Corso di Fisica bI/bII: Appello del 23 Settembre 2002

Si spieghi in dettaglio il procedimento seguito, il significato dei vari simboli e formule adoperate. Si prega inoltre di fare attenzione alla leggibilitá *dell'elaborato. Si faccia uso del sistema SI. Gli studenti che abbiano superato i compitini del corso bI (o bII) possono scegliere di risolvere solo i problemi contenuti nella seconda parte (prima parte) del compito.*

1 Fisica bI

Esercizio 1

Una corda metallica tesa tra due estremi fissi ha una densitá lineare di massa pari a $\mu = 2.5\ 10^{-4}\ Kg/m$ e lunghezza L=0.5 m. La tensione T cui é sottoposta é di 15.63 N.

(a) Si calcoli la frequenza del modo fondamentale

(b) Se ora la tensione viene aumentata del 70% e la corda accorciata del 35%, si calcoli il fattore di cui varia la frequenza del modo fondamentale (per tale calcolo si supponga di non conoscere alcuno dei parametri L, T, μ).

Esercizio 2

Un condensatore a facce piane e parallele, avente distanza tra le armature pari a d, altezza L e profonditá p giace con le armature disposte nel piano verticale. Un parallelepipedo di un materiale dielettrico, di costante dielettrica relativa ϵ_r, avente dimensioni uguali a quelle interne del condensatore, é appoggiato su di un piano orizzontale come mostrato in figura 1. La massa del parallelepipedo é uguale a λp, con λ una costante nota. Il condensatore é posto nella posizione iniziale indicata nella parte sinistra della figura, mentre il parallelepipedo dielettrico é inizialmente vincolato a rimanere sul piano. Le armature del condensatore vengono collegate, per un breve intervallo di tempo, ad una batteria che fornisce una d.d.p pari a V_0 e poi scollegate da questa. Successivamente il parallelepipedo viene lasciato libero.

(a) Si calcoli la relazione che deve intercorrere tra V_0, λ e d, se si vuole che il parallelepipedo sia (almeno in parte) "risucchiato" all'interno del condensatore.

(b) Se tale condizione é soddisfatta, si calcoli l'altezza massima x (vedasi la parte destra della figura) alla quale il parallelepipedo risalirá nel condensatore.

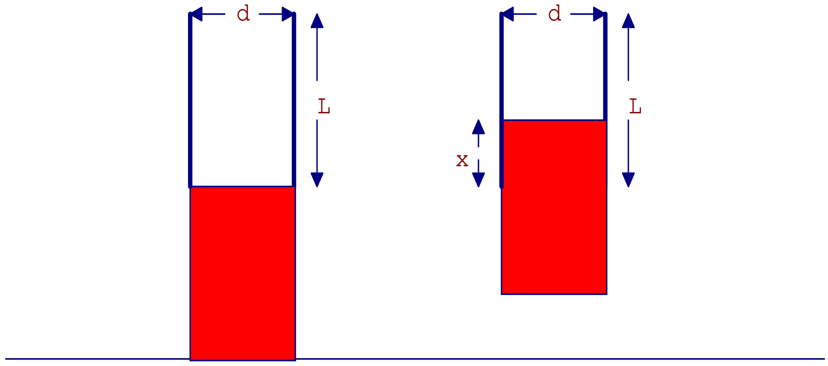

Figura 1:

2 Fisica bII

Esercizio 1

Un circuito rigido (non deformabile) a forma circolare di raggio a, con induttanza e resistenza trascurabili, è collegato al proprio centro attraverso due resistenze uguali, ciascuna di valore R e lunghezza a. Tale circuito, di momento di inerzia I, è posto su di un piano e viene connesso ad un generatore di corrente costante i, attraverso tre contatti con attrito trascurabile di cui uno al centro e due posti lungo la sua circonferenza, come mostrato in figura.

Si assuma che il verso positivo della corrente sia quello indicato in figura, ossia dal centro verso l'esterno. Il circuito è libero di ruotare sul piano con attrito trascurabile ed il sistema e' immerso in un campo magnetico costante e uniforme B_0 perpendicolare al piano ed avente il verso mostrato in figura.

1. Inizialmente il cerchio e' mantenuto fermo sul piano, nella posizione indicata. Si calcoli il momento della forza applicata.

2. Successivamente si lascia il circuito libero di ruotare. Si calcoli la frequenza di rotazione e la potenza sviluppata dal generatore in funzione del tempo.

   Si dica se a parte il calore perso per effetto joule, tale potenza è maggiore, minore o uguale alla potenza meccanica spesa per far ruotare il circuito.

3. Ad un istante t_0 il campo magnetico esterno viene diminuito molto lentamente, fino ad annullarlo, secondo la legge $B(t) = B_0 - \alpha(t - t_0)$, con α molto piccolo. Si calcoli il valore asintotico della frequenza di rotazione, trascurando l'eventuale effetto dovuto alla presenza del campo elettrico indotto dalla variazione temporale di B.

4. Si supponga ora di non trascurare l'eventuale effetto dovuto al campo elettrico indotto dalla variazione temporale di B. Si dica, con motivazioni precise, se la po-

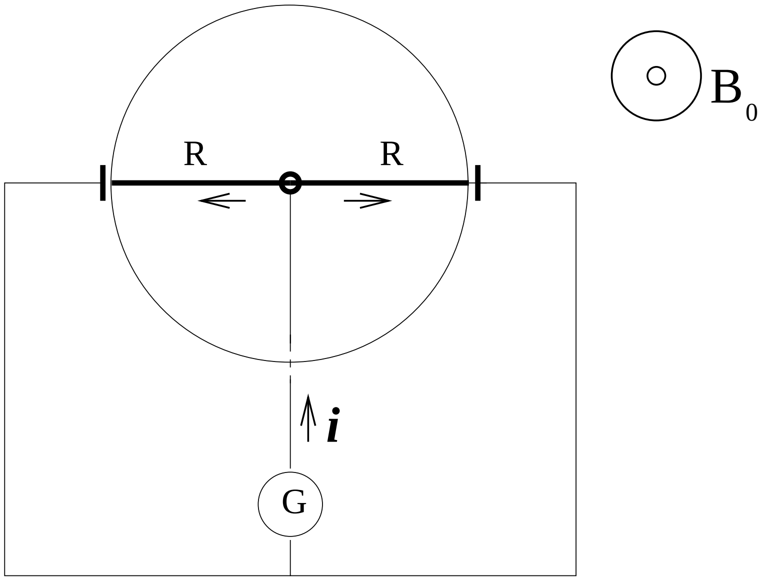

Figura 2:

tenza sviluppata dal generatore (a parte il calore perso per effetto joule) è maggiore, minore o uguale alla potenza meccanica spesa per far ruotare il circuito.

Esercizio 2

Un particella di carica e e massa m viene investita da un'onda elettromagnetica piana di lunghezza d'onda λ ed intensitá I che si propaga nel vuoto. Trascurando l'effetto del campo magnetico dell'onda sul moto della particella ed ammettendo che le dimensioni della particella siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione, si calcoli :

- l'equazione che descrive il campo elettrico dell'onda in funzione delle variabili date;
- la potenza media irraggiata dalla particella oscillante.

Si consideri ora la particella legata elasticamente da una forza diretta nella stessa direzione del campo elettrico dell'onda piana, in modo che la frequenza naturale sia ω_0. Si calcoli :

- la potenza media iraggiata dalla particella trascurando anche in questo caso l'effetto del campo magnetico.

soluzioni

3 Fisica bI

Esercizio 1

La lunghezza d'onda λ corrispondente al modo fondamentale é:

$$\lambda = 2L$$

La velocitá di propagazione dell'onda é:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ne segue che la frequenza del modo fondamentale é:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{2L}$$

Facendo uso dei dati, si ottiene:

$$\nu = 250\ Hz$$

Se la lunghezza della corda diventa L_1 e la tensione T_1 la nuova frequenza sará:

$$\nu_1 = \frac{v_1}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{T_1}{\mu}}\frac{1}{2L_1}$$

dove é:

$$T_1 = T + \Delta T$$

$$L_1 = L - \Delta L$$

per cui:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{T + \Delta T}{\mu}}\frac{1}{2(L - \Delta L)}$$

e quindi:

$$\frac{\nu_1}{\nu} = \sqrt{\frac{T + \Delta T}{\mu}}\frac{1}{2(L - \Delta L)}\sqrt{\frac{\mu}{T}}2L \ = \ \frac{\sqrt{1 + \Delta T/\Delta T}}{1 - \Delta L/L} \ = \ \frac{\sqrt{1.0 + 0.7}}{1 - 0.35} = 2$$

Esercizio 2

Quando il condensatore é collegato al generatore, la carica sulle armature sará:

$$Q = C_0 V_0 = \epsilon_0 \frac{Lp}{d} V_0$$

dove con C_0 abbiamo indicato la capacitá del condensatore senza il dielettrico. La densitá superficiale di carica é allora:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{Lp} = \frac{\epsilon_0 V_0}{d}$$

mentre il campo elettrico tra le armature é:

$$E_0 = \frac{V_0}{d}$$

Ammettendo che il dielettrico si sia sollevato di un tratto x, il condensatore sará equivalente a due condensatori in parallelo, di capacitá C_x e C_{L-x} dove la prima é quella relativa alla parte occupata dal dielettrico, la seconda quella relativa alla parte restante. Le due capacitá sono:

$$C_x = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{xp}{d}$$

$$C_{L-x} = \epsilon_0 \frac{(L-x)p}{d}$$

L'energia elettrostatica é allora:

$$U = \frac{Q^2}{2} \frac{1}{C_x + C_{L-x}} = \frac{Q^2}{2} \frac{1}{\frac{\epsilon_0}{d}[(L-x)p + \epsilon_r p x]}$$

Effettuando le sostituzioni, si trova:

$$U = \frac{\epsilon_0 p L^2 V_0^2}{2d} \frac{1}{\epsilon_r x + L - x}$$

Il modulo della forza elettrica agente sul dielettrico (rivolta verso l'alto) é quindi:

$$F = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\epsilon_0 p}{2d} L^2 V_0^2 \frac{\epsilon_r - 1}{(\epsilon_r x + L - x)^2}$$

La forza agente sul dielettrico nella posizione iniziale é data da questa espressione, calcolata per x=0, cioé:

$$\frac{\epsilon_0 p V_0^2}{2d}(\epsilon_r - 1)$$

Il dilettrico potrá sollevarsi se tale forza é maggiore di quella di gravita: $\lambda p g$, cioé se:

$$\frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)V_0^2}{2d\lambda g} \geq 1$$

Se tale condizione é soddisfatta, il dielettrico si solleverá. L'altezza massima raggiunta sará ottenibile dal bilancio tra energia potenziale elettrostatica ed energia potenziale gravitazionale:

$$\lambda p g x = \frac{\epsilon_0 L^2 p V_0^2}{2d} \frac{1}{\epsilon_r x + L - x} - \frac{\epsilon_0 L^2 p V_0^2}{2d} \frac{1}{L} =$$
$$= \frac{\epsilon_0 L^2 p V_0^2}{2d} \left(\frac{1}{L + x(\epsilon_r - 1)} - \frac{1}{L} \right)$$

Da questa si ottiene poi:

$$x = \frac{L}{\epsilon_r - 1} \left[\frac{\epsilon_0 V_0^2 (\epsilon_r - 1) - 2d\lambda g}{2d\lambda g} \right]$$

4 Fisica BII

Esercizio 1

1. Per mantenere il disco fermo occorre bilanciare il momento della forza prodotto dal campo magnetico esterno (che tende a farlo ruotare in senso orario):

$$M_{est.} = -M_B = -2\int_0^a i/2\vec{r} \times (\vec{dr} \times \vec{B}) = i/2Ba^2\hat{z} \tag{1}$$

2. quando il disco viene liberato esso inizierà a ruotare. Per calcolare la frequenza di rotazione applichiamo la seconda equazione della dinamica:

$$I d\omega/dt = i/2Ba^2 \tag{2}$$

da cui, risolvendo con la condizione che $\omega(0) = 0$, si ottiene:

$$\omega(t) = \frac{a^2 Bit}{2I} \tag{3}$$

3. La potenza sviluppata dal generatore per mantenere la corrente costante è:

$$P_G = R/2i^2 - fi \tag{4}$$

dove f è la forza elettromotrice dovuta a B sul singolo ramo del circuito. Essa può essere calcolata in due modi:

(a) come integrale di linea del campo effettivo E^* prodotto dalla componente della forza di Lorentz nel tratto di lunghezza a:

$$f = \int \vec{E^*}\vec{dl} = \int_0^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \int_0^a \omega r B dr = -\omega a^2 B/2 \tag{5}$$

Tale forza è negativa, ossia opposta alla direzione della corrente;

(b) come variazione del flusso di B:

$$f = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{st} \tag{6}$$

dove $dS = d\theta a^2/2$ è l'area spazzata dal moto rotatorio del disco, nell'intervallo dt. Si ottiene quindi:

$$f = -\omega a^2 B/2 \tag{7}$$

che agisce come forza frenante in direzione contraria alla corrente.

Si ricava quindi:

$$P_G = R/2i^2 + \omega a^2 B/2i \tag{8}$$

dove il secondo termine uguaglia, come atteso, la potenza meccanica necessaria a mantenere in moto il circuito, uguale a ωM_B.

4. consideriamo ora il caso in cui B varia nel tempo, trascurando il campo elettrico indotto. Sia ω_0 la frequenza di rotazione all'istante $t = t_0$:

$$\omega_0 = a^2 B_0 i t_0 / 2I \tag{9}$$

Integrando l'equazione di moto del circuito circolare tra il tempo t_0 e T si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_0}^{\omega} I d\omega &= \int_{t_0}^{T} \frac{ia^2}{2}(B_0 - \alpha(t - t_0))dt \\
I(\omega - \omega_0) &= ia^2/2\Big(B_0(T - t_0) - \alpha/2(T - t_0)^2\Big) \\
\omega(T) &= \omega_0 + ia^2/2I\Big(B_0(T - t_0) - \alpha/2(T - t_0)^2\Big)
\end{aligned}$$

La frequenza di rotazione asintontica ω_∞ è data dal valore di ω al tempo $T = t_0 + B_0/\alpha$:

$$\omega_\infty = ia^2/2I\Big(B_0 t_0 + \frac{B_0^2}{2\alpha}\Big)$$

5. Per valutare quantitativamente l'effetto del campo elettrico indotto dalla variazione temporale di B sul circuito, occorre fare delle ipotesi aggiuntive sulla distribuzione spaziale di B. Nel caso in cui essa abbia simmetria cilindrica e il circuito sia posto nella sua parte centrale, alllora la variazione temporale di B produce un campo elettrico che per la simmetria del problema dipende solo da r e le cui linee di forza sono delle circonferenze concentriche:

$$\int E_d^* dl = -\int B ds \rightarrow E_d^*(r) = -\frac{dB}{dt} r/2 \tag{10}$$

Questo campo non agisce nè sui raggi del circuito, in quanto ortogonale ad essi, nè sulla circonferenza del circuito, essendo essa a resistenza 0 e quindi equipotenziale. Di conseguenza la variazione di B non produce alcuna forza elettromotrice indotta in più a quella dovuta alla forza di Lorentz. Di conseguenza anche in questo caso la potenza del generatore (a parte il calore dissipato per effetto joule) è spesa per mantenere in moto il circuito e quindi uguaglia la potenza meccanica.

Esercizio 2

Assumiamo che l'onda piana si propaghi lungo l'asse x di un sistema di assi cartesiani, con il vettore campo elettrico parallelo all'asse z e che la particella sia posta nell'origine del sistema di coordinate. Il vettore d'onda e la frequenza sono dati da :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{x} \tag{11}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{12}$$

mentre l'ampiezza massima del campo elettrico é :

$$E_0 = \sqrt{2I\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \tag{13}$$

quindi l'equazione del campo elettrico é :

$$E_z(x,t) = \sqrt{2I\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi c}{\lambda}t\right) = E_0cos(kx - \omega t) \tag{14}$$

La particella investita dall'onda si muove di moto oscillatorio lungo la direzione del campo elettrico con accelerazione :

$$\vec{a}(t) = \frac{eE_z}{m} = \frac{e}{m}\sqrt{2I\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}cos\left(-\frac{2\pi c}{\lambda}t\right)\hat{z} \tag{15}$$

Utilizzando la formula di Larmor la potenza istantanea irradiata in tutto lo spazio dalla particella é data da :

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^4E_z^2}{3c^3m^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^4}{3c^3m^2}E_0^2cos^2\omega t \tag{16}$$

e mediando su un periodo si ottiene un fattore 1/2 dal termine $cos^2\omega t$ quindi :

$$< P >_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^4I}{3c^3m^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\mu_0^2}{6\pi}\frac{e^4}{m^2}I \tag{17}$$

Assumo ora che la particella sia legata elasticamente. Applicando la prima equazione cardinale ottengo :

$$ma_z = eE_z - \omega_0^2mz = eE_0cos\frac{2\pi c}{\lambda}t - \omega_0^2mz = eE_0cos\omega t - \omega_0^2mz \tag{18}$$

Cerco una soluzione della forma :

$$z(t) = z_0cos\frac{2\pi c}{\lambda}t = z_0cos\omega t \tag{19}$$

ed ottengo :

$$z(t) = \frac{e}{m}\frac{E_0cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{20}$$

quindi l'accelerazione é :

$$a(t) = \frac{e}{m}\frac{\omega^2E_0cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{21}$$

e la potenza media irradiata in tutto lo spazio é :

$$< P >_T = \frac{\mu_0}{6\pi}\frac{e^4}{m^2}I\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tag{22}$$

Si vede che mentre nel primo caso la potenza irradiata é indipendente dalla lunghezza d'onda dell'onda incidente nel secondo caso si ha una dipendenza dalla lunghezza d'onda e per lunghezze d'onda dell'onda incidente vicine alla lunghezza d'onda naturale si ha un massimo della potenza irradiata.