

Si spieghi in dettaglio il procedimento seguito, il significato dei vari simboli e formule adoperate. Si prega inoltre di fare attenzione alla leggibilità dell'elaborato. Si faccia uso del sistema SI. Gli studenti che abbiano superato i compiti del corso bI (o bII) possono scegliere di risolvere solo i problemi contenuti nella seconda parte (prima parte) del compito.

1 Prima parte

Esercizio 1

Una sottile lastra rettangolare di conducibilità σ , due dei cui lati possono esser considerati infinitamente grandi ha, lungo ciascuno degli altri due lati, elettrodi che mantengono una differenza di potenziale costante e danno luogo ad un campo elettrico E_0 e ad una densità di corrente σE_0 per unità di lunghezza, in prossimità degli elettrodi. Al centro della lastra è praticato un piccolo foro di raggio a , la cui presenza non modifica il campo elettrico in prossimità degli elettrodi. Si calcoli, facendo uso di coordinate (r, θ) , con origine al centro del foro:

1. il potenziale nel generico punto del foro;
2. il potenziale nel generico punto del conduttore;
3. il calore Joule sviluppato per unità di volume e di tempo, in assenza del foro;
4. il calore Joule sviluppato per unità di volume e di tempo, in presenza del foro, nel generico punto (r, θ) .

N.B. Si suggerisce di far uso della soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche, con un potenziale indipendente dalla coordinata z (perpendicolare alla lastra), e di imporre le opportune condizioni al contorno sul bordo del foro ed a grandi distanze (in prossimità degli elettrodi). Si ricorda per comodità che la soluzione generale dell'equazione di Laplace è :

$$V(r, \theta) = (a_0 + b_0 \ln r)(A_0 + B_0 \theta) + \sum_n (a_n r^n + b_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (1)$$

Esercizio 2

Tre conduttori sferici cavi concentrici e scarichi, di spessore trascurabile, hanno raggi R_1, R_2, R_3 , con $R_1 < R_2 < R_3$. Una carica Q viene depositata sul conduttore più interno. In seguito si riempie completamente l'intercapedine compresa tra i conduttori di raggio R_2 ed R_3 con un liquido dielettrico e si osserva che la differenza di potenziale ΔV_{23} cala di un fattore 3. Calcolare :

- il valore della costante dielettrica del materiale;
- la variazione di energia elettrostatica avvenuta nel processo di riempimento;
- le densità di carica di polarizzazione di superficie e di volume.

Determinare se alla fine del processo di riempimento i potenziali dei conduttori di raggio R_1 , R_2 ed R_3 sono cambiati e se è cambiata la differenza di potenziale ΔV_{12} .

2 Seconda parte

Esercizio 3

Si consideri un cilindro cavo di lunghezza h e raggio r , con $h \gg r$, e densità superficiale di carica σ . Il cilindro ruota attorno al proprio asse con frequenza ω_0 . All'interno del cilindro a metà altezza vi è una piccola spira superconduttrice di raggio a ($a \ll r$), ed induttanza l , concentrica al cilindro. La spira è percorsa da una corrente i_0 costante nello stesso verso di rotazione del cilindro (si assuma antiorario). Si consideri un sistema di riferimento con asse z come asse di rotazione del cilindro e origine nel punto di mezzo del cilindro.

(a) Si calcoli il flusso del campo magnetico della spira attraverso il cilindro (cioè la somma dei flussi attraverso ogni singola "spira" del cilindro).

Si supponga che la frequenza di rotazione del cilindro diminuisca con la legge $\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau}$, dove τ è un tempo caratteristico del sistema, noto, e molto grande (in modo che la variazione della frequenza sia molto lenta). Ad un dato istante t_0 vi è un istantaneo innalzamento della temperatura (senza discontinuità nella corrente della spira) per cui la spira cessa di essere superconduttrice ed acquista una resistenza R . Si calcolino:

(b) l'andamento della corrente nella spira in funzione del tempo (*Suggerimento: si cerchi per $t > t_0$ una soluzione della forma $i(t) = A_1 e^{-R(t-t_0)/l} + A_2 e^{-t/\tau}$*)

Esercizio 4

Un dipolo elettrico, di momento $p = 10^{-8}$ C m, inizialmente diretto lungo l'asse z positivo di un sistema di assi cartesiani e posto nell'origine, ruota in verso antiorario attorno all'asse y , con velocità angolare $\omega = 10^8$ rad/s. Si calcoli, in un punto posto nel piano x - z , ad una distanza $D=2$ m dal dipolo, ad un angolo polare $\theta = 30^\circ$ rispetto al medesimo sistema:

1. I campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dell'onda
2. L'energia media trasportata dall'onda per unità di superficie e di tempo, perpendicolarmente alla direzione di propagazione, nel medesimo punto
3. La forza media che l'onda esercita su di un dischetto metallico, avente area 1 cm^2 , posto nel medesimo punto perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda.

Soluzioni

Esercizio 1

Se scegliamo l'asse z perpendicolare agli elettrodi, il potenziale a grandi distanze dovrà essere del tipo:

$$V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

L'equazione di Laplace in coordinate cilindriche é:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

Le cui soluzioni sono:

$$1, \ln r, r^n \cos(n\theta), r^{-n} \cos(n\theta), r^n \sin(n\theta), r^{-n} \sin(n\theta)$$

Le soluzioni del tipo $\sin$ debbono essere scartate poiché non sono simmetriche rispetto ad uno scambio $\theta \rightarrow -\theta$, che é una simmetria del sistema. La soluzione $\ln r$ non é accettabile all'interno del foro, poiché diverge per $r \rightarrow 0$. Essa non é accettabile nel conduttore, poiché darebbe un campo decrescente con r ed indipendente da θ . Le soluzioni $\cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta)$ con $n > 1$ darebbero una dipendenza angolare oscillante, che non corrisponde alla simmetria del problema. Nel foro la soluzione proporzionale ad $1/r$ darebbe una singolarità. Rimane così:

Nel conduttore:

$$V^c(r, \theta) = A + \frac{B}{r} \cos \theta + C r \cos \theta$$

Nel foro:

$$V^f(r, \theta) = A_1 + C_1 r \cos \theta$$

Le condizioni al contorno da imporre sono:

- continuità della componente tangenziale di $\vec{E}$ sul bordo del foro
- continuità del potenziale per $r=a$
- $E_r = 0$ nel conduttore sul bordo del foro, cioè per $r=a$
- $V^c(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta$ per $r \rightarrow \infty$

Imponendo che sia $E_r = 0$ nel conduttore, per $r=a$ troviamo

$$-\frac{B}{a^2} \cos \theta + C \cos \theta = 0$$

da cui:

$$C = \frac{B}{a^2}$$

Si ha quindi:

$$V^c(r, \theta) = A + B \cos \theta \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{a^2} \right)$$

Imponiamo ora la quarta delle condizioni scritte:

$$A + B \cos \theta \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{a^2} \right) \rightarrow -E_0 r \cos \theta$$

per $r \rightarrow \infty$. Si ottiene:

$$A = 0$$

$$B = -E_0 a^2$$

per cui:

$$V^c(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Imponiamo infine la continuità della componente tangenziale di $\vec{E}$:

$$\frac{\partial V^f}{\partial \theta} = \frac{\partial V^c}{\partial \theta}$$

per $r = a$. Si trova:

$$C_1 = -2E_0$$

Imponiamo ora la continuità del potenziale per $r=a$:

$$V^c(r, \theta) = -2aE_0 \cos \theta = V^f(r, \theta) = A_1 - 2E_0 a \cos \theta$$

da cui:

$$A_1 = 0$$

Le soluzioni sono quindi:

$$V^c(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$V^f(r, \theta) = -2E_0 r \cos \theta$$

Il calore sviluppato per unità di volume e di tempo é:

$$w = E \cdot J$$

dove:

$$J = \sigma E$$

per cui:

$$w = \sigma E^2$$

Il campo $\vec{E}$ é dato da:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

con:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}$$

Si trova:

$$\vec{E} = -\hat{r}E_0 \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \hat{\theta}E_0 \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Da questa si ottiene:

$$E^2 = E_0^2 \left\{ 1 + \frac{a^4}{r^4} - 2\frac{a^2}{r^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right\} = E_0^2 \left\{ 1\frac{a^4}{r^4} - 2\frac{a^2}{r^2} \cos(2\theta) \right\}$$

e quindi:

$$w = \sigma E^2$$

Esercizio 2

Prendendo come zero del potenziale il potenziale all'infinito si può scrivere il potenziale nelle varie zone come :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1} \quad r \leq R_1 \quad (2)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad r \geq R_1 \quad (3)$$

dove Q indica la carica disposta uniformemente sulla superficie del conduttore di raggio R_1 . La differenza di potenziale ΔV_{23} è :

$$\Delta V_{23} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} \right) \quad (4)$$

che nel caso in cui l'intercapedine è riempita di dielettrico diventa :

$$\Delta V'_{23} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} \right) = \frac{\Delta V_{23}}{\epsilon_r} = \frac{\Delta V_{23}}{3} \quad (5)$$

quindi si ottiene :

$$\epsilon_3 = 3 \quad (6)$$

La variazione di energia elettrica è data da :

$$\Delta U = U_s - U_c \quad (7)$$

dove U_s ed U_c indicano rispettivamente l'energia elettrostatica senza e con dielettrico nell'intercapedine. La presenza del dielettrico modifica il campo elettrico solo nella regione di spazio compresa tra R_2 ed R_3 . Posso scrivere quindi la variazione di densità di energia elettrostatica come :

$$\Delta u = \left(\frac{\epsilon_0 E_s^2}{2} - \frac{\epsilon E_c^2}{2} \right) = \frac{\epsilon_0 E_s}{2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (8)$$

dove si è indicato con E_s ed E_c i campi elettrici con e senza dielettrico nella regione $R_2 < r < R_3$ e si è sfruttata la relazione :

$$E_c = \frac{E_s}{\epsilon_r} \quad (9)$$

Il campo elettrico E_s può essere scritto come :

$$E_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (10)$$

Quindi la variazione di densità di energia è :

$$\Delta u = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\epsilon_0 E_s^2}{2} = \frac{(\epsilon_r - 1)\epsilon_0}{2\epsilon_r} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \quad (11)$$

e quindi integrando la densità di energia sul guscio sferico tra R_2 ed R_3 si ottiene :

$$\Delta U = \frac{(\epsilon_r - 1)}{8\pi\epsilon} Q^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = \frac{Q^2}{12\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \quad (12)$$

La densità di carica di polarizzazione di volume è nulla mentra la densità di carica superficiale sulle superfici di raggi R_2 ed R_3 sono :

$$\sigma_P(R_2) = -\vec{P} \cdot \hat{r} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_2^2} \quad (13)$$

$$\sigma_P(R_3) = \vec{P} \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_3^2} \quad (14)$$

Il potenziale per $r > R_3$ non varia e neanche la differenza di potenziale tra R_1 ed R_2 .

Esercizio 3

1. Il cilindro in rotazione è equivalente ad un solenoide con densità di corrente superficiale $J = \sigma\omega_0 r$, corrente $I_0 = Jh$, e quindi genera un campo magnetico sull'asse z (asse del cilindro) nel punto di mezzo del cilindro (dove è la spira) $B = \mu_0 J = \mu_0 \sigma \omega_0 r$.

Il flusso attraverso il solenoide è $\Phi(B_{spira}) = Mi_0$, mentre quello attraverso la spira é: $\mu_0 J \pi a^2 = MJh$. Quest'ultima relazione ci permette di calcolare il coefficiente di mutua induzione M :

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2}{h} \quad (15)$$

di conseguenza:

$$\Phi(B_{spira}) = \frac{\mu_0 \pi a^2 i_0}{h} \quad (16)$$

2. Per $t \leq t_0$ (*fase 1*) la spira è superconduttrice, quindi:

$$l \frac{di}{dt} + M \frac{dI}{dt} = 0 \quad (17)$$

dove:

$$I(t) = \sigma r h \omega_0 e^{-t/\tau}$$

La soluzione é:

$$i_1(t) \equiv i(t) = i(0) + \frac{M \sigma r h \omega_0}{l} (1 - e^{-t/\tau}) = i_0 + \frac{\mu_0 \pi a^2 \sigma r \omega_0}{l} (1 - e^{-t/\tau})$$

Per $t \geq t_0$ (*fase 2*) l'equazione é:

$$R i_2 + l \frac{di_2}{dt} = -M \frac{dI}{dt} \quad (18)$$

La soluzione può essere ottenuta come somma di due termini che corrispondono alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$R i_2 + l \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (19)$$

e a una soluzione particolare dell'equazione 18. L'unicità della soluzione è fissata dalla continuità della corrente a t_0 .

Una soluzione della 19 è

$$i_2(t) = i'_0 e^{-Rt/l} \quad (20)$$

Una soluzione particolare della 18 può essere cercata nella forma $i_2^{part}(t) = A e^{-t/\tau}$, da cui sostituendo nella 18 si ottiene:

$$A = \frac{M/\tau I_0}{R - l/\tau} \quad (21)$$

dove:

$$I_0 = \sigma \omega_0 r h$$

e quindi:

$$A = \frac{\mu_0 \pi a^2 \sigma \omega_0 r}{R\tau - l}$$

e quindi la soluzione completa è:

$$i_2(t) = i'_0 e^{-Rt/l} + \frac{M/\tau I_0}{R - l/\tau} e^{-t/\tau} \quad (22)$$

Imponendo ora la condizione al contorno $i_2(t_0) = i_1(t_0)$, otteniamo:

$$i_1(t_0) = i'_0 e^{-Rt_0/l} + A e^{-t_0/\tau} \quad (23)$$

ossia:

$$i'_0 = (i_1(t_0) - A e^{-t_0/\tau}) e^{Rt_0/l} \quad (24)$$

e quindi la corrente per $t \geq t_0$ può essere scritta come:

$$i_2(t) = (i_1(t_0) - A e^{-t_0/\tau}) e^{-R(t-t_0)/l} + A e^{-t/\tau} \quad (25)$$

dove:

$$i_1(t_0) = i_0 + \frac{M I_0}{l} (1 - e^{-t_0/\tau}) \quad (26)$$

$$A = \frac{M/\tau I_0}{R - l/\tau} \quad (27)$$

$$(28)$$

Esercizio 4

Facciamo uso, come riferimento, della figura 1.

Le componenti z ed x del momento di dipolo sono date da:

$$p_z = p \cos(\omega t) \quad , \quad p_x = p \sin(\omega t)$$

Le derivate seconde di queste rispetto al tempo:

$$\ddot{p}_z = -p\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{p}_x = -p\omega^2 \sin(\omega t)$$

Alla distanza di 2 m il campo prodotto non si limita al solo termine di radiazione, poiché la lunghezza d'onda è: $\lambda = 2\pi c/\omega = 18.8 \text{ m}$. Tuttavia, poiché alla potenza trasportata contribuiscono solo i termini in $\ddot{p}$, potremo limitarci a calcolare le corrispondenti componenti dei campi, cioè la componente ϕ di $\vec{B}$ e quella θ di $\vec{E}$. Queste, per un dipolo oscillante lungo l'asse z, sono date da:

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}_z}{rc} \sin(\theta)$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}_z}{rc^2} \sin(\theta)$$

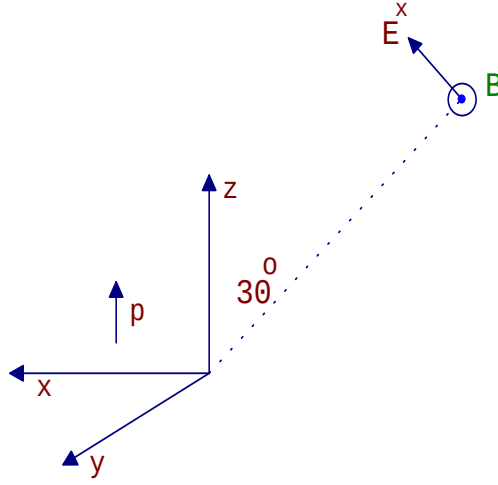


Figura 1:

Nel caso in esame, i campi sono generati da un dipolo oscillante lungo l'asse z e da uno oscillante lungo x. I campi prodotti dal primo nel punto scelto sono:

$$B_{\phi}^z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p\omega^2}{rc} \cos(\omega t) \sin(\theta)$$

$$E_{\theta}^z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\omega^2}{rc^2} \cos(\omega t) \sin(\theta)$$

I campi prodotti dal secondo sono:

$$B_{\phi}^x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p\omega^2}{rc} \sin(\omega t) \sin(\pi/2 + \theta) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p\omega^2}{rc} \sin(\omega t) \cos(\theta)$$

$$E_{\theta}^x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\omega^2}{rc^2} \sin(\omega t) \sin(\pi/2 + \theta) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\omega^2}{rc^2} \sin(\omega t) \cos(\theta)$$

Il campo vettore B complessivo sarà allora:

$$B_{\phi} = B_{\phi}^z + B_{\phi}^x = -\frac{\mu_0 p \omega^2}{4\pi r c} \sin(\omega t + \theta)$$

e quello E:

$$E_{\theta} = E_{\theta}^z + E_{\theta}^x = -\frac{p \omega^2}{4\pi \epsilon_0 r c^2} \sin(\omega t + \theta)$$

Possiamo verificare che é:

$$\frac{E}{B} = c$$

Il vettore di Poynting dell'onda sarà ora:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{p^2 \omega^4}{(4\pi)^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \sin^2(\omega t + \theta) \hat{r}$$

Il valor medio del vettore di Poynting, cioè l'energia media per unità di tempo e di superficie, attraverso una superficie normale alla direzione di propagazione dell'onda é:

$$\frac{p^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 D^2 c^3}$$

Sostituendo i valori numerici si trova:

$$S = 0.033 \text{ Wm}^{-2}$$

La forza agente sul dischetto é poi data da:

$$F = \frac{2 \cdot S}{c} A = 2.214 \cdot 10^{-14}$$