2} \int_a^b r dr = \frac{b^2 - a^2}{\sigma_a 4\pi L a^2} \tag{8}$$

La densità di carica libera di volume è :

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} = \frac{2V\epsilon_0}{(b^2 - a^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 = \frac{4V\epsilon_0}{(b^2 - a^2)} \tag{9}$$

La densità di carica superficiale sul cilindro esterno è dato da :

$$\lambda_e = -\epsilon_0 E(b) = -\frac{2V\epsilon_0}{(b^2 - a^2)} b \tag{10}$$

Esercizio 1 - Metodo II

Lo stesso esercizio può essere risolto in modo alternativo utilizzando il procedimento descritto qui di sguito. Indichiamo con $J(r)$ la densità di corrente, con $E(r)$ il campo e con $\rho(r)$ la densità di carica di volume. Le equazioni da soddisfare sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{11}$$

$$\vec{J} = \sigma(r) \vec{E}$$

Inoltre, l'equazione di continuità, in condizioni stazionarie ($\rho(t) = costante$) fornisce:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Poichè il problema ha simmetria cilindrica, nell'espressione della divergenza rimane solo il termine radiale. Le ultime due equazioni scritte danno allora:

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma \vec{E} = 0$$

cioè:

$$\frac{1}{r} \left(\sigma(r) E(r) + r \frac{\partial(\sigma(r) E(r))}{\partial r} \right) = 0$$

Sostituendo in questa l'espressione data per $\sigma(r)$ ed effettuando le derivate, si trova:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 E(r) + r \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 E(r) \right] = 0$$

da cui si ottiene:

$$-E(r) + r \frac{\partial E(r)}{\partial r} = 0$$

La cui soluzione è:

$$E(r) = Kr$$

con k una costante da determinare imponendo che la differenza di potenziale tra le armature sia quella data (V).

$$\int_a^b E(r) dr = V$$

da cui:

$$K\frac{b^2 - a^2}{2} = V$$

cioè:

$$K = \frac{2V}{b^2 - a^2}$$

La densità di carica $\rho(r)$ può ora esser ottenuta dall'equazione 11:

$$E(r) + r\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{r\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Sostituendo in questa l'espressione ricavata per $E(r)$ si trova poi:

$$2Kr = \frac{r}{\epsilon_0}\rho(r)$$

da cui:

$$\rho(r) = 2K\epsilon_0 = 4\epsilon_0\frac{V}{b^2 - a^2}$$

La corrente totale I si ottiene integrando J (data da $\sigma(r)E(r)$) su di una superficie cilindrica di raggio r ed altezza L:

$$I = 2\pi rLJ = \sigma_a\frac{a^2}{b^2 - a^2}4\pi LV$$

da cui si ottiene la resistenza:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{b^2 - a^2}{a^2}\frac{1}{4\pi L\sigma_a}$$

La densità di carica di volume è quindi costante ed uguale a ρ. Quella di superficie è data dal valore di $\epsilon_0 E(r)$ sulle superfici delle armature.

Esercizio 2

Data la simmetria del problema il campo di induzione magnetica può avere solo componente lungo y (vedi figura , sinistra) . Il campo si può calcolare come somma sovrapposizione del campo dei due nastri. Per calcolare il campo di un nastro considero i contributi infinitesimi del campo generato da fili percorsi da corrente di (figura1) :

$$dB_{nastro} = \frac{\mu_0 cos\theta}{2\pi r}di \tag{12}$$

dove $di = Jdy$ e J è la densità di corrente che è data da $J = I/2a$. Poichè :

$$y = xtg\theta \quad \rightarrow \quad dy = x\cos^2\theta d\theta \tag{13}$$

$$r = \frac{x}{cos\theta} \tag{14}$$

sostituendo ed integrando si ottiene :

$$B_{nastro} = 2\int_0^a \frac{\mu_0 J}{2\pi x}cos^2\theta dy = 2\int_0^{atan\frac{a}{x}} \frac{\mu_0 J}{2\pi}d\theta = \frac{\mu_0 J}{\pi}atan\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}atan\left(\frac{a}{x}\right) \tag{15}$$

Quindi il campo totale generato dai due nastri di corrente nella parte di piano contentuta all'interno dei nastri stessi è dato da :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(atan\left(\frac{a}{x}\right) + atan\left(\frac{a}{2b - x}\right)\right)\hat{y} \tag{16}$$

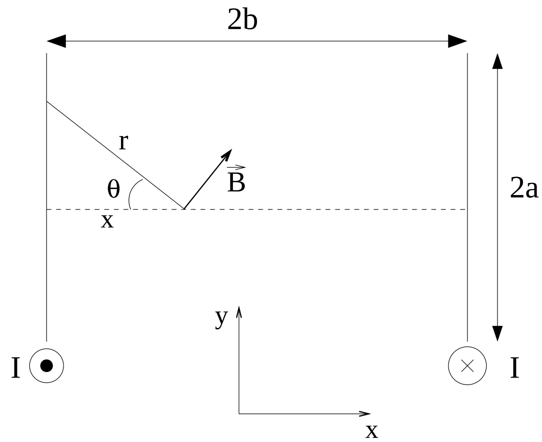


Figure 1:

Il campo generato esternamente ai due nastri si calcola in modo analogo tenedo conto che la direzione del campo generato da ogni nastro cambia direzione nell'attraversare il nastro stesso.

Se si considera una spira che può traslare lungo la direzione x si può calcolare la forza come :

$$\vec{F} = \vec{m}\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\hat{x} \tag{17}$$

dove $\vec{m} = -4d^2 i\hat{y}$. Il campo B può essere riscritto in funzione della distanza δ dal centro dei due nastri :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(atan\left(\frac{a}{b+\delta}\right) + atan\left(\frac{a}{b-\delta}\right)\right)\hat{y} \tag{18}$$

la forza risentita dalla spira è data da :

$$F_x = -m\frac{\partial B}{\partial \delta} = -\frac{m\mu_0 I}{2\pi a}\left[\frac{1}{(b-\delta)^2 + a^2} - \frac{1}{(b+\delta)^2 + a^2}\right] \tag{19}$$

si vede che per $\delta = 0$ si ha $F_x = 0$. Nell'approssimazione $b >> a$ e $b >> d$ si ha :

$$F_x \simeq -\frac{m\mu_0 I}{2\pi b^2}\left(\frac{1}{1-\frac{2\delta}{b}} - \frac{1}{1+\frac{2\delta}{b}}\right) \simeq -\frac{m\mu_0 I}{2\pi}\frac{4\delta}{b^3} \tag{20}$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è quindi :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi M b^3}{m\mu_0 I 2}} \tag{21}$$