Riflessione di un'onda al passaggio tra due mezzi di impedenze diverse

Considereremo il caso di una corda tesa, anche se le considerazioni che faremo si applicano ad un'onda che si propaga in un mezzo qualsiasi.

Si consideri una generica onda progressiva in una corda tesa avente densità lineare di massa μ_1 e sia T la tensione agente lungo la corda. Sia $\psi(x - vt)$ la funzione che descrive l'onda, cioé lo spostamento trasversale dell'elemento di corda. L'onda si propaghi nel verso positivo dell'asse x, con velocità v.

Se la corda ad $x = \overline{x}$ è unita ad una seconda corda avente una diversa densità lineare di massa μ_2 nascerà, in corrispondenza alla giunzione, un'onda riflessa ed un'onda trasmessa. Ammettiamo che la corda avente densità lineare di massa μ_1 sia a sinistra di quella avente densità μ_2 e che l'onda incidente viaggi da sinistra verso destra nella prima delle due.

Vediamo di trovare la relazione esistente, nel punto di giunzione, tra l'onda incidente, l'onda riflessa e l'onda trasmessa che prosegue nella seconda corda.

Notiamo intanto che il modulo della tensione è, per piccole deformazioni, costante lungo l'intera corda. La velocità di propagazione dell'onda nei due tratti non sarà però uguale, essendo:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La velocità nella corda di sinistra è quindi $\sqrt{T/\mu_1}$; nella parte posta a destra è invece $\sqrt{T/\mu_2}$.

La componente verticale (lungo ψ) F_{SD} della forza che l'elemento di corda posto a sinistra della giunzione esercita su quello posto a destra è pari alla tensione T moltiplicata per il seno dell'angolo θ che la corda forma con l'asse delle x e cambiata di segno. Per piccole deformazioni, cioé per piccoli angoli, potremo approssimare il seno con la tangente, ed esprimere poi questa come derivata di ψ rispetto ad x. Con ciò avremo per la componente della forza:

$$F_{SD} = -T\frac{\partial\psi(x - vt)}{\partial x}$$

Ricordando che le derivate della funzione $\psi(x - vt)$ rispetto ad x e rispetto a t sono legate dalla relazione:

$$\frac{\partial\psi(x - vt)}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial\psi(x - vt)}{\partial t}$$

si trova:

$$F_{SD} = \frac{T}{v}\frac{\partial\psi(x - vt)}{\partial t} = \sqrt{T\mu}\frac{\partial\psi(x - vt)}{\partial t} = Z\frac{\partial\psi(x - vt)}{\partial t}$$

dove abbiamo introdotto l'*impedenza caratteristica* Z della corda. Notando che la grandezza $\frac{\partial\psi(x-vt)}{\partial t}$ è la velocità (trasversale) dell'elemento di corda, vediamo che Z è il coefficiente di proporzionalità tra forza e velocità. Esso è quindi analogo alla forza resistiva cha ha origine nella viscosità di un mezzo, che è in molti casi proporzionale alla velocità.

Chiamando $\psi_i(x - vt)$, $\psi_r(x + vt)$ e $\psi_t(x - vt)$ rispettivamente l'onda incidente, quella riflessa e quella trasmessa, avremo:

$$\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial x} = -\frac{1}{v_1}\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial x} = \frac{1}{v_1}\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \psi_t(x-vt)}{\partial x} = -\frac{1}{v_2}\frac{\partial \psi_t(x-vt)}{\partial t}$$

Nel punto di raccordo tra i due mezzi la forza complessiva che la parte sinistra della corda esercita su quella posta a destra deve bilanciare quella che la parte posta a destra esercita sulla prima.

La prima di tali forze è la somma del termine dovuto all'onda incidente e di quello dovuto all'onda riflessa:

$$F_{SD} = -T_1\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial x} - T_1\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial x}$$

La seconda è:

$$F_{DS} = T_2\frac{\partial \psi_t(x-vt)}{\partial x}$$

Notiamo che questa volta il segno è positivo, poichè si tratta dell'azione che il tratto sinistro esercita su quello destro.

Poichè nel punto di raccordo le forze debbono equilibrarsi, avremo:

$$T_1\left.\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} + T_1\left.\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} = T_2\left.\frac{\partial \psi_t(x-vt)}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}}$$

Trasformiamo ora le derivate rispetto ad x in derivate rispetto al tempo. Troveremo:

$$\frac{T}{v_1}\left.\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} - \frac{T}{v_1}\left.\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} = \frac{T}{v_2}\left.\frac{\partial \psi_t(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} \tag{1}$$

che, introducendo le impedenze caratteristiche Z_1 e Z_2 dei due tratti di corda, diventa:

$$Z_1\left.\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} - Z_1\left.\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} = Z_2\left.\frac{\partial \psi_t(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} \tag{2}$$

Dobbiamo ora tener conto del raccordo delle onde alla giunzione : la somma dell'onda incidente e di quella riflessa deve uguagliare l'onda trasmessa in ogni istante [1] :

$$\psi_i(\overline{x},t) + \psi_r(\overline{x},t) = \psi_t(\overline{x},t) \tag{3}$$

Derivando questa rispetto al tempo si ha:

$$\left.\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} + \left.\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} = \left.\frac{\partial \psi_t(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} \tag{4}$$

Dalle equazioni 2 e 4, si ottiene:

$$Z_1\left.\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} - Z_1\left.\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} = Z_2\left.\frac{\partial \psi_i(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} + Z_2\left.\frac{\partial \psi_r(x+vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} \tag{5}$$

[1] Lo spostamento verticale dell'estremo destro della prima corda è descritto da $\psi_i + \psi_r$; quello dell'estremo sinistro della seconda da ψ_t ma i due descrivono il medesimo spostamento

da cui:

$$\left.\frac{\partial\psi_r(x+vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} = \left.\frac{\partial\psi_i(x-vt)}{\partial t}\right|_{x=\overline{x}} \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{6}$$

Integrando infine questa, si ha:

$$\psi_r(\overline{x},t) = \psi_i(\overline{x},t)\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{7}$$

La costante additiva presente nell'integrazione è stata posta a zero, poiché in assenza di onda incidente non può esservi onda riflessa.

Scriveremo quindi in generale la relazione tra onda riflessa ed onda incidente nel punto di giunzione nella forma:

$$\psi_r(\overline{x},t) = R\,\psi_i(\overline{x},t)$$

dove si è introdotto il *coefficiente di riflessione* R:

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

L'onda trasmessa sarà ovviamente data da:

$$\psi_t(\overline{x},t) = \psi_i(\overline{x},t) + \psi_r(\overline{x},t) = \psi_i(\overline{x},t)\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Esempi:

a Seconda corda avente densità molto grande ($\mu_2 \gg \mu_1$ e quindi $Z_2 \gg Z_1$).

In tal caso troviamo R=-1 e quindi $\psi_r(\overline{x},t) = -\psi i(\overline{x},t)$. Questo è anche il caso di una corda fissata ad un sostegno rigido.

b Seconda corda avente densità molto piccola ($\mu_2 \ll \mu_1$ e quindi $Z_2 \ll Z_1$).

In tal caso troviamo R=+1 e quindi $\psi_r(\overline{x},t) = +\psi_i(\overline{x},t)$. Questo è il caso di una corda il cui estremo sia libero.

c Seconda corda evente densità pari ad un quarto della prima:

$$\mu_2 = \frac{1}{4}\mu_1$$

Cioè:

$$Z_2 = \frac{1}{2}Z_1$$

In tal caso:

$$R = \frac{2Z_2 - Z_2}{2Z_2 + Z_2} = \frac{1}{3}$$

In tal caso l'ampiezza dell'onda riflessa è pari ad un terzo di quella dell'incidente.

d Seconda corda avente densità uguale a quella della prima. In tal caso si ha R=0 e non c'è onda riflessa. Si dice che in tal caso la corda è *adattata* all'estremità.

1 Riflessione di onde su una corda tesa con estremi fissi o liberi

Si consideri una generica onda progressiva in un mezzo di impedenza caratteristica Z_1 che si propaga nel verso positivo dell'asse x :

$$\psi_i(x,t) = Acos(kx - \omega t + \phi) \tag{8}$$

e si supponga che in $x = x_1$ si trovi la superficie di separazione con un mezzo di impedenza Z_2. Si è visto che alla superficie di separazione onda riflessa e onda incidente sono legate dalla seguente relazione :

$$\psi_r(x_1,t) = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\psi_i(x_1,t) \tag{9}$$

inoltre l'onda riflessa ha stessa frequenza di quella incidente, quindi potremo scriverla come :

$$\psi_r(x,t) = A'cos(kx + \omega t + \phi) \tag{10}$$

dove A' viene determinato tenendo conto delle condizioni al contorno.
Nel caso di una corda di lunghezza L, la presenza di una estremità libera o di una estremità fissa è schematizzabile da $Z_2 = 0$ e $Z_2 = \infty$ rispettivamente. Quindi la relazione tra l'onda incidente e l'onda riflessa nel punto di riflessione, nel caso di estremità libera è :

$$\psi_i(L,t) = \psi_r(L,t) \tag{11}$$

nel caso di estremità fissa è :

$$\psi_i(L,t) = -\psi_r(L,t) \tag{12}$$

Discutiamo i seguenti casi per una corda di lunghezza L : entrambe le estremità libere, una estremitá libera ed una fissa, entrambe le estremità fisse.

Estremità libere

Consideriamo un estremo della corda posto in $x = 0$ e l'altro in $x = L$. Se ipotizziamo di sollecitare la corda con una perturbazione armonica di velocitá angolare ω e ampiezza A, la riflessione agli estremi della corda fará si che su di essa siano presenti due onde una che si propaga nel verso positivo dell'asse x (ψ_+) ed una che si propaga nel verso negativo (ψ_-) di stessa frequenza e ampiezza :

$$\psi_+(x,t) = Acos(kx - \omega t + \phi) \tag{13}$$
$$\psi_-(x,t) = Acos(kx + \omega t + \phi) \tag{14}$$

Le relazioni tra le due onde ai due estremi sono :

$$\psi_+(0,t) = \psi_-(0,t) \tag{15}$$
$$\psi_+(L,t) = \psi_-(L,t) \tag{16}$$

quindi abbiamo per $x = 0$:

$$cos(-\omega t + \phi) = cos(+\omega t + \phi) = cos(-\omega t - \phi) \tag{17}$$

da cui si ottiene :

$$\phi = m\pi \tag{18}$$

con $m = 0, 1, 2, 3....$ Per $x = L$:

$$cos(kL - \omega t + \phi) = cos(kL + \omega t + \phi) = cos(-kL - \omega t - \phi) \tag{19}$$

poiché la relazione deve essere valida per ogni t, si ha :

$$kL - \omega t + \phi = -kL - \omega t - \phi + 2n\pi \tag{20}$$

e quindi :

$$2kL = 2n\pi - 2\phi = 2n\pi - 2m\pi \tag{21}$$

poiché questa relazione è valida per ogni m ed n si ha :

$$k = \frac{2n\pi}{L} \tag{22}$$

Tenendo conto di queste relazioni scriviamo la forma della perturbazione totale che si ha sulla corda :

$$\psi_t = Acos(kx - \omega t + \phi) + Acos(kx + \omega t + \phi) = 2Acos(kx + \phi)cos\omega t \tag{23}$$

sostituendo quindi i valori trovati per ϕ e k si ottiene :

$$\psi_t = \pm 2Acos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)cos(\omega t) \tag{24}$$

si vede quindi che sia per $x = 0$ che per $x = L$ l'onda presenta un ventre. Il segno + o − dipende dalla scelta della fase ϕ.

Una estremità libera ed una fissa

Consideriamo l'estremo della corda posto in $x = 0$ fisso. Le condizioni al contorno da imporre in questo caso sono :

$$\psi_+(0,t) = -\psi_-(0,t) \tag{25}$$

$$\psi_+(L,t) = \psi_-(L,t) \tag{26}$$

La condizione ad $x = 0$ é :

$$cos(-\omega t + \phi) = -cos(+\omega t + \phi) \tag{27}$$

e quindi :

$$2\phi = (2m+1)\pi \tag{28}$$

che deve essere valida per $m = 0, 1, 2, ...$ La relazione tra l'onda progressiva e l'onda regressiva in $x = L$ è uguale a quella del caso precedente della corda con entrambe le estremità libere :

$$2kL = 2n\pi - 2\phi \tag{29}$$

sostituendo il valore di ϕ si ottiene :

$$2kL = 2n\pi - (2m+1)\pi \tag{30}$$

valida per tutti gli m ed n interi e positivi o nulli. Quindi si ottiene :

$$k = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \tag{31}$$

La perturbazione totale che percorre l'onda in questo caso si ottiene sostituendo i valori di k e ϕ nella forma dell'onda totale :

$$\psi_t = 2Asin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)cos(\omega t) \tag{32}$$

quindi in $x = 0$ l'onda presenta un nodo ed in $x = L$ un ventre.
L'ultimo caso della corda con entrambi gli estremi fissi si ottiene facilmente in modo analogo.