

Corso di Fisica bI: secondo compitino

9 Gennaio 2001

1 Elettrostatica in presenza di conduttori

Due sfere conduttrici di raggi R_1 e R_2 , unite da un sottile filo conduttore, sono poste a distanza $L \gg R_1, R_2$. La sfera 1 è connessa ad un generatore di tensione V_0 .

- Si calcolino le distribuzioni di carica sulle superfici delle due sfere all'equilibrio.

Il generatore viene ora disconnesso ed una carica q è posta a distanza d_1 (con $d_1 \ll L$) dal centro della sfera 1 (Figura 1).

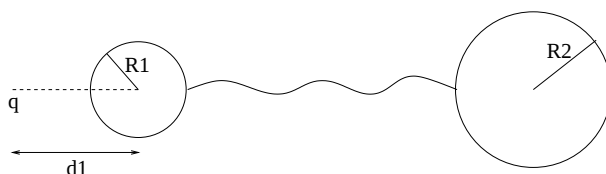


Figura 1:

- Si calcolino, in questa nuova situazione, le cariche immagini che darebbero origine ad un potenziale uguale a quello reale.

Un dipolo è ora posto a distanza d_2 dalla sfera 2. L'orientazione del dipolo è ortogonale alla congiungente il centro della sfera con il dipolo (Figura 2).

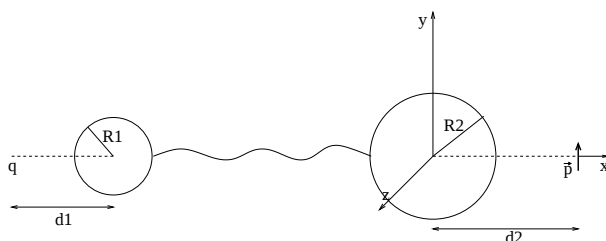


Figura 2:

- Si trovino le cariche immagini equivalenti a questa nuova configurazione;
- Si determini la forza ed il momento risentito dal dipolo. Si calcoli il momento prendendo come polo il punto in cui si trova il dipolo stesso.

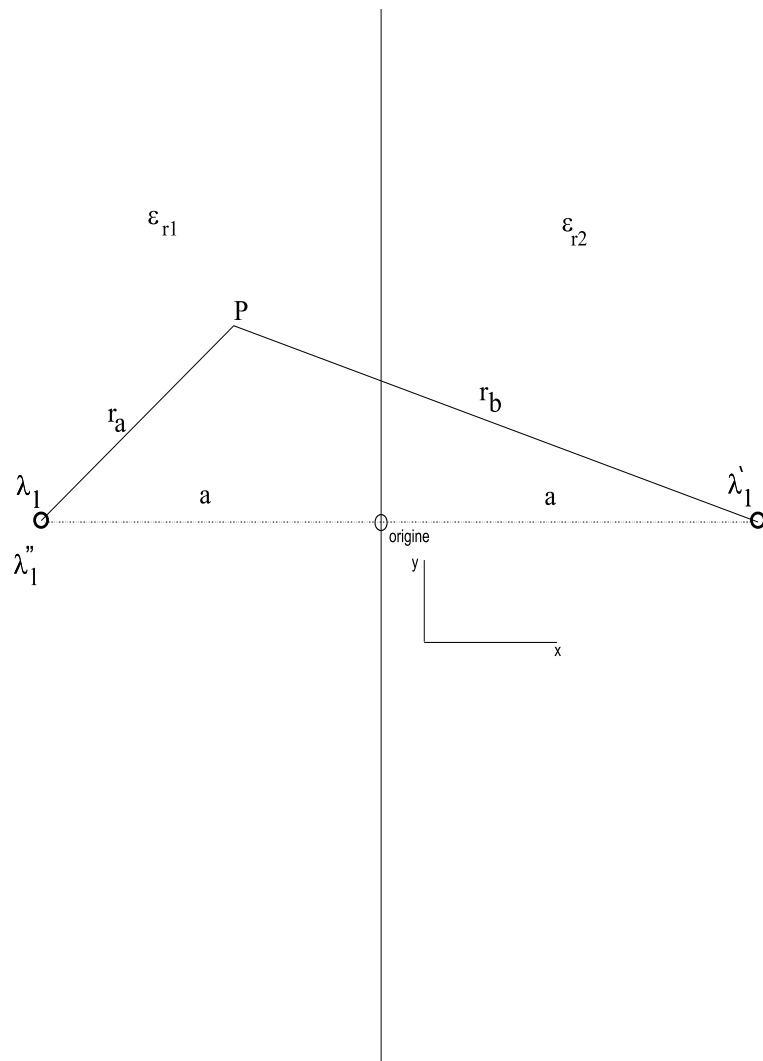


Figura 3:

2 Elettrostatica in presenza di dielettrici

Una distribuzione lineare di carica, di valore λ_l , é posta in un mezzo di costante dielettrica ϵ_{r1} , parallelamente ad un piano che separa tale mezzo da un secondo di costante dielettrica ϵ_{r2} ed ad una distanza a da tale piano (vedi figura 3).

Supponendo entrambi i mezzi di estensione (semi)infinita e la distribuzione lineare infinitamente lunga, si calcolino:

- a** i potenziali nei due mezzi
- b** il campo elettrico sulla superficie di separazione in entrambi i mezzi, in funzione della coordinata y (vedi figura)
- c** la densità superficiale delle cariche di polarizzazione in funzione della medesima variabile
- d** la forza per unità di lunghezza agente sulla linea

Suggerimento: Si può procedere facendo uso del metodo delle immagini, in modo analogo al caso del problema di una carica puntiforme posta di fronte ad un piano dielettrico infinito.

Soluzione esercizio 1

Le due sfere sono allo stesso potenziale V_0 e poichè sono poste a distanza $L \gg R_1, R_2$ è lecito trascurare gli effetti di induzione, per cui:

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = V_0 \quad (1)$$

da cui si ottiene :

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 V_0 R_1 \quad Q_2 = 4\pi\epsilon_0 V_0 R_2 \quad (2)$$

Le cariche Q_1 e Q_2 sono distribuite uniformemente sulle superfici delle due sfere.

Quando il generatore di tensione viene disconnesso e la carica q avvicinata alla sfera 1, la condizione che dovrà essere soddisfatta è che la carica totale dell'insieme delle due sfere rimanga uguale a Q_0 :

$$Q_0 = Q'_1 + Q'_2 \quad (3)$$

dove Q'_1 e Q'_2 sono le nuove cariche sulle sfere.

Il potenziale della configurazione mostrata in figura 1 può essere ottenuto con il metodo delle cariche immagine. Una carica immagine $q_{i1} = -qR_1/d_1$ è posta a sinistra del centro della sfera di raggio R_1 , a distanza da questo data da: $x_{i1} = R_1^2/d_1$.

Infatti, il potenziale generato dalla carica q_{i1} e dalla carica q ha come superficie equipotenziale a potenziale nullo, la sfera di raggio R_1 e centro coincidente con quello della sfera 1. Le condizioni al contorno da imporre sono quella che:

1. La somma delle cariche Q'_1 e Q'_2 sia uguale a Q_0
2. I potenziali delle due sfere siano uguali.

Avendo introdotto la carica immagine q_{i1} all'interno della sfera 1 e nessuna carica immagine all'interno della sfera 2, dobbiamo introdurre due ulteriori cariche q'_{i1} e q'_{i2} , poste rispettivamente al centro delle sfere 1 e 2, tali che la carica della sfera 1 sia uguale a Q'_1 , quella della sfera 2 a Q'_2 e che le due sfere siano allo stesso potenziale. Le cariche saranno legate dalle relazioni:

$$Q'_1 = q_{i1} + q'_{i1} \quad (4)$$

$$Q'_2 = q'_{i2} \quad (5)$$

$$Q_0 = Q'_1 + Q'_2 \quad (6)$$

$$(7)$$

cioè:

$$Q_0 = q_{i1} + q'_{i1} + q'_{i2}$$

La condizione di uguaglianza dei potenziali si traduce in:

$$\frac{q'_{i1}}{R_1} = \frac{q'_{i2}}{R_2}$$

Da queste equazioni si ottiene:

$$q'_{i_1} = \frac{(Q_0 - q_{i_1})R_1}{R_1 + R_2} \quad (8)$$

$$q'_{2_1} = \frac{(Q_0 - q_{i_1})R_2}{R_1 + R_2} \quad (9)$$

Le nuove cariche Q'_1 e Q'_2 delle due sfere sono facilmente ottenibili da queste equazioni:

$$Q'_1 = q_{i_1} + q'_{i_1} = -q \frac{R_1}{d_1} + R_1 \frac{Q_0 + qR_1/d_1}{R_1 + R_2}$$

cioé:

$$\begin{aligned} Q'_1 &= Q_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{q}{d_1} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \\ &= Q_1 + q_{i_1} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

ed ovviamente:

$$Q'_2 = Q_2 - q_{i_1} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Consideriamo ora la configurazione in cui il dipolo è posto davanti alla sfera 2. Esso può essere visto come due cariche $\pm q_p$ poste a distanza a . Le due cariche immagini delle cariche q_p sono poste sulle rette che congiungono rispettivamente la carica $+q_d$ e quella $-q_d$ con il centro della sfera.

Indichiamo rispettivamente con $q_{i_d}^+$ e $q_{i_d}^-$ le cariche immagini di quelle $+q_d$ e $-q_d$ del dipolo. Queste sono poste in due punti le cui distanze $A^\pm$ dal centro della sfera sono:

$$A^+ = \frac{R_2^2}{\sqrt{d_2^2 + (\frac{a}{2})^2 - 2\frac{a}{2}d_2 \cos \alpha}} \simeq \frac{R_2^2}{d_2} \left(1 + \frac{a}{2d_2} \cos \alpha\right) \quad (10)$$

$$A^- = \frac{R_2^2}{\sqrt{d_2^2 + (\frac{a}{2})^2 + 2\frac{a}{2}d_2 \cos \alpha}} \simeq \frac{R_2^2}{d_2} \left(1 - \frac{a}{2d_2} \cos \alpha\right) \quad (11)$$

dove α è il supplemento dell'angolo che il dipolo forma con l'asse delle x (asse che passa per il centro delle due sfere e per il dipolo, come mostrato in figura 4).

Per $\alpha = \pi/2$ otteniamo:

$$A^+ = A^- = \frac{R_2^2}{d_2}$$

ed inoltre avremo $q_{i_d}^+ = q_{i_d}^- = q_{i_d}$.

Indicando poi con β l'angolo che la congiungente la carica positiva ed il centro della sfera 2 forma con l'asse x (vedi figura), otteniamo (sempre per $\alpha = \pi/2$):

$$\cos \beta \simeq 1$$

$$\sin \beta \simeq \frac{a}{2d_2}$$

Per cui le componenti x ed y di A^+ ed A^- sono:

$$A_x^+ = A^+ \cos \beta = \frac{R_2^2}{d_2} \quad (12)$$

$$A_y^+ = A^+ \sin \beta = \frac{R_2^2 a}{2d_2^2} \quad (13)$$

$$A_x^- = A^- \cos \beta = \frac{R_2^2}{d_2} \quad (14)$$

$$A_y^- = -A^- \sin \beta = -\frac{R_2^2 a}{2d_2^2} \quad (15)$$

Le due cariche immagini sono:

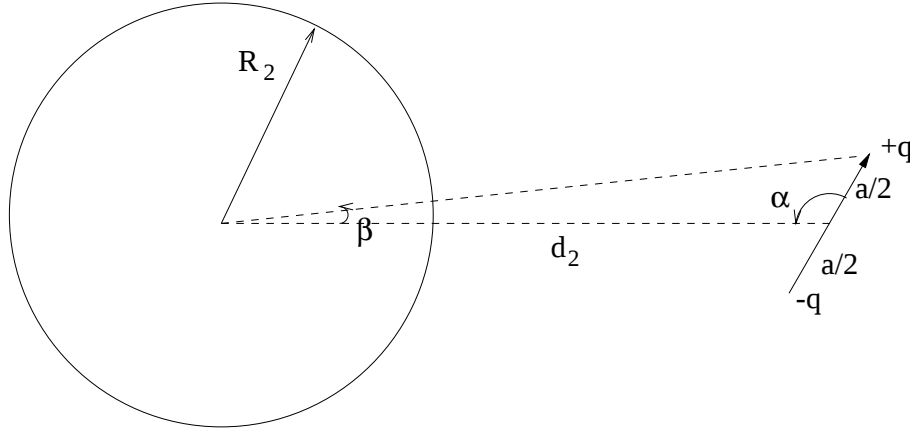


Figura 4:

$$q_{i_p} = \pm \frac{q_p R_2}{d_2} \quad (16)$$

La distanza tra le due cariche $\pm q_p$, immagini di quelle del dipolo, é:

$$a_i = \frac{R_2^2 a}{d_2^2} \quad (17)$$

Le due cariche immagini corrispondono a una carica immagine totale nulla e ad un dipolo immagine pari a :

$$\vec{p}_i = -\frac{p R_2^3}{d_2^3} \hat{y} \quad (18)$$

posto a destra del centro della sfera 2, ad una distanza da essa data da:

$$x_{p_i} = \frac{R_2^2}{d_2} \quad (19)$$

Tale dipolo immagine, insieme al dipolo $\vec{p}$, alla carica q ed alla sua immagine q_{i_1} , generano un potenziale che ha come superfici equipotenziali a potenziale nullo le superfici sferiche 1 e 2.

La soluzione sarà determinata, come nel caso precedente, imponendo le condizioni al contorno :

$$q_{i_1} + q'_{i_1} + q'_{i_2} = Q_0 \quad (20)$$

$$\frac{q'_{i_1}}{R_1} = \frac{q'_{i_2}}{R_2} \quad (21)$$

da cui si ottiene di nuovo :

$$q'_{i_1} = \frac{(Q_0 - q_{i_1})R_1}{R_1 + R_2} \quad (22)$$

$$q'_{i_2} = \frac{(Q_0 - q_{i_1})R_2}{R_1 + R_2} \quad (23)$$

dato che il dipolo immagine posto entro la sfera 2 ha carica totale nulla.

La forza agente sul dipolo ha due origini: la forza $\vec{F}_q$ dovuta all'interazione tra la carica q'_{i_2} ed il dipolo e quella $\vec{F}_p$ dovuta all'interazione tra i due dipoli. La forza esercitata da un campo $\vec{E}$ su di un dipolo $\vec{p}$ è data da :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{E} \quad (24)$$

Il campo generato dalla carica q'_{i_2} nel generico punto di coordinata $\vec{r}$ rispetto all'origine della sfera 2é:

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q'_{i_2} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Per cui la forza che questo esercita sul dipolo é:

$$\begin{aligned} \vec{F}_q &= \left(p_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{E}_q = p_y \frac{q'_{i_2}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{r^3} \right]_{y=z=0, x=d_2} = \\ &= p_y \frac{q'_{i_2}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r^3\hat{y} - 3ry\vec{r}}{r^6} \right]_{y=z=0, x=d_2} = p_y \frac{q'_{i_2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y}}{d_2^3} \end{aligned}$$

Analogamente troviamo:

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(3 \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{r}}{r^5} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p}_i}{r^3} \right]$$

Cioé:

$$E_{px} = \frac{3xy p_{iy}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$E_{py} = p_{iy} \frac{3y^2 - r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$E_{pz} = \frac{3zy p_{iy}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

Per cui:

$$\vec{F}_p = \frac{3p_y p_{iy}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{xy\hat{x} + (3y^2 - r^2)\hat{y} + zy\hat{z}}{r^5} \right]_{y=z=0, x=d_2-x_{pi}} = \frac{3p_y p_{iy}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^4} \hat{x}$$

E quindi:

$$\vec{F}_p = -\frac{3pp_i}{4\pi\epsilon_0(d_2 - x_{p_i})^4}\hat{x}$$

Il momento della forza che agisce su un dipolo posto in un campo esterno calcolato rispetto ad un polo coincidente con la posizione del dipolo è dato da :

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (25)$$

anche per il momento si hanno due contributi, dovuto il primo ($\vec{M}_q$) al campo generato dalla carica q'_{i_2} e l'altro ($\vec{M}_p$) al campo generato dal dipolo-immagine $\vec{p}_i$:

$$\vec{M}_q = -\frac{pq'_{i_2}}{4\pi\epsilon_0 d_2^2}\hat{z} \quad (26)$$

$$\vec{M}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0(d_2 - x_{p_i})^3}[3(\vec{p}_i \cdot \hat{x})(\vec{p} \times \hat{x}) - (\vec{p} \times \vec{p}_i)] = 0 \quad (27)$$

2.1 Calcolo del potenziale

Il problema può esser risolto per analogia con l'analogo problema relativo ad una carica puntiforme immersa in un dielettrico e posta di fronte ad una superficie piana che separa il primo dielettrico da un secondo di diversa costante dielettrica.

Il potenziale $V_1(x, y)$ nel primo dielettrico è quello generato dalla distribuzione data più una seconda distribuzione di carica lineare λ'_l , parallela alla prima e posta alla medesima distanza ma dalla parte opposta del piano. Il potenziale $V_2(x, y)$ nel secondo dielettrico è quello generato da una distribuzione lineare di carica λ''_l , posta dove è la distribuzione originale di carica. I potenziali vanno calcolati ammettendo che *l'intero spazio* sia riempito di un dielettrico di costante ϵ_{r1} nel primo caso ed ϵ_{r2} nel secondo .

Le condizioni al contorno da imporre sono la continuità della componente tangenziale di $\vec{E}$ e della componente longitudinale di $\vec{D}$ sulla superficie di separazione. In termini dei potenziali V_1 e V_2 queste si scrivono:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad (28)$$

$$\epsilon_{r1} \frac{\partial V_1}{\partial x} = \epsilon_{r2} \frac{\partial V_2}{\partial x} \quad (29)$$

I potenziali V_1 e V_2 nel generico punto P sono dati da:

$$V_1(P) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda_l}{\epsilon_{r1}} \ln r_a + \frac{\lambda'_l}{\epsilon_{r1}} \ln r_b \right] \quad (30)$$

$$V_2(P) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda''_l}{\epsilon_{r2}} \ln r_a \quad (31)$$

Poiché i potenziali sono espressi in funzione della variabile radiale r mentre le condizioni al contorno sono espresse in funzione delle coordinate cartesiane x ed y sulla superficie di separazione, ci occorrono le derivate di $\ln r_a$ ed $\ln r_b$ rispetto ad x ed y. Si ha:

$$r_a = \sqrt{y^2 + (a+x)^2}$$

$$r_b = \sqrt{y^2 + (a-x)^2}$$

per cui:

$$\frac{\partial \ln r_a}{\partial y} = \frac{y}{y^2 + (a+x)^2}$$

$$\frac{\partial \ln r_b}{\partial y} = \frac{y}{y^2 + (a-x)^2}$$

$$\frac{\partial \ln r_a}{\partial x} = \frac{a+x}{y^2 + (a+x)^2}$$

$$\frac{\partial \ln r_b}{\partial x} = -\frac{a-x}{y^2 + (a-x)^2}$$

Si ha quindi:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda_l}{\epsilon_{r1}} \frac{y}{y^2 + a^2} + \frac{\lambda'_l}{\epsilon_{r1}} \frac{y}{y^2 + a^2} \right] = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{y}{y^2 + a^2} (\lambda_l + \lambda'_l)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda_l}{\epsilon_{r1}} \frac{a}{y^2 + a^2} - \frac{\lambda'_l}{\epsilon_{r1}} \frac{a}{y^2 + a^2} \right] = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{a}{y^2 + a^2} (\lambda_l - \lambda'_l)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda''_l}{\epsilon_{r2}} \frac{y}{y^2 + a^2} \right]$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda''_l}{\epsilon_{r2}} \frac{a}{y^2 + a^2} \right]$$

Le condizioni al contorno (28) e (29) ci danno allora:

$$\lambda''_l = \lambda_l - \lambda'_l$$

$$\frac{\lambda_l}{\epsilon_{r1}} + \frac{\lambda'_l}{\epsilon_{r1}} = \frac{\lambda''_l}{\epsilon_{r2}}$$

Da queste si ricavano le incognite λ'_l e λ''_l :

$$\lambda'_l = \lambda_l \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$$

$$\lambda''_l = \lambda_l \frac{2\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$$

I potenziali sono quindi dati dalle (30) e (31) con i valori di λ'_l e λ''_l trovati.

2.2 Campo elettrico

Le componenti x ed y del campo elettrico nel primo mezzo sono date da:

$$E_{1x} = -\frac{\partial V_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{a}{y^2 + a^2} (\lambda_l - \lambda'_l) = \frac{1}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \lambda_l \frac{a}{y^2 + a^2} \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$$

$$E_{1y} = -\frac{\partial V_1}{\partial y}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{y}{y^2 + a^2} (\lambda_l + \lambda'_l) = \frac{1}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \lambda_l \frac{y}{y^2 + a^2} \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$$

Le componenti x ed y del campo elettrico nel secondo mezzo sono date da:

$$E_{2x} = -\frac{\partial V_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}} \lambda''_l \frac{a}{y^2 + a^2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}} \lambda_l \frac{a}{y^2 + a^2} \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$$

$$E_{2y} = -\frac{\partial V_2}{\partial y}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}} \lambda''_l \frac{y}{y^2 + a^2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}} \lambda_l \frac{y}{y^2 + a^2} \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$$

2.3 Densità superficiale delle cariche di polarizzazione

Sulla superficie del primo mezzo affacciata al secondo si formerà una densità di cariche di polarizzazione data da:

$$\sigma_1 = P_{n1} = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) E_{1x}$$

dove abbiamo indicato con P_{n1} la componente del vettore polarizzazione perpendicolare alla superficie.

Analogamente, sulla superficie del secondo mezzo affacciato al primo si formerà una densità di cariche di polarizzazione data da:

$$\sigma_2 = -P_{n2} = -\epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) E_{2x}$$

Sostituendo i valori trovati per E_{1x} e per E_{2x} troviamo:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \epsilon_0 [(\epsilon_{r1} - 1) E_{1x} - (\epsilon_{r2} - 1) E_{2x}] = \frac{\lambda_l}{\pi \epsilon_{r1}} \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{a}{y^2 + a^2}$$

2.4 Forza per unità di lunghezza agente sulla linea

Per calcolare la forza per unità di lunghezza, possiamo procedere al calcolo del campo generato dalla distribuzione lineare di carica λ'_l nella posizione occupata dalla densità di carica λ_l e moltiplicare poi per λ_l . Il campo nel punto considerato avrà diversa da zero la sola componente x, data da:

$$\begin{aligned} E'_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-\lambda'_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \ln r_b \right]_{x=-a} = \frac{\lambda_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln r_b \right]_{x=-a} = \\ &= -\frac{\lambda_l}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

La forza per unità di lunghezza é allora:

$$\frac{\lambda_l^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{1}{a}$$