Prova scritta del corso Fisica Generale IIB - primo appello – 25/1/2002

Esercizio 1

Un ricevitore ed una sorgente di onde sonore (in aria) di frequenza ν_0=2000 Hz, sono poste su di un medesimo asse (asse x).

Inizialmente la sorgente é ferma e l'ampiezza delle oscillazioni é di 10^{-4} m. Se il ricevitore é costituito da un dischetto avente raggio $R = 10$ cm, ed esso é posto ad 80 cm di distanza dalla sorgente, si calcoli la potenza media che esso riceve. Si prenda come densitá dell'aria il valore $\rho_0 = 1.2 Kg$ m^{-3}.

Se ora la sorgente inizia a muoversi di moto sinusoidale lungo il medesimo asse, con frequenza angolare ω ed ampiezza $a = 50$ cm, si calcoli per quale valore di ω la larghezza di banda delle onde che arrivano al ricevitore (definita come $\Delta\nu = \nu_{max} - \nu_{min}$) sará uguale a 200 Hz. Si assuma in ogni caso come velocitá di propagazione del suono: $c = 340$ m/s.

Esercizio 2

Un dipolo è posto a distanza d dal centro di una sfera conduttrice di raggio R connessa a terra, vedi Figura 1. Il dipolo, di intensità p, è disposto lungo la retta che lo congiunge al centro della sfera.

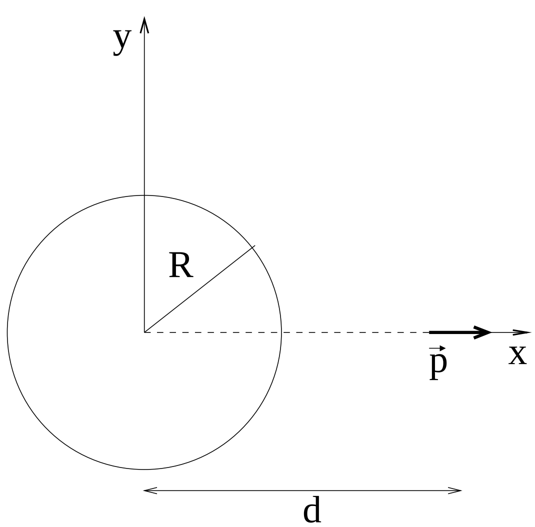


Figure 1:

- Il sistema di cariche immagini equivalente alla distribuzione indotta sulla sfera conduttrice è composto da una carica ed un dipolo. Trovare l'intensità e la posizione della carica e del dipolo immagine.
- Trovare la forza ed il momento agenti sul dipolo.

Esercizio 3

In un condensatore a facce piane e parallele di area A, poste a distanza l, è presente un dielettrico rigido isotropo di spessore d ed uguale area A, con costante dielettrica :

$$\epsilon = \epsilon_0 (\frac{z - h + d}{d}) \qquad h \; < z \; < \; h + d \tag{1}$$

dove z è la distanza dall'armatura inferiore del condensatore (vedi fig. 2).

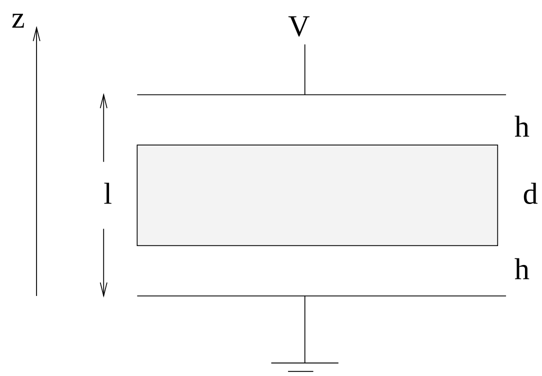


Figure 2:

Il condensatore è mantenuto ad una differenza di potenziale costante V. Si calcolino:

- il campo elettrico in tutto lo spazio;
- la densità di carica sulle armature e la capacità del condensatore;
- fare un grafico del campo elettrico in funzione di z;
- la densità di carica superficiale e volumetrica di polarizzazione;
- la forza elettrostatica esercitata dal solo dielettrico sull'armatura superiore del condensatore;
- la forza elettrostatica totale a cui è sottoposta l'armatura superiore del condensatore.
- Si supponga ora che il dielettrico sia inserito solo per un tratto x all'interno del condensatore, come mostrato in fig. 3. Siano a e b i lati di ciascuna armatura del condensatore (e del dielettrico). Si calcoli la forza di cui risente il dielettrico.

  N.B. : Si trascurino gli effetti al bordo del condensatore.

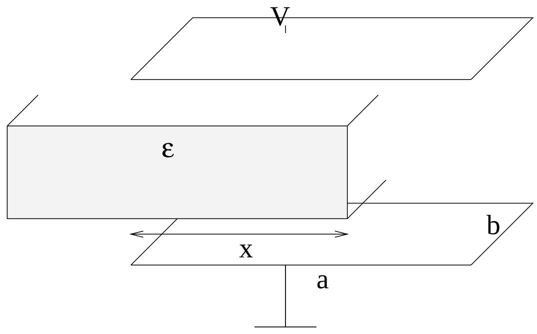


Figure 3:

Soluzione

Esercizio 1

Se A é l'ampiezza di oscillazione ed r la distanza del ricevitore, l'intensitá dell'onda sonora é:

$$I = \left(\frac{A}{r}\right)^2 \frac{\omega^2 \rho_0}{2} c$$

dove:

$$\omega = 2\pi\nu_0 = 2\pi \cdot 2000$$

ed inoltre:

$$\rho_0 = 1.2\, Kg/m^3$$

$$A = 10^{-4} m$$

e c é la velocitá di propagazione dell'onda sonora: $c = 340\, m/s$.

Essendo $R << r$ la potenza ricevuta si può ottenere moltiplicando l'intensità per la superficie del rivelatore :

$$P = \frac{10^{-8}}{0.8^2} \frac{(2\pi \cdot 2000)^2 \cdot 1.2}{2} \cdot 340 \cdot \pi(0.1)^2 = 15.81 W$$

Essendo la sorgente di onde sonore in moto il ricevitore rivela la frequenza del suono ad una frequenza diversa da ν_0 per l'effetto Doppler. La larghezza di banda $\Delta\nu = \nu_{max} - \nu_{min}$ é ottenibile da:

$$\nu_{max} = \nu_0 \frac{c}{c - |v_{max}|} = \nu_0 \frac{c}{c - a\omega}$$

dove: $v = a\omega \cos(\omega t)$ e quindi: $v_{max} = a\omega$. La frequenza minima è data da :

$$\nu_{min} = \nu_0 \frac{c}{c + a\omega}$$

$$\Delta\nu = \nu_{max} - \nu_{min} = \nu_0 c \left(\frac{1}{c - a\omega} - \frac{1}{c + a\omega}\right) =$$

$$= \nu_0 c \frac{2a\omega}{c^2 - a^2\omega^2}$$

Da questa, fissato $\Delta\nu$, si ottiene un'equazione quadratica in ω:

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}a^2\right)\omega^2 + 2ac\omega - \frac{\Delta\nu}{\nu_0}c^2 \;=\; 0$$

Da cui si ottiene:

$$\omega \;=\; \frac{c}{a}\frac{\nu_0}{\Delta\nu}\left(\sqrt{1+(\frac{\Delta\nu}{\nu_0})^2}-1\right)$$

Sostituendo i valori numerici si trova:

$$\omega \;=\; 33.91\; rad/s$$

Esercizio 2

Il dipolo può essere visto come due cariche di intensità $\pm q$ poste a distanza a. Il problema si può quindi risolvere trovando le cariche immagini delle cariche $\pm q$. Indichiamo con q_i^+ la carica immagine di $+q$ e con q_i^- la carica immagine di $-q$. Le cariche immagini hanno intensità :

$$q_i^- \;=\; +q\frac{R}{d-\frac{a}{2}} \tag{2}$$

$$q_i^+ \;=\; -q\frac{R}{d+\frac{a}{2}} \tag{3}$$

e sono poste in :

$$x(q_i^-) \;=\; \frac{R^2}{(d-\frac{a}{2})} \simeq \frac{R^2}{d}\left(1+\frac{a}{2d}\right) \tag{4}$$

$$x(q_i^+) \;=\; \frac{R^2}{(d+\frac{a}{2})} \simeq \frac{R^2}{d}\left(1-\frac{a}{2d}\right) \tag{5}$$

dove nel secondo passaggio il denominatore è stato sviluppato per $d >> a$. Il potenziale generato dalle cariche che formano il dipolo e dalle cariche immagini ha una superficie equipotenziale a potenziale nullo, coincidente con la sfera conduttrice. Il momento di monopolo, cioè la carica totale, del sistema di cariche immagini è :

$$Q_i = q_i^- + q_i^+ \simeq q\frac{R}{d}\left(1+\frac{a}{2d}\right) - q\frac{R}{d}\left(1-\frac{a}{2d}\right) = \frac{qRa}{d^2} = \frac{pR}{d^2} \tag{6}$$

dove è stato utilizzato lo sviluppo al primo ordine in a/d. La carica Q_i è posta in :

$$x(Q_i) = \frac{R^2}{d} \tag{7}$$

Il momento di dipolo del sistema di cariche immagini calcolato rispetto a $x(Q_i)$ é :

$$\vec{p}_i \;=\; q_i^+[x(q_i^+) - x(Q_i)]\hat{x} + q_i^-[x(q_i^-) - x(Q_i)]\hat{x} = \tag{8}$$

$$= \left(-\frac{qR}{d+\frac{a}{2}}\frac{-R^2a}{2d^2} + \frac{qR}{d-\frac{a}{2}}\frac{R^2a}{2d^2}\right)\hat{x} = \tag{9}$$

$$= \frac{aqR^3a}{2d^2}\left(\frac{1}{d+\frac{a}{2}} + \frac{1}{d-\frac{a}{2}}\right)\hat{x} = \tag{10}$$

$$= \frac{aqR^3a}{2d^3}\left(1-\frac{a}{2d}+1+\frac{a}{2d}\right)\hat{x} = \frac{pR^3}{d^3}\hat{x} \tag{11}$$

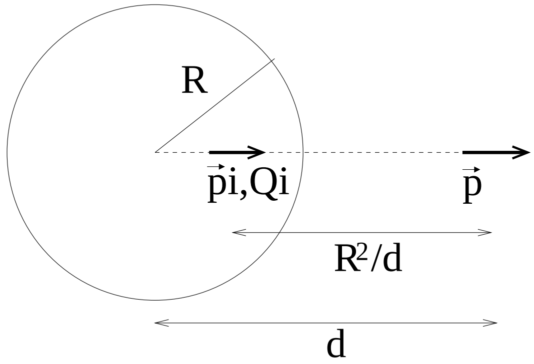


Figure 4:

Quindi si hanno una carica ed un dipolo immagine posti entrambi in R^2/d che con il dipolo reale generano una superficie equipotenziale coincidente con la sfera conduttrice (figura 4).
Alla forza ed al momento agenti sul dipolo contribuiscono : a) l'interazione del dipolo con la carica immagine ($\vec{F}_{Q_i}$) e b) l'interazione con il dipolo immagine ($\vec{F}_{p_i}$). Considerando che il campo generato dalla carica immagine è :

$$\vec{E}_{Q_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_i \frac{\vec{r}}{r^3}$$

dove r é la distanza tra la carica immagine ed il dipolo, il primo dei due contributi alla forza agente sul dipolo é:

$$\vec{F}_{Q_i} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{E}_{Q_i} = p_x \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{r^3}\right]_{y=z=0, x=(d-x(Q_i))} =$$

$$= p_x \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r^3\hat{x} - 3rx\vec{r}}{r^6}\right]_{y=z=0, x=(d-x(Q_i))} = -p_x \frac{2Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x}}{(d - x(Q_i))^3}$$

e quindi :

$$\vec{F}_{Q_i} = -\frac{2p^2 R}{4\pi\epsilon_0 d^2 (d - \frac{R^2}{d})^3} \hat{x} = -\frac{2p^2 Rd}{4\pi\epsilon_0 (d^2 - R^2)^3} \hat{x} \tag{12}$$

La forza dovuta all'interazione con il dipolo immagine é data da :

$$\vec{F}_{p_i} = -\frac{6pp_i}{4\pi\epsilon_0 (d - x(p_i))^4} \hat{x} = -\frac{6p^2 R^3 d}{4\pi\epsilon_0 (d^2 - R^2)^4} \hat{x} \tag{13}$$

Il momento agente sul dipolo, calcolato rispetto al centro di questo, è dato da :

$$\vec{M} = \vec{p} \times E_{Q_i} + \vec{p} \times E_{p_i} \tag{14}$$

Il primo di questi contributiè nullo poichè il campo è parallelo al dipolo. Il secondo contributo è :

$$\vec{M}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (d - x_{p_i})^3} [3(\vec{p}_i \cdot \hat{x})(\vec{p} \times \hat{x}) - (\vec{p} \times \vec{p}_i)] = 0 \tag{15}$$

e quindi anche questo è nullo.

Esercizio 3

Per la simmetria del problema il campo ha come unica componente la componente E_z, ed esiste solo all'interno del condensatore. Dalla relazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libera}$ si ottiene $D_z = \sigma$ costante, dove σ è la densità di carica libera sull'armatura del condensatore a potenziale V. Il campo elettrico sarà quindi (vedi fig.) :

$$\begin{aligned} E_1 = E_3 &= -\sigma/\epsilon_0 \hat{z} \\ E_2(z) &= -\frac{\sigma d}{\epsilon_0 (z-h+d)} \hat{z} \end{aligned}$$

Dalla relazione :

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(l-d) + \int_h^{d+h} \frac{\sigma d}{\epsilon_0 (z-h+d)} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\Big(l - (1 - ln2)d\Big) \tag{16}$$

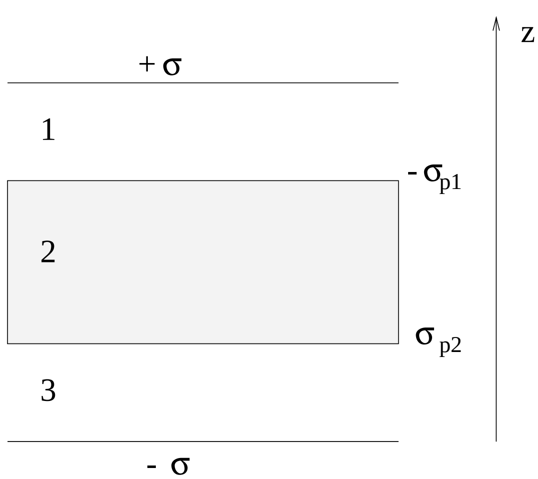
si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\epsilon_0 V}{(l-(1-ln2)d)} \\ C &= \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{(l-(1-ln2)d)} \end{aligned}$$

Il vettore polarizzazione è legato al vettore induzione elettrica dalla seguente relazione :

$$\vec{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \vec{D} = -\frac{(z-h)\sigma}{(z-h)+d} \hat{z} \tag{17}$$

da questo si ottengono le densità superficiali di polarizzazione :



$$\begin{aligned} \sigma_{p1} &= \vec{P} \cdot \hat{n}|_{z=h+d} = -\frac{\sigma}{2} && (18) \\ \sigma_{p2} &= \vec{P} \cdot \hat{m}|_{z=h} = 0 && (19) \\ \rho_{pol} &= - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{d\sigma}{(z-h+d)^2} && (20) \\ & && (21) \end{aligned}$$

dove $\hat{n}$ e $\hat{m}$ sono versori ortogonali alle superfici del dielettrico e con verso uscente dallo stesso. Il campo dovuto alle cariche di polarizzazione del dielettrico è nullo al di fuori di esso, infatti l'integrale della densità di volume di carica è uguale contraria alla densità superficiale di carica. Di conseguenza l'unica forza risentita da un'armatura del condensatore è dovuta alle cariche libere. La forza risentita dall'armatura può essere calcolata differenziando l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore carico. L'energia elettrostatica è data da :

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2(l-(1-ln2)d)} \tag{22}$$

quindi la forza è data da :

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial l}\hat{z} = -\frac{\epsilon_0 AV^2}{2(l-(1-ln2)d)^2} = -\frac{\sigma^2 A}{2\epsilon_0} \tag{23}$$

dove la forza si ottiene come la derivata dell'energia elettrostatica con segno positivo poiché il sistema è a tensione costante. Nel caso in cui il dielettrico sia parzialmente inserito all'interno del conduttore, come nel caso di figura 3 il condensatore è equivalente a due condensatori connessi in parallelo la cui capacità è :

$$C = \frac{\epsilon_0 xb}{(l-(1-ln2)d)} + \frac{\epsilon_0(a-x)b}{l} \tag{24}$$

da cui si ottiene:

$$F_x = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{dx} = \frac{V^2\epsilon_0 b}{2}\left(\frac{1}{l-(1-ln2)d} - \frac{1}{l}\right) \tag{25}$$

che tende a risucchiare il dielettrico all'interno del condensatore.