

Intensità di un'onda sonora

1 Intensità di un'onda sonora in un tubo pieno di gas

1.1 Prima derivazione

Possiamo calcolare l'intensità a partire dall'espressione del lavoro (per unità di tempo) che lo strato di gas posto a monte di una certa sezione del tubo, di sezione S , compie su quello posto a valle. Tale lavoro è pari al prodotto della *pressione in eccesso*, (rispetto a quella di equilibrio), $P_e = P - P_0$, moltiplicata per la sezione del tubo e per la velocità con cui si muove lo strato di gas. Denotando con $\delta(x, t)$ la funzione che esprime lo spostamento nel punto di ascissa x al tempo t , avremo:

$$W(t) = \frac{\partial \delta}{\partial t} S P_e \quad (1)$$

l'intensità dell'onda I è quindi data :

$$I = \frac{\langle W(t) \rangle_T}{S} \quad (2)$$

Per un'onda sinusoidale è:

$$\delta(t) = \delta_0 \cos(kx - \omega t) \quad (3)$$

Derivando questa rispetto al tempo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \omega \delta_0 \sin(kx - \omega t) \quad (4)$$

La pressione in eccesso P_e è data da:

$$P_e = -K \rho_0 \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (5)$$

dove K è il quadrato della velocità di propagazione dell'onda (v) e ρ_0 è la densità a riposo del gas. Si ha quindi per P_e :

$$P_e = K \rho_0 k \delta_0 \sin(kx - \omega t) \quad (6)$$

Per cui:

$$W(t) = S P_e \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{S K \rho_0 \omega^2 \delta_0^2}{v} \sin^2(kx - \omega t) \quad (7)$$

dove si è fatto uso della relazione $k = \omega/v$. Mediando su un periodo e dividendo per la sezione del tubo si ottiene l'intensità dell'onda :

$$I = 2\pi^2 \nu^2 \delta_0^2 \rho_0 v \quad (8)$$

1.2 Seconda derivazione

L'intensità può anche esser calcolata a partire dall'energia cinetica trasportata per unità di tempo e di superficie.

Consideriamo un trattino di tubo di lunghezza Δx . La massa di gas contenuta in esso, per unità di area è:

$$\Delta m = \rho_0 \Delta x \quad (9)$$

La sua energia cinetica:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \Delta x (\omega \delta_0 \sin(kx - \omega t))^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \Delta x \omega^2 \delta_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \quad (10)$$

Per Δx infinitesimo:

$$dT = \frac{1}{2} \rho_0 dx \omega^2 \delta_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \quad (11)$$

L'energia cinetica per unità di tempo sarà ora:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \delta_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \delta_0^2 \sin^2(kx - \omega t) v \quad (12)$$

Il valor medio di questo su di un periodo è:

$$\left\langle \frac{dT}{dt} \right\rangle_T = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 \delta_0^2 v \quad (13)$$

Poiché sappiamo che l'energia potenziale è uguale a quella cinetica, l'energia totale mediata su un periodo di un tratto dx sarà due volte questa:

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \delta_0^2 v = 2 \pi^2 \nu^2 \delta_0^2 \rho_0 v \quad (14)$$

Cioè il medesimo risultato ottenuto con il metodo precedente.

2 Intensità di un'onda sonora emessa da una sorgente "puntiforme" (onda sferica)

Calcoliamo ora, seguendo lo stesso metodo adoperato nel caso di un'onda piana, l'intensità di un'onda sferica. Confronteremo poi il risultato ottenuto con quello relativo al caso dell'onda piana.

Lo spostamento radiale di un guscio sferico infinitesimo è ora dato da:

$$\delta(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (15)$$

dove A/r ha le dimensioni di una lunghezza. L'energia cinetica contenuta nel guscio sferico di spessore infinitesimo dr è data da:

$$dT = \frac{4\pi r^2 \rho_0}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right)^2 dr = \frac{4\pi r^2}{2} \frac{\rho_0 A^2 \omega^2}{r^2} \sin^2(kr - \omega t) dr \quad (16)$$

dove ρ_0 è la densità di volume del gas a riposo. In un intervallo di tempo infinitesimo dt , questa energia cinetica si sposta del tratto $v dt$, dove v è la velocità di propagazione dell'onda, quindi :

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{A}{r} \right)^2 \frac{4\pi r^2 \omega^2 \rho_0}{2} \sin^2(kr - \omega t) v \quad (17)$$

Questa rappresenta il contributo alla potenza istantanea dovuto alla sola energia cinetica trasportata. Teniamo ora conto del fatto che l'energia potenziale contribuisce in ugual

misura. Mediando sul tempo e dividendo per la superficie $4\pi r^2$ otteniamo per l'intensità dell'onda :

$$I = \left(\frac{A}{r}\right)^2 \frac{\omega^2 \rho_0}{2} v \quad (18)$$

Vediamo in quali casi si può approssimare un'onda sferica con un'onda piana. Consideriamo che la dimensione trasversale del nostro rivelatore posto in posizione r sia $2L$. In r scrivo quindi l'onda come :

$$\delta(r, t) = \delta_0 \cos(kr - \omega t) \quad (19)$$

dove $\delta_0 = A/r$ è l'ampiezza dell'onda in r . Nei punti estremi del rivelatore la distanza del rivelatore dalla sorgente è r' :

$$r' = \sqrt{r^2 + L^2} = r \left(1 + \frac{L^2}{2r^2}\right) \quad (20)$$

e quindi il valore dell'ampiezza dell'oscillazione in questo punto sarebbe A/r' . Nel caso in cui le dimensioni del rivelatore siano $L \ll r$ l'ampiezza dell'onda può essere considerata costante sulla superficie del rivelatore e l'approssimazione dell'onda sferica con un'onda piana è giustificata.

Densità di energia potenziale in un'onda sonora

Si vuole dimostrare che per un'onda sonora la densità di energia cinetica per un'onda armonica è uguale alla densità di energia potenziale. Dimostriamolo nel caso di un'onda sferica:

$$\delta(x, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (21)$$

La densità radiale di energia cinetica è data da :

$$\frac{dT}{dr} = \epsilon_c = \frac{\rho 4\pi r^2}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)^2 \quad (22)$$

dove ρ è la densità di volume del gas in cui l'onda si propaga. L'energia potenziale contenuta all'interno di un guscio sferico di volume $4\pi r^2 \Delta r$ è associata al lavoro fatto dalla forza di pressione (in eccesso) quando il volume del guscio sferico varia di :

$$\Delta V = V_f - V_0 \quad (23)$$

dove V_0 e V_f indicano rispettivamente il volume del guscio sferico all'inizio ed alla fine della compressione e sono scrivibile come :

$$V_0 = 4\pi r^2 \Delta r \quad (24)$$

$$V_f = 4\pi r^2 [r + \Delta r + \delta(r + \Delta r) - r - \delta(r)] = \quad (25)$$

$$= 4\pi r^2 [\Delta r + \delta(r + \Delta r) - \delta(r)] = 4\pi r^2 (\Delta r + \Delta \delta) \quad (26)$$

Considerate queste espressioni la variazione di volume totale durante la compressione è data da :

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta \delta \quad (27)$$

La pressione in eccesso è definita da :

$$P_e = -\beta \frac{V - V_0}{V_0} \quad (28)$$

dove β è la comprimibilità del gas. L'energia potenziale associata ad una compressione ΔV è data da :

$$\Delta U = - \int_{V_0}^{V_f} P_e dV = \int_{V_0}^{V_f} \frac{\beta(V - V_0)}{V_0} dV = \frac{\beta(V_f - V_0)^2}{2V_0} = \frac{\beta(\Delta V)^2}{2V_0} = \quad (29)$$

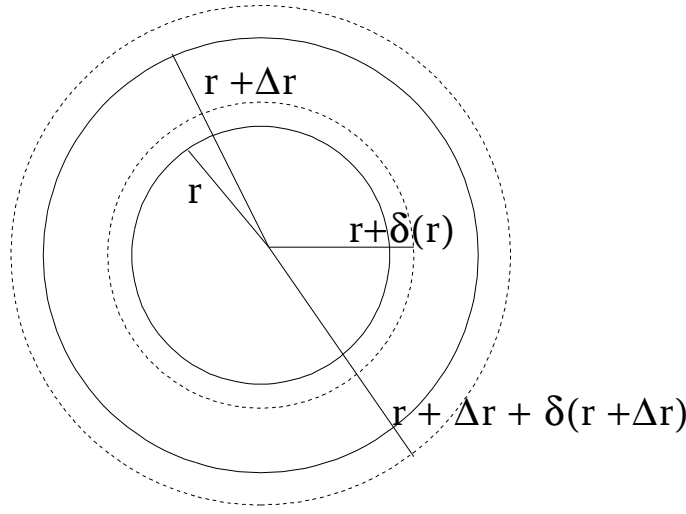


Figure 1:

Utilizzando ora che $V_0 = 4\pi r^2 \Delta r$ e che $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta \delta$ si ottiene un'espressione per la densità lineare di energia potenziale :

$$\epsilon_p = \frac{\Delta U}{\Delta r} = \frac{\beta 4\pi r^2}{2} \left(\frac{\Delta \delta}{\Delta r} \right)^2 \quad (30)$$

quindi facendo il limite per un Δr infinitesimo :

$$\epsilon_p = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\beta 4\pi r^2}{2} \left(\frac{\delta(r + \Delta r) - \delta(r)}{\Delta r} \right)^2 = \frac{\beta 4\pi r^2}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial r} \right)^2 \quad (31)$$

Sostituendo l'espressione dell'onda armonica progressiva considerata si ottiene :

$$\epsilon_p = \frac{\beta 4\pi r^2 A^2 K^2}{2r^2} \sin^2(kr - \omega t) = \frac{\rho 4\pi r^2 A^2 \omega^2}{2r^2} \sin^2(kr - \omega t) \quad (32)$$

che è uguale alla densità di energia cinetica. A questo punto per calcolare l'intensità dell'onda si può calcolare la densità di energia meccanica media su un periodo e sfruttare la seconda derivazione.

Il risultato ottenuto per l'onda sferica e' in accordo con i risultati ottenuti per l'onda piana nelle precedenti derivazioni.