

Prima prova del corso Fisica Generale IIB — 23/11/2001

Esercizio 1

Un'onda acustica monocromatica di frequenza $f=2$ kHz, si propaga in un tubo pieno di un gas biatomico (ideale), ad una pressione $P_0 = 2 \text{ Atm}$ ed una densità $\rho_0 = 0.01 \text{ gcm}^{-3}$. La velocità massima con cui una particella del gas si muove è pari a 0.3 m/s .

Si calcoli il rapporto tra lo spostamento longitudinale massimo di una particella del gas e la lunghezza d'onda.

All'estremità destra del tubo è ora posto un pistone che si muove con velocità $v = 5 \text{ m/s}$, in verso opposto a quello di propagazione dell'onda. L'onda riflessa dal pistone viene rivelata facendo uso di un minuscolo microfono posto all'estremità sinistra del tubo.

Si calcoli la frequenza dei battimenti osservati tra l'onda incidente e quella riflessa dal pistone.

Facoltativo: se lungo il tubo esiste una sezione in corrispondenza alla quale la densità passa ad un valore che è un quarto di quella iniziale, si calcoli il coefficiente di riflessione.

Esercizio 2

Si consideri un sistema formato da una piastra carica infinita di spessore L e densità di carica :

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-x/L}; \quad \rho_0 > 0; \quad 0 < x < L \quad (1)$$

e da un piano infinito, parallelo alla piastra, posto a distanza d dall'origine, con densità superficiale σ costante ed ignota (vedi figura 1).

1. Si calcoli il valore di σ affinché il campo per $L < x < d$ sia nullo;
2. si calcoli il campo elettrico e il potenziale ovunque.

Siano $\rho_0 = 1 \text{ } \mu\text{C/m}^3$, $L = 5 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$, si calcoli la velocità minima che deve avere una particella di carica $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e massa $m = 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ posta in $x = 2d$ per attraversare completamente la lastra carica.

Esercizio 3

Si considerino due fili paralleli di spessore trascurabile e lunghezza finita L , posti a distanza $2h$ (vedi figura 2). Sia $\lambda > 0$ la densità lineare di carica di ciascun filo.

1. Si calcoli il campo elettrico nel punto P di coordinate $P = (h, 0, z_P)$ (indicato in figura);
2. si specifichi se il punto di coordinate $(h, 0, 0)$ è una posizione di equilibrio stabile o instabile per una particella di carica negativa;
3. si assuma $z_P \ll L$ e si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni di una particella di massa m e carica $q < 0$ posta in P vincolata a muoversi lungo l'asse z .

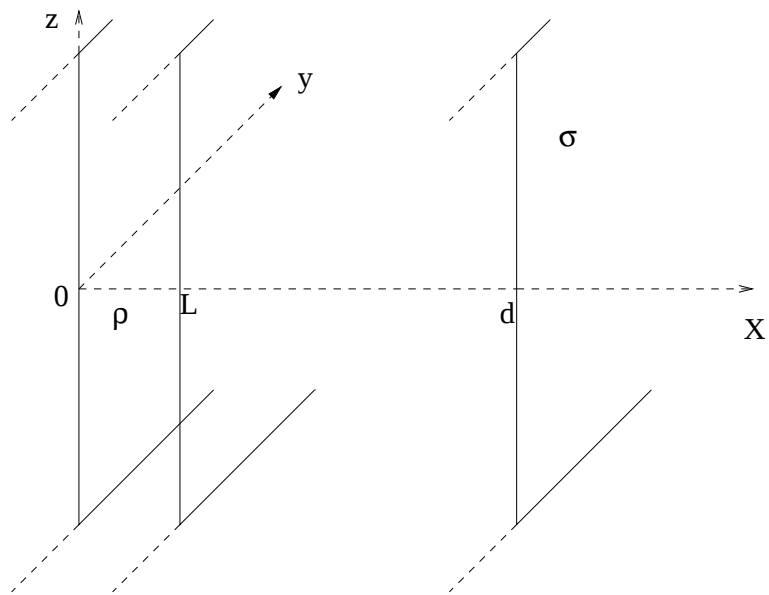


Figure 1:

Esercizio 4

Si assuma che in una regione dello spazio un campo vettoriale sia descritto dall'espressione :

$$\vec{E} = A(x\hat{y} + ay\hat{x}) \quad (2)$$

Si trovi quanto deve valere il parametro a affinché $\vec{E}$ corrisponda ad un campo elettrico statico. Si trovi quanto vale il potenziale in tutto lo spazio.

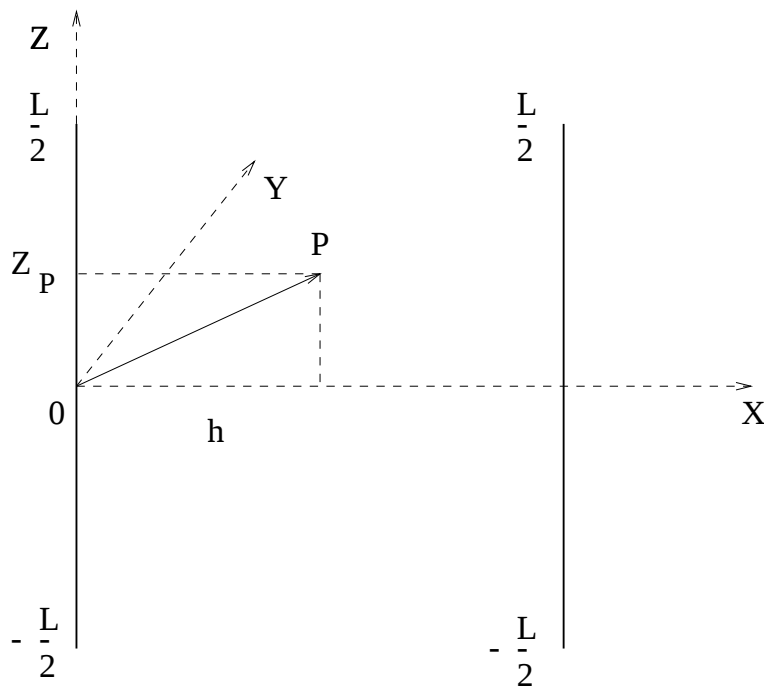


Figure 2:

Soluzione

Soluzione esercizio 1

La velocità di propagazione dell'onda é:

$$u = \sqrt{\frac{P_0 \gamma}{\rho_0}}$$

dove, per il nostro gas ideale biatomico é:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(7/2)R}{(5/2)R} = \frac{7}{5} = 1.4$$

La pressione statica é:

$$P_0 = 2 \text{ Atm} = 2 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 202600 \text{ Pa}$$

La densità é:

$$\rho_0 = 0.01 \text{ g cm}^{-3} = 10 \text{ Kg m}^{-3}$$

Quindi la velocità di propagazione dell'onda é:

$$u = \sqrt{\frac{202600 \cdot 1.4}{10}} = 168.4 \text{ m/s}$$

La lunghezza d'onda é allora:

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{168.4}{2000} = 0.0842 \text{ m} = 8.42 \text{ cm}$$

1) Se la velocità massima di un elemento del gas é: $V_m = 0.3 \text{ m/s}$, si avrà:

$$V(x, t) = V_m \cos(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

per cui lo spostamento longitudinale sarà:

$$\delta(x, t) = \delta_m \sin(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

con:

$$\delta_m = \frac{V_m}{2\pi f} = 2.387 \cdot 10^{-5}$$

Il rapporto richiesto alla prima domanda é quindi:

$$R = 2.83 \cdot 10^{-4}$$

2) La frequenza dell'onda "vista" da un rivelatore posto sul pistone é:

$$f' = f \left(1 + \frac{w}{u} \right)$$

dove w é la velocità del pistone. La frequenza dell'onda riflessa dal pistone é:

$$f'' = \frac{f'}{1 - \frac{w}{u}} = f \frac{1 + \frac{w}{u}}{1 - \frac{w}{u}} = f \cdot 1.061 = 2122.4 \text{ Hz}$$

La frequenza dei battimenti é:

$$\nu = \frac{f'' - f}{2} = 61.2 \text{ Hz}$$

3) Se ad un certo valore della x la densità (a pressione costante) passa ad un valore pari ad un quarto di quello dato, l'impedenza passa dal valore:

$$Z_0 = \frac{P_e}{\partial \delta / \partial t} = u^2 \rho_0 \frac{\partial \delta / \partial x}{\partial \delta / \partial t} = \frac{u^2 \rho_0}{u} = \rho_0 u$$

al valore:

$$Z = \frac{\rho_0 u'}{4}$$

dove u' é la nuova velocità:

$$u' = \sqrt{\frac{P_0 \gamma}{\rho_0 / 4}} = 2 \sqrt{\frac{P_0 \gamma}{\rho_0}} = 2 \cdot u.$$

Cioé:

$$Z = \frac{\rho_0}{4} \cdot 2u = \frac{1}{2} Z_0$$

Il coefficiente di riflessione é allora:

$$r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{Z_0 - 2Z_0}{Z_0 + 2Z_0} = -\frac{1}{3}$$

Soluzione esercizio 2

1. Le rotazioni intorno ad un asse ortogonale ai piani e le traslazioni in una direzione parallela ai piani sono trasformazioni di simmetria per la distribuzione di carica, quindi il campo é diretto lungo x e dipende solo da x. Il campo tra la piastra ed il piano é dato dalla somma del campo del piano $\vec{E}_{piano} = -\sigma / 2\epsilon_0 \hat{x}$ ed il campo dato dalla piastra carica. Il campo generato dalla piastra carica può essere visto come generato da una serie di piani di densità superficiale $d\sigma = \rho(x)dx$. Quindi richiedendo che la somma dei campi si annulli nella regione $L < x < d$ si trova :

$$\sigma = \int_0^L \rho dx = \rho_0 L (1 - e^{-1}) \quad (3)$$

2. Il campo ed il potenziale in tutto lo spazio generato dal sistema è quindi :

$$\begin{aligned}
 x < 0 & \quad E(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} & \quad V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x \\
 0 < x < L & \quad E(x) = \frac{\rho_0 L}{\epsilon_0} (e^{-1} - e^{-x/L}) & \quad V(x) = \frac{\rho_0 L}{\epsilon_0} (L - L e^{-x/L} - x e^{-1}) \\
 L < x < d & \quad E(x) = 0 & \quad V(x) = \frac{\rho_0 L}{\epsilon_0} (L - 2L e^{-1}) \\
 x > d & \quad E(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} & \quad V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - x) + \frac{\rho_0 L}{\epsilon_0} (L - 2L e^{-1})
 \end{aligned}$$

dove si è preso $V(0) = 0$. Il grafico dell'andamento del potenziale in funzione di x è riportato in figura 3.

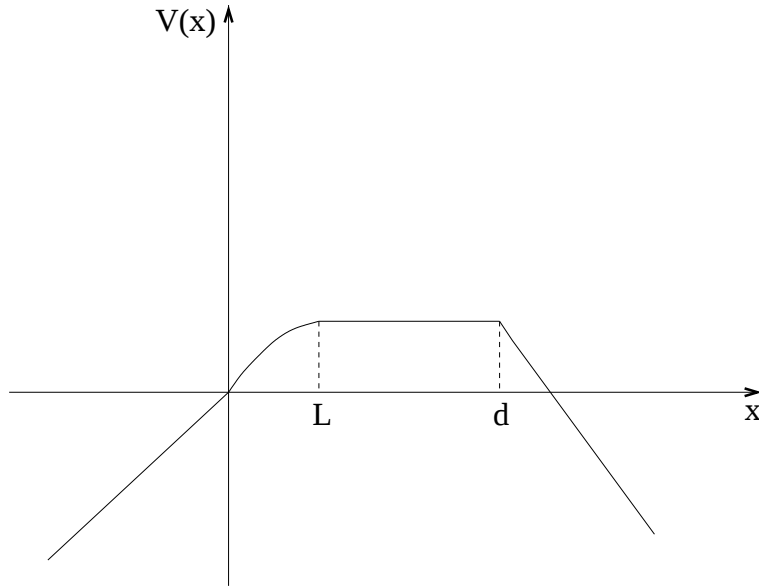


Figure 3:

3. La velocità minima si trova imponendo che la particella arrivi in $x = d$, punto di massimo del potenziale tra 0 e $2d$. Il campo è tale per cui una particella di carica positiva che raggiunge $x = d$ proseguirà fino a $x = -\infty$:

$$v = \sqrt{2 \frac{\sigma d q}{\epsilon_0 m}} = 2.67 \cdot 10^5 m/s \quad (4)$$

Soluzione esercizio 3

1. Sull'asse $x=h$ del piano (X,Z) esiste solo la componente z (per simmetria) del campo che è 2 volte la componente Z di ciascun filo:

$$E(h, 0, z_P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(z_P - \frac{L}{2})^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z_P + \frac{L}{2})^2 + h^2}} \right)$$

2. il punto $P = (h, 0, 0)$ risulta una posizione di equilibrio stabile per una particella di carica negativa sia lungo z che lungo y , le linee di forza campo elettrico infatti

risultano entranti ed il modulo è proporzionale allo spostamento da P , per piccoli spostamenti. Lungo x invece la posizione è di equilibrio instabile. D'altra parte dato un sistema di cariche nessuna posizione, nello spazio in cui non si hanno cariche, può essere una posizione di equilibrio stabile lungo tutto le direzioni poichè in quel punto si avrebbero tutte le linee del campo entranti e quindi divergenza non nulla e questo indicherebbe presenza di carica.

3. nel limite $z_P \ll L \rightarrow$

$$E(h, 0, z_P) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{-z_P L}{2(L^2/4 + h^2)^{3/2}} = kz_p$$

La carica compie un moto oscillatorio attorno al punto $z = 0$, con periodo :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{qk}}$$

Soluzione esercizio 4

Si impone che il rotore del campo sia nullo e si ottiene $a = 1$. Il potenziale in un punto di coordinate (x_P, y_P) è :

$$V(x_P, y_P) = -x_P y_P \tag{5}$$

con $V(0, 0) = 0$.