Momenti e forze in un sistema di due dipoli

Consideriamo un sistema di due dipoli $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ disposti a distanza r (figura 1) e giacenti nello stesso piano. Siano $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ gli angoli che i dipoli formano con l'asse z, definiti in un range $[-\pi, \pi]$. Questi angoli sono indipendenti dalla posizione dei dipoli e definiscono la loro orientazione. Siano θ_1 e θ_2 gli angoli che i dipoli formano con il versore $\hat{r}$. La coordinata del dipolo 2 in un sistema di riferimento in cui il dipolo 1 sia nell'origine del sistema di riferimento è (r, θ, ϕ). Si hanno le seguenti relazioni tra gli angoli definiti sopra :

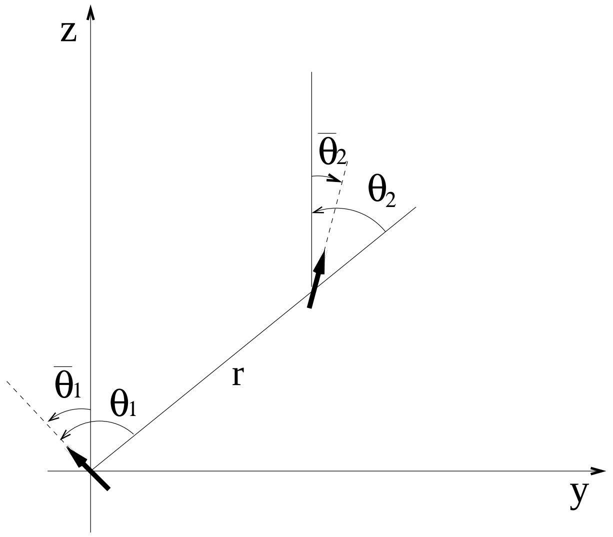

Figure 1:

$$\theta_1 = \theta - \overline{\theta}_1 \quad (1)$$
$$\theta_2 = \theta - \overline{\theta}_2 \quad (2)$$
$$(3)$$

Il campo generato dal dipolo 1 è :

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_1) \quad (4)$$

quindi l'energia potenziale del dipolo $\vec{p}_2$ nel campo generato dal dipolo $\vec{p}_1$ si può scrivere come :

$$U_{p_2}^{E_1} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})) \quad (5)$$

dove $\hat{r}$ è il versore diretto dal dipolo 1 al dipolo 2. Utilizzando la notazione per gli angoli discussa precedentemente $U_{p_2}^{E_1}$ si scrive nella forma :

$$U_{p_2}^{E_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(p_1 p_2 cos(\theta_1 - \theta_2) - 3p_1 p_2 cos\theta_1 cos\theta_2) = \quad (6)$$

$$= \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}(sen\theta_1 sen\theta_2 - 2cos\theta_1 cos\theta_2) \tag{7}$$

Si vede che l'energia calcolata è simmetrica per scambio degli indici $1 \to 2$ come ci si aspetta. Consideriamo le configurazioni illustrate in figura 2 e vediamo quanto vale l'energia potenziale.

$$Caso\ 1: \quad \theta_1 = \theta_2 = \pi/2 \quad U = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{8}$$

$$Caso\ 2: \quad \theta_1 = -\theta_2 = \pi/2 \quad U = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{9}$$

$$Caso\ 3: \quad \theta_1 = \pi/2\ \theta_2 = 0 \quad U = 0 \tag{10}$$

$$Caso\ 4: \quad \theta_1 = \theta_2 = 0 \quad U = -\frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{11}$$

$$Caso\ 5: \quad \theta_1 = 0\ \theta_2 = \pi \quad U = \frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

Quindi si vede che la configurazione di minima energia, cioè la configurazione stabile, è quella in cui i dipoli sono allineati e concordi.

Per trovare la forza che agisce su $\vec{p}_2$ si deve differenziare l'energia potenziale rispetto alla coordinata (r, θ) del dipolo $\vec{p}_2$, mantenendo l'orientazione del dipolo costante.

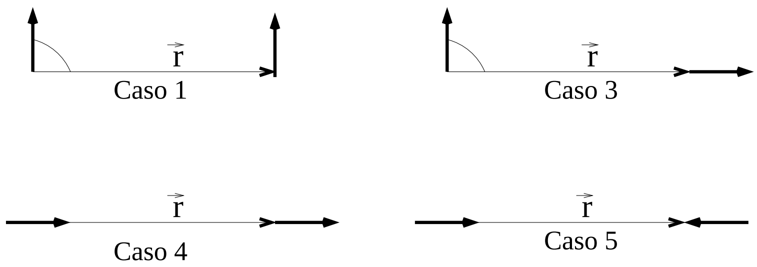

Figure 2:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{\theta} \tag{14}$$

Quindi derivando rispetto a r e θ e tenendo conto che :

$$\frac{df(\theta_1)}{d\theta} = \frac{df(\theta_1)}{d\theta_1} \qquad \frac{df(\theta_2)}{d\theta} = \frac{df(\theta_2)}{d\theta_2} \tag{15}$$

si ottiene :

$$\vec{F}_{p_2}^{E_1} = \frac{3p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}[(sen\theta_1 sen\theta_2 - 2cos\theta_1 cos\theta_2)\hat{r} - (cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2)\hat{\theta}] \tag{16}$$

Vediamo che l'espressione della forza è invariante per scambio degli indici $1 \to 2$, tuttavia quando si considera il dipolo 2 come quello che genera il campo ed il dipolo 1 come quello che lo risente, $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ cambiano segno.

Il sistema dei due dipoli è un sistema isolato, quindi per qualsiasi posizione dei dipoli si avrà :

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \tag{17}$$

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \tag{18}$$

dove $\vec{F}_i$ e $\vec{M}_i$ sono tutte le forze ed i momenti che agiscono sul sistema. La risultante dei momenti che agiscono sul sistema è data da :

$$\sum_i M_i = \vec{r} \times (\vec{F}_{p_1}^{E_2} + \vec{F}_{p_2}^{E_1}) + M_{p_1}^{E_2} + M_{p_2}^{E_1} \tag{19}$$

dove il primo termine a secondo membro rappresenta il momento delle forze che agiscono sui dipoli. Nel nostro caso abbiamo calcolato questo momento prendendo come polo l'origine del sistema di coordinate, quindi il momento agisce sul dipolo 2 mettendolo in rotazione intorno all'origine senza variarne l'orientazione. Gli ultimi due termini a secondo membro rappresentano invece i momenti risentiti da ciascun dipolo per la presenza del campo generato dall'altro dipolo. Questi momenti mettono in rotazione i dipoli attorno a se stessi e sono uguali a :

$$\vec{M}_{p_i}^{E_j} = \vec{p}_i \times \vec{E}_j \tag{20}$$

Calcoliamo il valore della forza e dei momenti nei casi particolari di figura 2 visti per l'energia potenziale.

Caso 1 :

In questa configurazione si ha :

$$\theta_1 = \theta_2 = \pi/2 \rightarrow \vec{F}_{p_2}^{E_1} = \frac{3p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\hat{r} \tag{21}$$

La forza è quindi repulsiva, come d'altra parte ci si aspettava se si immagina il dipolo come formato da due cariche opposte. La forza che risente il dipolo 1 per il campo generato dal dipolo 2 è $\vec{F}_{p_2}^{E_1} = -\vec{F}_{p_1}^{E_2}$. Quindi per il sistema isolato formato dai due dipoli si ottiene che la risultante delle forze è nulla. Calcoliamo la risultante dei momenti delle forze che agiscono sul sistema. Il momento delle forze che agiscono sui dipoli calcolato rispetto ad un polo che coincide con la posizione del dipolo 1 è dato da :

$$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}_{p_2}^{E_1} = 0 \tag{22}$$

Il momento che risente il dipolo 2 per la presenza del campo generato dal dipolo 1 è dato da :

$$\vec{M}_{p_2}^{E_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r\ 3}[3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \times \hat{r}) - (\vec{p}_2 \times \vec{p}_1)] = 0 \tag{23}$$

Analogamente si ha $\vec{M}_{p_1}^{E_2} = 0$, quindi come ci si aspetta anche la risultante dei momenti è nulla.

Caso 2 :

In questa configurazione si ha :

$$\theta_1 = \pi/2\ \theta_2 = 0 \rightarrow \vec{F}_{p_2}^{E_1} = -\frac{3p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\hat{\theta} \tag{24}$$

Quindi il dipolo 2 tende a traslare nel verso positivo dell'asse z. La forza $\vec{F}_{p_1}^{E_2}$, é diretta in senso opposto a $\vec{F}_{p_2}^{E_1}$ e quindi è verificato che la risultante delle forze è nulla.

Calcoliamo ora il momento delle forze rispetto all'origine del sistema di coordinate :

$$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}_1^2 = \frac{3p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\hat{x} \tag{25}$$

quindi il dipolo 2 tende a ruotare in senso antiorario intorno all'asse $\hat{x}$. Il momento $\vec{M}_{p_2}^{E_1}$ è dato da :

$$\vec{M}_{p_2}^{E_1} = \vec{p}_2 \times \vec{E}_1 = -\frac{p_2 \times \vec{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 r\ 3}\hat{x} \tag{26}$$

quindi il dipolo 2 tende a girare in senso orario intorno all'asse $\hat{x}$. Analogamente si ottiene :

$$\vec{M}_{p_1}^{E_2} = \vec{p}_1 \times \vec{E}_2 \tag{27}$$

Scriviamo l'espressione del campo E_2 in funzione del versore $\hat{r}$ che è diretto dal dipolo 1 al dipolo 2 :

$$\vec{E}_2 = \frac{2p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{r} \tag{28}$$

quindi :

$$\vec{M}_{p_1}^{E_2} = \frac{2p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{p}_1 \times \hat{r} = -\frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{x} \tag{29}$$

sommando i tre contributi alla risultante dei momenti si vede quindi che la risultante dei momenti è anche in questo caso nulla. Si lasciano le altre configurazioni come esercizi.