

Secondo compitino del corso Fisica Generale IIB - –
31/5/2002

Esercizio 1

Si consideri un solenoide di lunghezza h composto da N avvolgimenti di raggio d . Gli avvolgimenti sono realizzati con un materiale di resistività ρ . Gli avvolgimenti sono compatti e la sezione del filo è circolare in modo che il raggio del filo sia $\delta = L/2N$. L'induttanza del solenoide è L_1 . Nell'istante $t = 0$ si collega il solenoide ad un generatore di tensione V . Si trovi :

- l'andamento della corrente i_1 nel solenoide in funzione del tempo;
- il lavoro prodotto dal generatore a partire dal momento in cui viene collegato il generatore fino ad un generico istante t' .

Mantenendo la corrente i_1 costante una spira di raggio $a \ll d$, induttanza L_2 , massa m e resistenza trascurabile viene spostata con un moto quasi stazionario lungo l'asse del solenoide in prossimità del solenoide. L'asse della spira è parallelo all'asse del solenoide (vedi figura 1). Si trovi :

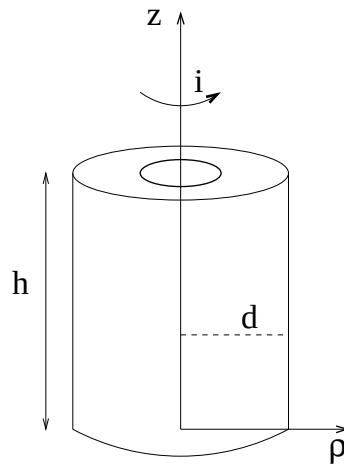


Figure 1:

- la corrente indotta nella spira in funzione della posizione lungo l'asse del solenoide;
- il lavoro fatto dalla forza esterna (trascurando la forza peso) per portare la spira sul piano della superficie di base superiore del solenoide;
- la forza esterna che deve essere applicata alla spira per far muovere la spira come descritto (trascurando la forza peso).

La spira viene fermata al centro della base superiore del solenoide e lasciata cadere sotto l'azione della forza peso. Si trovi :

- la velocità con cui la spira passa dal centro del solenoide.

La spira viene fermata al centro del solenoide e il generatore di tensione viene cortocircuitato.

- Trovare l'andamento delle correnti i_1 ed i_2 in funzione del tempo.

Esercizio 2

Si consideri un solenoide di lunghezza infinita composto da n spire per unità di lunghezza, ciascuna percorsa da corrente i . Il volume interno del solenoide è riempito di un materiale ferromagnetico dolce, di permeabilità magnetica relativa μ_r . All'interno del materiale si trova una cavità a forma di disco le cui basi sono ortogonali all'asse del solenoide (figura 2). Detta a l'altezza del cilindro (spessore della cavità) e r il raggio di ciascuna base, si

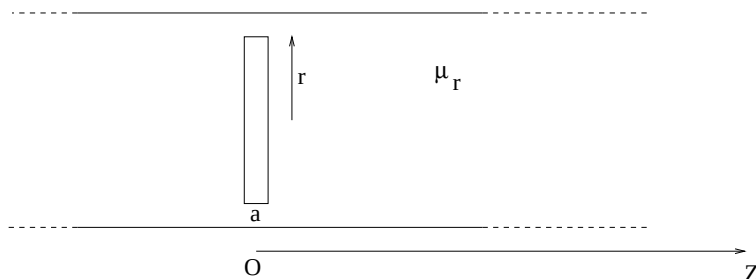


Figure 2:

ha $r \gg a$. Si calcolino :

- i campi $\vec{B}$, $\vec{H}$ e $\vec{M}$ ovunque (si trascurino qui e nel seguito i termini a partire dall'ordine a/r);
- la densità di energia magnetica all'interno ed all'esterno della cavità.

Si assuma ora il mezzo ferromagnetico elastico e si supponga μ_r indipendente dall'espansione del mezzo, si calcoli

- la pressione esercitata dal campo magnetico su ciascuna base del cilindro.

Esercizio 3

Una spira circolare di raggio a , resistenza R e induttanza trascurabile viene investita dalla radiazione emessa da un dipolo di ampiezza $p_0 = qd$ che oscilla con frequenza ω . La spira è posta a distanza $r \gg a$ ed $r \gg d$ ed inoltre si abbia $\lambda \gg d$. Si trovi per una generica distanza r :

- in quale posizione e con quale orientazione deve essere messa la spira affinché il flusso del campo magnetico sia massimo;
- si consideri la spira disposta come trovato al punto precedente e si trovi la potenza media dissipata nella spira in un periodo dalla forza elettromotrice indotta dal campo magnetico.

Se la spira si trova a distanza $r = 10 \lambda$, si dica quanto vale l'intensità del dipolo nell'istante in cui la potenza dissipata è massima.

Soluzione

Esercizio 1

1. L'equazione del circuito è :

$$V = L_1 \frac{di_1}{dt} + Ri_1 \quad (1)$$

indicando con δ il raggio del filo la resistenza R è :

$$R = \frac{\rho N 2\pi d}{\pi \delta^2} = \rho N 2d \left(\frac{2N}{h} \right)^2 = \frac{8\rho N^3 d}{h^2} \quad (2)$$

δ è il raggio del filo dell'avvolgimento. Si ottiene :

$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L_1}) \quad (3)$$

2. Il lavoro prodotto dal generatore è la somma del calore sviluppato per effetto Joule e dell'energia magnetica accumulata nel solenoide nell'intervallo di tempo $[0, t']$:

$$\int_0^{t'} V i_1 dt = \int_0^{t'} Ri_1^2 dt + \frac{L_1 i_1^2(t')}{2} = \frac{V^2}{R} \left(t' + \frac{L_1}{R} e^{-\frac{R}{L_1} t'} - \frac{L_1}{R} \right) \quad (4)$$

dopo la fase transitoria, cioè quando la corrente raggiunge il valore $i(t' \simeq \infty) = V/R$ il generatore produce solo il lavoro necessario per rifornire l'energia persa per effetto Joule.

3. Quando la spira 2 si avvicina al solenoide il flusso attraverso di essa deve rimanere costante perchè la spira è a resistenza nulla. Inoltre essendo nullo il flusso all'infinito si ha :

$$\Phi_2(B_{totale}) = L_2 i_2 + M i_1 = 0 \quad (5)$$

dove il verso positivo della corrente è in definito in senso antiorario per entrambe le correnti, quindi :

$$i_2(z) = -\frac{M(z)i_1}{L_2} \quad (6)$$

Il coefficiente di mutua induzione dipende dalla distanza tra il solenoide e la spira, il campo sulla superficie della spira può essere considerato costante e uguale al campo sull'asse del solenoide. Considerando l'asse z orientato verso l'alto con origine nel centro della base inferiore del solenoide (vedi figura 1) si ha :

$$B_z = \frac{n\mu_0 i_1}{2} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) = \frac{n\mu_0 i_1}{2} \left(\frac{h}{\sqrt{z^2 + d^2}} + \frac{|h - z|}{\sqrt{(h - z)^2 + d^2}} \right) \quad (7)$$

e quindi :

$$M(z) = \pi a^2 \frac{n\mu_0}{2} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) \quad (8)$$

ne segue :

$$i_2(z) = -\frac{\pi a^2 n\mu_0 i_1}{2L_2} \left(\frac{h}{\sqrt{z^2 + d^2}} + \frac{|h - z|}{\sqrt{(h - z)^2 + d^2}} \right) \quad (9)$$

il verso di i_2 è opposto al verso di i_1 cioè i_2 scorre in senso orario.

4. Il lavoro fatto dalla forza esterna (L_{ext}) per portare la spira fin sulla base superiore del solenoide è pari all'energia magnetica dalla spira 2 :

$$L_{ext} = \frac{L_2 i_2(h)^2}{2} \quad (10)$$

considerando che per $z = h$ il coefficiente di mutua induzione è pari a :

$$M(h) = \frac{\pi a^2 n \mu_0 h}{2\sqrt{h^2 + d^2}} \quad (11)$$

$i_2(h)$ è pari a :

$$i_2(h) = -\frac{\mu_0 n i_1 \pi a^2 h}{2L_2 \sqrt{h^2 + d^2}} \quad (12)$$

da cui si ottiene :

$$L_{ext} = \frac{\mu_0^2 n^2 i_1^2 \pi^2 a^4 h^2}{8L_2(h^2 + d^2)} \quad (13)$$

Il bilancio energetico per ottenere il lavoro della forza esterna è infatti dato da :

$$L_{ext} + L_{gen} = \Delta Q_J + \Delta U_m \quad (14)$$

dove si è già considerato che la variazione di energia cinetica è nulla. Il lavoro fatto dal generatore nell'intervallo di tempo infinitesimo dt è :

$$V i_1 dt = R i_1^2 dt + i_2 i_1 dM + M i_1 di_2 = R i_1^2 dt + dU_m^{int} \quad (15)$$

dove dU_m^{int} indica la variazione di energia magnetica dovuta all'interazione dei due circuiti. Il lavoro della forza esterna è ottenibile quindi dalla relazione :

$$L_{ext} + R i_1^2 dt + dU_m^{int} = R i_1^2 dt + dU_m^{int} + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \quad (16)$$

Esistono vari modi alternativi per trovare il lavoro compiuto dalla forza esterna, uno di questi è il seguente :

Il lavoro compiuto dalla forza esterna (positivo) è uguale al lavoro della forza elettromotrice indotta nella spira, dato che il campo magnetico non compie lavoro. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^t f_{e.m.}^{indotta} i_2 dt = - \int_0^t i_2(t) d(M i_1) \\ &= \int_\infty^h M i_1 / L_2 d(M i_1) = i_1^2 / 2 L_1 \cdot M^2(h) \end{aligned}$$

5. La forza esterna che deve essere applicata è uguale in modulo ed ha verso opposto alla componente della forza di Lorentz diretta lungo l'asse. Questa componente è dovuta alla componente B_ρ del campo del solenoide. Per distanze dall'asse piccole imponendo che sia nullo il flusso di $\vec{B}$ uscente dal cilindro di raggio ρ ed altezza dz mostrato in figura 3, si ottiene :

$$[B(z + dz) - B(z)] \pi \rho^2 = -2\pi \rho B_\rho dz \quad (17)$$

e quindi :

$$B_\rho = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_z}{dz} \quad (18)$$

La componente z della forza di Lorentz agente sulla spira percorsa dalla corrente i_2 è :

$$F_z = \int i_2 |d\vec{l} \times \vec{B}_\rho| = -2\pi \rho i_2 B_\rho = \pi \rho^2 i_2 \frac{dB_z}{dz} \quad (19)$$

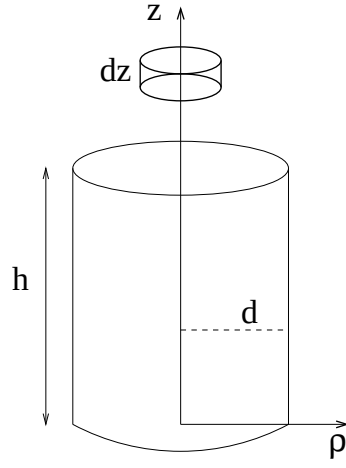


Figure 3:

essendo la derivata di B_z negativa, la forza è diretta verso l'alto dato che i_2 è negativa (scorre in senso orario attorno alla direzione z). La formula ottenuta coincide con la forza risentita da un dipolo immerso in un campo B :

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (20)$$

6. Se la spira viene lasciata cadere sotto l'azione della forza peso si ha :

$$\frac{mgh}{2} = \frac{L_2}{2} (i_2^2(h/2) - i_2^2(h)) + \frac{mv^2}{2} \quad (21)$$

e quindi :

$$v = \sqrt{gh - \frac{L_2}{m} (i_2^2(h/2) - i_2^2(h))} \quad (22)$$

$$= \sqrt{gh - \frac{\mu_0^2 n^2 i_1^2 \pi^2 a^4 h^2}{4L_2 m} \left(\frac{4}{h^2 + 4d^2} - \frac{1}{h^2 + d^2} \right)} \quad (23)$$

Anche in questo caso un procedimento alternativo per trovare la velocità richiesta è quello descritto qui di seguito. Dal teorema delle forze vive si deduce che la variazione dell'energia cinetica per unità di tempo è uguale alla potenza delle forze che agiscono sulla spira:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2mv^2} \right) = -mg \frac{dz}{dt} + P_{F.M.}$$

dove abbiamo indicato con $P_{F.M.}$ la potenza (< 0) della componente meccanica della forza di Lorentz. Integriamo questa equazione tra $z = h$ e $z = h/2$ e utilizziamo di nuovo la proprietà del campo magnetico di non compiere lavoro :

$$1/2mv^2 = mgh/2 - L/2 (i(h/2)^2 - i(h)^2)$$

essendo $L/2 (i_2^2(h/2) - i_2^2(h))$ il lavoro (positivo) compiuto dalla forza elettromotrice indotta nella spira dalla posizione iniziale ($z = h$) fino alla posizione finale ($z = h/2$).

7. Le equazioni che descrivono i circuiti dall'istante in cui il generatore viene cortocircuitato sono :

$$Ri_1 + M \frac{di_2}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (24)$$

$$M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (25)$$

dove $M = M(h/2)$, quindi si ha :

$$i_1(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{(L_1 - \frac{M^2}{L_2})}t} \quad (26)$$

$$i_2(t) = -\frac{MV}{L_2 R} e^{-\frac{R}{(L_1 - \frac{M^2}{L_2})}t} + \frac{MV}{L_2 R} + i_2(0) \quad (27)$$

considerando l'istante $t = 0$ come l'istante in cui il generatore viene cortocircuitato definisco $i_2(0)$ come la corrente che scorre nella spira 2 nella posizione $z = h/2$.

Esercizio 2

1. Il campo H_f all'interno del solenoide è dato da : $\vec{H}_f = ni\hat{z}$ mentre il campo $\vec{B}_f = \mu_0\mu_r ni\hat{z}$. Per determinare il campo all'interno della cavità (B_{int}, H_{int}) posso applicare le condizioni al contorno. Tenendo conto delle dimensioni della cavità e delle approssimazioni richieste, posso assumere che il campo all'interno della cavità sia parallelo all'asse del solenoide in ogni punto e posso determinare la sua intensità imponendo la continuità di B alla superficie di dimensione maggiore (superficie di base) :

$$B_{est} = B_{int} \quad (28)$$

da cui si ottiene :

$$\begin{aligned} B_{int} &= \mu_0\mu_r ni \\ H_{int} &= \mu_r ni = \mu_r H_f \end{aligned}$$

Il vettore magnetizzazione $\vec{M}$ del materiale è:

$$\vec{M}_f = (\mu_r - 1)H_f\hat{z} \quad (29)$$

2. La forza per unità di superficie agente su ciascuna base del cilindro si può calcolare come:

$$\frac{\vec{F}}{S} = \frac{1}{S} \frac{dU}{dz} \hat{z} |_{i=costante} \quad (30)$$

dove $S = \pi r^2$, dz è lo spostamento infinitesimo di una base della cavità e U è l'energia magnetica data dalla somma dell'energia della cavità (U_{int}) e dell'energia del ferromagnete (U_f) :

$$U_{int} = \pi r^2 z \frac{B_{int} H_{int}}{2} = \pi r^2 \frac{\mu_0 \mu_r^2 n^2 i^2}{2} z \quad (31)$$

$$U_f = \pi r^2 z \frac{B_f H_f}{2} = \pi r^2 \frac{\mu_0 \mu_r n^2 i^2}{2} 2(L - z) \quad (32)$$

$$U = \pi r^2 \frac{\mu_0 \mu_r n^2 i^2}{2} [\mu_r z + (L - z)] \quad (33)$$

dove L indica la lunghezza di metà del solenoide. Si ottiene :

$$\frac{\vec{F}}{S} = \frac{\mu_0 \mu_r n^2 i^2}{2} (\mu_r - 1) \hat{z} = \frac{B_f^2}{2\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) \hat{z} \quad (34)$$

che tende ad espandere la cavità, essendo $\mu_r > 1$, infatti l'energia magnetica aumenta, all'aumentare dello spessore della cavità.

Esercizio 3

Considero il dipolo orientato lungo l'asse z di una terna cartesiana :

$$p_z = p_0 \sin \omega t \quad (35)$$

e quindi :

$$\dot{p}_z = p_0 \omega \cos \omega t \quad (36)$$

$$\ddot{p}_z = -p_0 \omega^2 \sin \omega t \quad (37)$$

Il campo magnetico prodotto dal dipolo è in ogni punto diretto lungo la direzione $\hat{\phi}$ ed ha intensità :

$$B_\phi = \frac{p_0 \mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \left[-\frac{\omega^2 \sin \omega(t - r/c)}{c} + \frac{\omega \cos \omega(t - r/c)}{r} \right] \quad (38)$$

dove il primo termine domina nella zona di radiazione $r \gg \lambda$ ed il secondo nella zona statica $r \ll \lambda$. Essendo la spira di dimensioni molto piccole posso approssimare il campo magnetico sulla sua superficie con il campo al centro. Si vede quindi che il flusso del campo di induzione magnetica attraverso la spira è massimo per $(r_c, \theta_c = \pm \pi/2, \phi_c)$ con la spira che giace nel piano individuato dal dipolo e da $\hat{r}$. L'equazione del circuito è :

$$-\pi a^2 \frac{dB_\phi}{dt} = Ri \quad (39)$$

quindi la corrente è :

$$i(t) = -\frac{\pi a^2}{R} \frac{dB_\phi}{dt} \quad (40)$$

la potenza media dissipata in un periodo è quindi :

$$\frac{\int_0^T Ri^2 dt}{T} = \frac{\pi^2 a^4}{R} \left(\frac{p_0 \mu_0}{4\pi r} \right)^2 \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\omega^3 \cos \omega(t - r/c)}{c} - \frac{\omega^2 \sin \omega(t - r/c)}{r} \right)^2 dt \quad (41)$$

$$= \frac{\pi^2 a^4}{R} \left(\frac{p_0 \mu_0}{4\pi r} \right)^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\omega^6 \cos^2 \omega(t - r/c)}{c^2} + \frac{\omega^4 \sin^2 \omega(t - r/c)}{r^2} dt \quad (42)$$

$$= \frac{\pi^2 a^4}{R} \left(\frac{p_0 \mu_0}{4\pi r} \right)^2 \left(\frac{\omega^6}{2c^2} + \frac{\omega^4}{2r^2} \right) \quad (43)$$

Se il dipolo è posto a distanza $r \gg \lambda$ posso considerare solo il termine del campo che contiene le derivate seconde del tempo del momento di dipolo e quindi la potenza dissipata varia come $\cos^2 \omega(t - r)$ dove t è l'istante in cui la radiazione viene emessa. Quindi nel caso in cui $r = 10\lambda$ l'intensità del dipolo è 0 quando nell'istante in cui si ha massima dissipazione.