Compito di Fisica II

3 Luglio 2000

Esercizio I

Si consideri una sfera conduttrice di raggio R collegata a terra e fissa. Una carica q di massa m viene lanciata verso la sfera con velocitá v_0 e con un parametro di impatto $b > R$ (vedi figura 1) rispetto al centro della sfera.

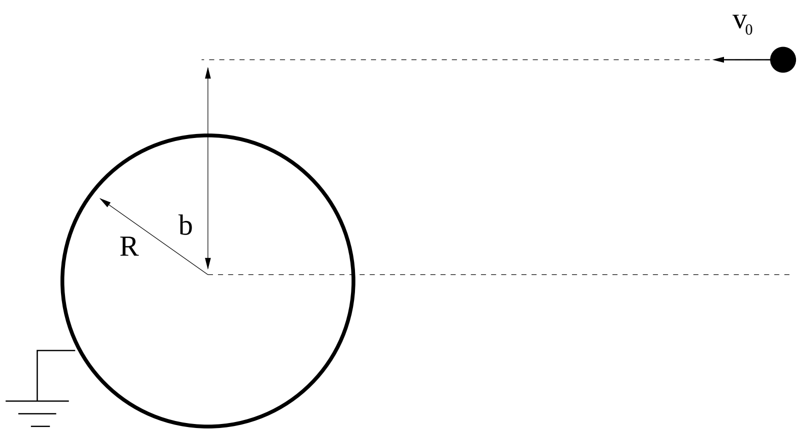

Figure 1: Esercizio - I

1. si scriva la forza che agisce sulla carica;
2. si ricavi dalla forza una espressione per l'energia potenziale della particella;
3. si scrivano le equazioni di conservazione dell'energia e del momento angolare;
4. si calcoli la distanza di minimo avvicinamento tra la sfera e la particella;
5. **Facoltativo** si discuta il significato delle diverse soluzioni ottenute per la distanza minima;
6. **Facoltativo** come si modifica la soluzione del problema nel caso in cui la sfera é isolata e con carica costante Q_0 ?

Esercizio II

L'effetto Doppler ha reso possibile la scoperta di stelle doppie tanto distanti da rendere impossibile la risoluzione dei due oggetti che le costituiscono mediante telescopi. Le linee spettrali di tali stelle, divengono periodicamente dei doppietti, il che ci dice che la luce proviene da due oggetti che ruotano attorno al loro centro di massa. Si supponga che il piano di rotazione formi un angolo di $0°$ con la retta congiungente il punto di osservazione con il centro del sistema binario e che le due stelle abbiano masse uguali. Nell'ipotesi di osservare uno splitting delle righe in doppietti massimo e pari a $\Delta\lambda/\lambda = 1.2\,10^{-4}$ ad intervalli di tempo $\Delta t = 30$ giorni, si calcoli:

1. la distanza 2R tra le due stelle del doppietto;
2. le loro masse.

Esercizio III

Un filo di lunghezza l e massa m, su cui è depositata una carica elettrica con densità lineare λ, è posto in rotazione attorno ad un asse z parallelo al filo, a distanza dall'asse z, $a \ll l$, con una velocità angolare che varia linearmente tra 0 ed ω_0 in un tempo T e poi resta costante (Figura 2). La direzione di rotazione del filo é in senso antiorario rispetto all'asse z.
Un cilindretto non conduttore di raggio $b \ll a$, il cui asse coincide con l'asse z, è libero di ruotare attorno al medesimo asse (con momento di inerzia I). Sulla superficie del cilindretto è distribuita uniformemente una carica Q.

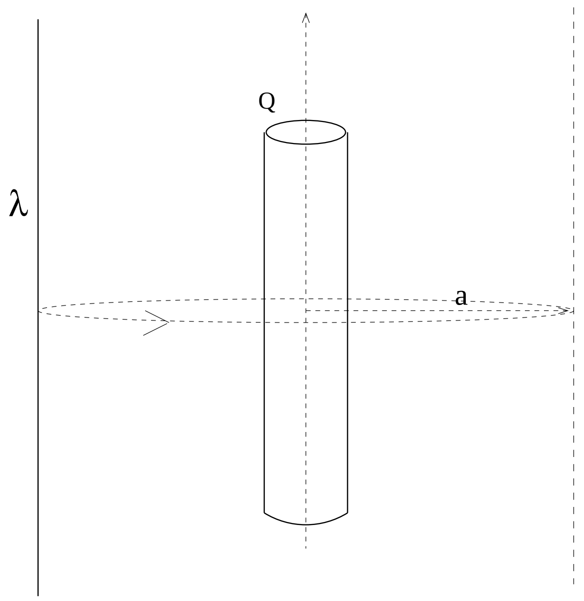

Figure 2: Esercizio - III

1. Si supponga che il cilindretto ruoti con velocitá angolare ω' e si determinino il campo di induzione magnetica $\vec{B}$, ed il campo elettrico sull'asse z.
   (*Suggerimento : un possibile metodo per il calcolo del campo magnetico generato dalla carica è l'utilizzo della formula che lega il campo elettrico E ed il campo B generato da una carica in moto :* $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}/c^2$);

2. si scriva il momento meccanico risentito dal cilindretto in funzione della velocitá ω';

3. si determini l'andamento temporale di ω' e la velocità angolare finale del cilindretto.

Soluzione
Esercizio I

1. La forza $\vec{F}$ risentita dalla particella di massa m puó essere calcolata come la forza di interazione tra la carica q e la carica immagine q_i posta a distanza r_i dal centro della sfera (Figura 3). La carica immagine ha intensitá $q_i = -Rq/r$

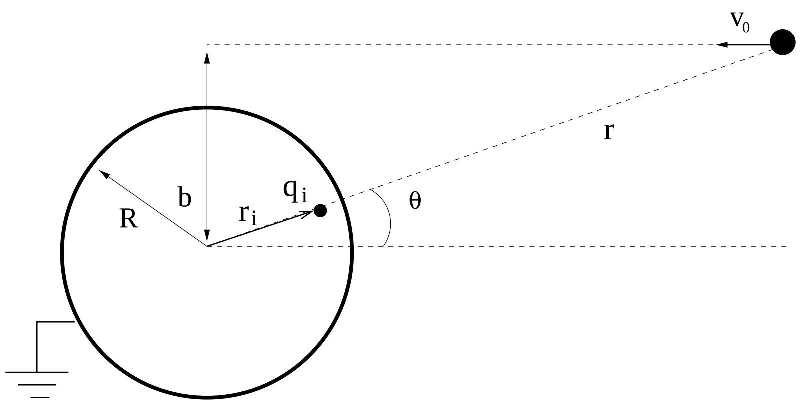

Figure 3: Soluzione esercizio - I

e si trova ad una distanza $r_i = R^2/r$, dove r indica la distanza della particella q dal centro della sfera, quindi :

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i q}{(r-r_i)^2}\hat{r} = -\frac{Rq^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{(r^2-R^2)^2}\hat{r} \qquad r > R$$

2. Quindi il potenziale U é dato da :

$$U = -\frac{Rq^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{(r^2-R^2)} \qquad r > R$$

3. Le formule che esprimono la conservazione dell'energia e del momento angolare sono :

$$-\tfrac{Rq^2}{8\pi\epsilon_0}\tfrac{1}{(r^2-R^2)} + \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_0^2$$
$$mvrsen\phi = mv_0 b$$

dove ϕ é l'angolo tra $\vec{r}$ e $\vec{v}$.

4. La minima distanza dal centro della sfera si ottiene quando la componente della velocitá parallela ad $\hat{r}$ é nulla cioé quando $\theta = \pi/2$ per cui si ottiene :

$$v = \frac{v_0 b}{d} \quad \Rightarrow \quad -\frac{Rq^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{(d^2-R^2)} + \frac{1}{2}m(\frac{v_0 b}{d})^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in d^2 si ottiene :

$$d^2 = \frac{-\frac{Rq^2}{8\pi\epsilon_0} + \frac{1}{2}mv_0^2(b^2+R^2) \pm \sqrt{(-\frac{Rq^2}{8\pi\epsilon_0} + \frac{1}{2}mv_0^2(b^2+R^2))^2 - m^2v_0^4b^2R^2}}{mv_0^2}$$

5. In questo modo si ottengono quattro soluzioni per d : $d_1, d_2, -d_1, -d_2$. Le equazioni utilizzate sono simmetriche per $\pm r$ ma nel sistema di riferimento utilizzato $r > 0$ e quindi le due soluzioni negative non hanno significato fisico. Le soluzioni d_1 e d_2, se le condizioni iniziali sono tali per cui la distanza minima esiste sono una, quando la carica non cade sulla sfera, sono una maggiore ed una minore di R. La soluzione maggiore di R é la soluzione del problema considerato mentre quella minore é soluzione al problema simmetrico in cui la carica lanciata é interna al conduttore e si avvicina alla sua superficie interna.

6. Se il conduttore é a carica costante Q_0 si deve aggiungere alla forza $\vec{F}$, e quindi al potenziale, il contributo di una carica immagine q' posta al centro della sfera e tale che $q_i + q' = Q_0$.

Esercizio II

1. Il massimo della separazione spettrale si verifica due volte per ogni periodo di rotazione del sistema binario quando le due stelle hanno velocitá allineate alla congiungente tra il centro del sistema binario ed il punto di osservazione, quindi $v = \pi R/\Delta t$. Se la luce emessa dalle stelle ha lunghezza d'onda λ il massimo ed il minimo della lunghezza d'onda ricevuta sará :

$$\lambda_{min} = \frac{c}{c+v}\lambda \quad \lambda_{max} = \frac{c}{c-v}\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \frac{2v}{c} = \frac{2\pi r}{c\Delta t}$$
$$\Rightarrow \qquad R = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{c\Delta t}{2\pi} = 14.8\ 10^9\ m$$

2. Poiché le masse delle stelle sono uguali, indicando con m_r la massa ridotta pari a $m_r = m/2$ si ha :

$$m_r\omega^2 R = \frac{m^2 G}{4R^2} \quad \Rightarrow \quad m = 2\frac{\omega^2 R^3}{G} = 1.43\ 10^{29}\ Kg$$

Esercizio III

1. La velocitá angolare del filo é :

$$\omega(t) = \alpha t\ per\ t \leq T$$
$$\omega(t) = \omega_0\ per\ t \geq T$$

quindi :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \alpha t^2/2\ per\ t \leq T \\ \theta(t) &= \omega_0(t - T/2)\ per\ t \geq T \end{aligned}$$

Il campo elettrico $\vec{E}$ generato dal filo lungo l'asse z é dato da :

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}\hat{r}$$

dove :

$$\vec{r} = a(cos\theta(t)\hat{i} + sen\theta(t)\hat{j})$$

Per calcolare il campo $\vec{B}$ generato dal filo utilizzo l'equazione suggerita nel testo :

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \omega(t) a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}\hat{k} = \frac{\mu_0 \lambda \omega(t)}{2\pi}\hat{k}$$

Se il cilindretto é in rotazione con velocitá angolare ω' esso genera un campo magnetico $\vec{B'}$ che contribuisce al campo magnetico lungo l'asse z. Questo contributo si puó calcolare utilizzando la formula di un solenoide infinito percorso da corrente :

$$\vec{B'} = \mu_0 n i \hat{k}$$

dove ni nel nostro caso vale : $ni = Q/(TL) = \lambda'\omega'/(2\pi)$.

2. Durante l'accelerazione del filo $\vec{B}$ varia poiché variano ω ed ω' e quindi alla superficie del cilindretto ci sará un campo elettrico indotto dato da :

$$\begin{aligned} 2\pi b E &= -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\pi b^2 \frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{1}{2} b \frac{dB}{dt} \\ E &= -\frac{\mu_0 b}{4\pi}[\lambda \frac{d\omega}{dt} + \lambda' \frac{d\omega'}{dt}] \end{aligned}$$

Il momento meccanico applicato al cilindro é :

$$\vec{M} = bQE\hat{k} \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{\mu_0 Q b^2}{4\pi}[\lambda \frac{d\omega}{dt} + \lambda' \frac{d\omega'}{dt}]$$

Posto $d\omega/dt = \alpha$, l'equazione di moto del cilindretto é data da :

$$\begin{aligned} I\tfrac{d\omega'}{dt} + \tfrac{\mu_0 Q b^2}{4\pi}[\lambda\alpha + \lambda' \tfrac{d\omega'}{dt}] = 0 \quad &\Rightarrow \quad [I + \tfrac{\mu_0 Q b^2 \lambda'}{4\pi}]\tfrac{d\omega'}{dt} = -\tfrac{\mu_0 Q b^2 \lambda}{4\pi}\alpha \\ &\Rightarrow \quad \omega'(t) = -\tfrac{\mu_0 Q b^2 \lambda}{4\pi I + \mu_0 Q^2 b^2 \lambda'}\omega(t) \end{aligned}$$

e quindi la velocitá angolare finale é data da :

$$\omega'_{fin} = -\frac{\mu_0 Q b^2 \lambda l}{4\pi I l + \mu_0 Q^2 b^2}\omega_0$$