Corso di Laurea in Fisica

Prova scritta di Fisica Generale 2

31 Maggio 1999

1) Su di una superficie isolante cilindrica di raggio a e altezza molto maggiore del raggio, viene depositata della carica elettrica con densita' superficiale data da:

$$\sigma = \sigma_0 \cos(2\,\varphi)$$

a) Calcolare potenziale e campo in tutto lo spazio

Si introduce il cilindro all'interno di un secondo cilindro metallico posto a terra, avente raggio interno b > a e coassiale ad esso.

b) Si calcoli il campo in tutto lo spazio.

Soluzione:

Cerchiamo una soluzione della forma:

$$V(r,\varphi) = f(r)\cos(2\varphi)$$

che soddisfi l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

e quindi:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}V(r,\varphi)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

Si trova che f(r) puo' assumere le due forme: A/r^2 e $B\,r^2$.
Dentro la superficie cilindrica sara':

$$V(r,\varphi) = B\,r^2\cos(2\varphi)$$

e fuori:

$$V(r,\varphi) = A/r^2\,\cos(2\varphi)$$

Per trovare A e B si impongono le condizioni al contorno (continuita' della componente di E lungo ϕ e discontinuita', pari a σ/ε_0 della componente perpendicolare):

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}V(r,\varphi)\Big|_{r=a^-}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}V(r,\varphi)\Big|_{r=a^+}$$

da cui: A = B a^4.
Dalla discontinuita' della componente perpendicolare:

$$\frac{\partial}{\partial r}V(r,\varphi)\Big|_{r=a^-}-\frac{\partial}{\partial r}V(r,\varphi)\Big|_{r=a^+}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

da cui si ha:

$$2\frac{A}{a^3}\cos(2\varphi)+2Ba\cos(2\varphi)=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos(2\varphi)$$

da cui:

$$2\frac{A}{a^3}+2\,Ba=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

e quindi:

$$B=\frac{\sigma_0\,A}{4\varepsilon_0\,a}\quad;\quad A=\frac{\sigma_0\,a^3}{4\varepsilon_0}$$

Si ha quindi:

Per r < a: $V=\frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0 a}r^2\cos(2\varphi)$

Per r > a: $V=\frac{\sigma_0\,a^3}{4\,\varepsilon_0 r^2}\cos(2\varphi)$

La presenza del cilindro conduttore richiede un termine ulteriore del tipo: $V(r,\varphi)=C\,r^2\cos(2\varphi)$ per r < b. La costante C si trova imponendo che per r = b il potenziale si annulli:

$$\frac{\sigma_0\,a^3}{4\varepsilon_0 b^2}\cos(2\varphi)+Cb^2\cos(2\varphi)=0$$

da cui:

$$C=-\frac{\sigma_0\,a^3}{4\varepsilon_0 b^4}$$

Il potenziale sara' allora:

Per r < a: $V = \frac{\sigma_0\ a}{4\varepsilon_0} r^2 \cos(2\varphi) - \frac{\sigma_0\ a^3}{4\varepsilon_0 b^4} r^2 \cos(2\varphi)$

Per a<r<b: $V = \frac{\sigma_0\ a^3}{4\varepsilon_0 r^2} \cos(2\varphi) - \frac{\sigma_0\ a^3}{4\varepsilon_0 b^4} r^2 \cos(2\varphi)$

Per r > b: V = 0

2) Un condensatore sferico avente raggi interno ed esterno rispettivamente uguali ad R_1 ed R_2, e' riempito di un materiale dielettrico con costante dielettrica variabile in funzione dell'angolo zenitale θ secondo la legge:

$$\varepsilon(\vartheta) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos^2(\vartheta)$$

Si calcoli la capacita' del condensatore.

Soluzione

Il campo E e' radiale e funzione solo di r (le superfici equipotenziali sono sfere con centro coincidente con quello del sistema). Poiche' inoltre il materiale e' isotropo, avremo:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\, \varepsilon_r(\vartheta)\, \vec{E}$$

Cioe' D dipende da θ.
Per il teorema di Gauss applicato alla divergenza di D:

$$\Phi(\vec{D}) = Q \quad ;$$

cioe':

$$\varepsilon_0 \oint_\Omega \varepsilon_r(\vartheta)\, E(r) r^2\, d\Omega = Q$$

da cui:

$$\varepsilon_0\, r^2\, E(r) \oint_\Omega \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos^2(\vartheta)\right)\, d\cos\vartheta\, d\varphi = Q$$

ed effettuando l'integrazione:

$$E(r) = \frac{3Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2 (3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

La differenza di potenziale tra le armature sara':

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{3Q}{4\pi\,\varepsilon_0\,(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

e la capacita':

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{3}\left(\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}\right)$$

3) Si schematizzi un fascio di elettroni come un cilindro di lunghezza indefinita e raggio a, in cui sia presente una densita' uniforme di particelle n_0, che si muovono tutte con la stessa velocita' v, parallela all'asse del cilindro.

a) Si determinino il campo elettrico E e quello di induzione magnetica B generati dagli elettroni in movimento, in un generico punto dello spazio.

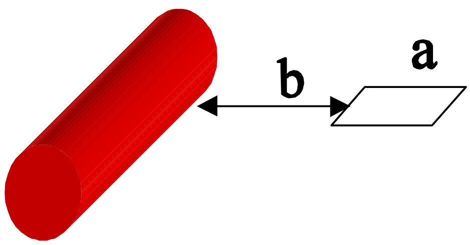
All'interno del cilindro siano presenti anche particelle cariche positivamente, ferme, con carica +e (essendo -e la carica dell'elettrone).

b) Si determini la densita' n di cariche positive tale che il fascio di elettroni sia stabile, ossia tale che non ci siano componenti trasverse della velocita'.

Supponiamo che la densita' di elettroni vari in funzione del tempo in modo lineare, a partire da 0 fino al valore massimo n_0 raggiunto dopo un tempo noto T, per poi restare costante; nel processo venga conservata la simmetria cilindrica.

Si vuole determinare n_0 attraverso la misura di corrente in una spira quadrata di lato a, coefficiente di autoinduzione L e resistenza elettrica R, posta esternamente al fascio, in modo che l'asse del fascio e la spira siano complanari, e a distanza b dall'asse della corrente di elettroni (vedi figura).

c) Si mostri come dalla misura della corrente nella spira si possa determinare n_0.



Soluzione

a) Indichiamo con v la velocita' degli elettroni, con a il raggio del cilindro che schematizza il fascio e con b la distanza del lato interno della spira dall'asse del cilindro.
Il teorema di Gauss ci da' allora:

Per r < a: $$\vec{E} = -\frac{n_0 e}{2\varepsilon_0}\vec{r}$$

Per r>a: $$\vec{E} = -\frac{n_0 e a^3}{2\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^2}$$

Analogamente, indicando con $\vec{k}$ il versore della velocita' degli elettroni, l'applicazione del teorema di Ampere fornisce per B:

per r<a: $$\vec{B} = -\frac{\mu_0 n_0 e v r}{2}\frac{k\times\vec{r}}{r}$$

per r>a: $$\vec{B} = -\frac{\mu_0 n_0 e v a^2}{2}\frac{k\times\vec{r}}{r^2}$$

b) Sull'elettrone agisce un campo elettrico:

$$\vec{E} = -\frac{(n_0 - n)e}{2\varepsilon_0}\vec{r}$$

e quindi una forza repulsiva:

$$\vec{F} = \frac{(n_0 - n)e^2}{2\varepsilon_0}\vec{r}$$

oltre alla forza (attrattiva) dovuta all'induzione magnetica:

$$\vec{F}_B = -\frac{\mu_0 n_0 e^2 v^2}{2}\vec{r}$$

Uguagliando le due forze si ha:

$$n = n_0\left[1-\mu_0\varepsilon_0\ v^2\right] = n_0\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]$$

c) Il flusso di B attraverso la spira e' dato da:

$$\Phi(B) = a\int_a^{b+a} B\,dx = \frac{\mu_0\, n(t) e\, v\, a^3}{2}\ln\left(\frac{b+a}{a}\right)$$

con:

$$\begin{cases} n(t) = n_0\,\dfrac{t}{T} & per\ t<T \\ \\ n(t) = n_0 & per\, t>T \end{cases}$$

La f.e.m indotta nella spira sara':

$$\mathcal{E}_I = \frac{a^2\,\mu_0\, e\, v}{2}\ln\left(\frac{b+a}{a}\right)\frac{n_0}{T} = k\, n_0$$

dove k e' la costante: $\dfrac{a^2\,\mu_0\, e\, v}{2}\ln\left(\dfrac{b+a}{a}\right)\dfrac{1}{T}$

L'equazione del circuito e':

$$R\,i + L\frac{di}{dt} = k\, n_0 \qquad (per\, t < T)$$

la cui soluzione e':

$$i(t) = \frac{k\, n_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

Il valore massimo raggiunto dalla corrente, per t=T e':

$$\bar{i} = \frac{k\, n_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}T}\right]$$

misurando la quale si ottiene n_0.

Per t>T l'equazione del circuito diventa:

$$R\,i + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad (per\, t > T)$$

la cui soluzione e':

$$i(t) = \bar{i}\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

4) Un lungo filo flessibile, di materiale conduttore, e' avvolto ad elica, con n spire di raggio a per unita' di lunghezza. Esso e' sospeso verticalmente ed al suo estremo inferiore e' fissata una massa m che poggia su di un piano orizzontale metallico Ammettendo che la massa del filo possa essere trascurata e che la contrazione del solenoide avvenga uniformemente, dimostrare che per far si che la massa si sollevi dal piano occorre far circolare nel solenoide una corrente data da:

$$i = \frac{1}{n\,a}\sqrt{\frac{2mg}{\pi\,\mu_0}}$$

Soluzione

Il campo B nel solenoide e': $B = \mu_0\, n\, i$

Dove n e' il numero di spire per unita' di lunghezza.

L'energia magnetica per unita' di volume e':

$$\varepsilon = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0\, n^2\, i^2}{2}$$

e l'energia magnetica totale:

$$\varepsilon_t = \frac{\mu_0\, n^2\, i^2}{2}\, l\, \pi\, a^2$$

dove l e' la lunghezza dell'avvolgimento ed a il raggio.

A corrente costante la forza e':

$$F = \frac{\partial E_t}{\partial l} = \frac{\mu_0\, n^2\, i^2}{2}\, \pi\, a^2$$

che, uguagliata ad mg, da' il risultato scritto nel testo.

5) Un reticolo di diffrazione ha 200 linee/mm. Quale deve essere l'angolo d'incidenza della radiazione sul reticolo (cioe' l'angolo tra la direzione di propagazione e la normale al piano) se si vuole osservare un massimo di diffrazione del secondo ordine (cioe' quello corrispondente ad uno sfasamento di due lunghezze d'onda) nella direzione perpendicolare al reticolo? La lunghezza d'onda della radiazione incidente e' λ=0.5 μm. Se il reticolo e' largo 5 cm, quale sara' il suo potere risolutivo per tale radiazione, al secondo ordine ?

Soluzione

Se il massimo del secondo ordine deve essere osservato nella direzione perpendicolare al reticolo, la corrispondente differenza di fase dopo il reticolo e' nulla. Lo sfasamento e' quello che ha luogo prima del reticolo, a causa dell'angolo d'incidenza non nullo dell'onda che cade sul reticolo. La relazione che fornisce l'angolo e' quindi: $p \sin\vartheta = 2\lambda$; dove p e' il passo del reticolo e λ la lunghezza d'onda. Poiche' il reticolo ha 200 linee/mm, il passo e' 5 10^{-6} m. Si ottiene di qui: $\theta = 11.5^0$