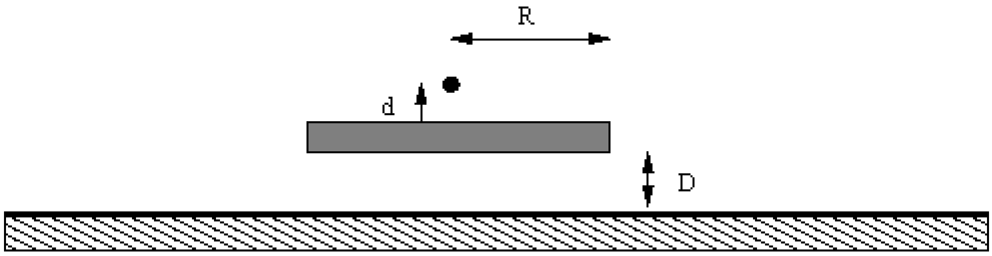
Prova scritta di Fisica Generale 2

28 Giugno 1999

Avvertenza: si forniscano spiegazioni concise ma chiare. La grafia dovra' risultare comprensibile.

1) Solo per gli studenti che presentano il programma degli anni precedenti
Si consideri un piano conduttore infinito posto a terra.
A distanza D dal piano, si trova una lastra circolare conduttrice di raggio R e spessore trascurabile, isolata, e disposta parallelamente al piano stesso. Al di sopra ancora della lastra, sull'asse e a distanza d dal centro di questa, si trova una carica Q. Sia $d \ll D \ll R$.



Si calcoli:
a) la carica totale indotta su ciascuna faccia della lastra.
b) la distribuzione di carica σ su ciascuna delle due facce della lastra in funzione della distanza dal centro.
c) il campo elettrico nello spazio compreso tra la lastra e il piano conduttore e la differenza di potenziale tra questi.
d) la forza che agisce sulla lastra circolare.
e) Il lavoro necessario per portare la lastra a contatto col piano conduttore.

Soluzione

Le condizioni al contorno impongono che il campo elettrico risulti perpendicolare sia alla superficie della lastra che al piano conduttore.
Trascurando gli effetti ai bordi, si può utilizzare il risultato ottenuto nel caso di una carica di fronte ad un piano conduttore posto a massa: in questo modo, nel semispazio superiore, e lontano dal bordo della lastra, il campo elettrico risulterà quello prodotto dalla carica Q e da una sua immagine –Q posta al di là della lastra e simmetricamente rispetto alla sua faccia superiore.
Nello spazio compreso tra la lastra e il piano, invece, il campo elettrico sarà pressocchè uniforme (sempre trascurando gli effetti ai bordi).
In questo modo si possono sfruttare i risultati ottenuti nel caso della carica di fronte ad un piano posto a terra:

a) La carica indotta sulla faccia superiore risulterà uguale alla carica immagine, e quindi -Q. Siccome la lastra deve rimanere scarica, sulla faccia inferiore sarà presente una carica totale indotta Q.
b) Per calcolare la distribuzione della densità di carica sulla faccia rivolta verso la carica, basta calcolare la componente normale del campo alla superficie e moltiplicare per ε_0, ottenendo in tal modo (coordinate cilindriche):
$\sigma_1(\rho) = -\frac{Q}{4\pi}\frac{2d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$ Integrando questa formula si ritrova immediatamente che la carica totale indotta sulla faccia superiore è uguale a –Q a meno di termini dell'ordine d/R. Sulla faccia inferiore, visto che il campo è uniforme, la carica +Q risulterà distribuita uniformemente : si avrà allora $\sigma_2 = \frac{Q}{\pi R^2}$.
c) Il campo elettrico nello spazio tra il piano e la lastra risulterà allora essere $E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$ e pertanto la differenza di potenziale risulterà uguale a $V = \frac{QD}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$
d) La lastra risulta soggetta a due forze agenti in senso opposto: quella dovuta alla carica si può calcolare facilmente utilizzando la carica immagine, mentre quella dovuta al piano conduttore può essere ricavata sfruttando il risultato ben noto della forza che agisce tra le piastre di un condensatore. $F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(2d)^2} - \frac{2}{R^2}\right)$
e) Il lavoro può essere calcolato integrando la forza lungo il cammino che porta la lastra a contatto col piano: $\ell = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4d} - \frac{1}{4(d+D)} - \frac{2D}{R^2}\right)$

2) Una lunga e sottile fenditura e' praticata in un piano conduttore; l'altezza della fenditura y e' piccola rispetto alla sua larghezza, ed il suo spessore e' trascurabile.
Nelle due regioni separate dal conduttore sono presenti due campi elettrici costanti ed uniformi, perpendicolari al piano, di intensita' rispettivamente E_1 ed E_2.
Nella prima regione un fascio di elettroni viene focalizzato ad una distanza x_1 dal piano, dopo essere stato accelerato da una differenza di potenziale V_0.
Si calcoli come varia la componente verticale del campo elettrico (lungo y) all'interno della fenditura, e si dimostri che il sistema si comporta come una lente elettronica, cioe' che gli elettroni vengono collimati nella seconda regione ad una distanza x_2 tale che:

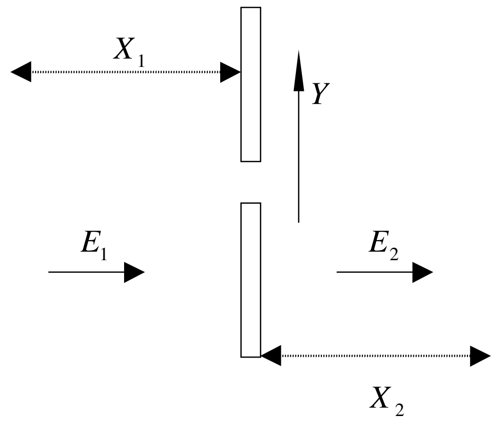
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}$$

con:

$$f = 2V_0 \big/ (E_2 - E_1)$$

Nota: Si risolva il problema in approssimazione impulsiva, tenendo anche conto del fatto che:

$$V_0 >> E_1 \ X_1$$
$$V_0 >> E_2 \ X_2$$



Soluzione

Nelle ipotesi del problema è possibile calcolare la variazione di impulso trasverso (lungo la direzione y) limitandosi a considerare l'interazione delle particelle nel solo spessore della fenditura.
Per calcolare il campo elettrico lungo y si può usare il fatto che il campo elettrico deve avere divergenza nulla, ovvero, poiché la variazione del campo lungo la fenditura è trascurabile, deve valere:

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y = 0$$

Considerato che la variazione del campo elettrico lungo x attraverso la fenditura è (E_2 - E_1), si ricava per il campo elettrico lungo y all'interno della fenditura:

$$E_y = -\frac{(E_2 - E_1)}{d} \, y$$

dove d e' lo spessore della fenditura.
Indicando con v la velocità delle particelle (che va considerata costante in approssimazione impulsiva), la variazione di impulso trasverso si scrive:

$$\Delta p_y = F_y \bullet \Delta t = q E_y \, \frac{d}{v}$$

cioè:

$$\Delta p_y = -q \frac{(E_2 - E_1)}{d} y \frac{d}{v} = -q \frac{(E_2 - E_1)}{v} y$$

Noi siamo interessati alla variazione di direzione delle particelle, e dunque calcoliamo:

$$\Delta\Phi_y = \frac{\Delta p_y}{p} = -q\frac{(E_2 - E_1)}{vp}\,y$$

Poiché le particelle sono state accelerate da una differenza di potenziale V_0, vale che:

$$qV_0 = \frac{pv}{2}$$

e dunque:

$$\Delta\Phi_y = -\frac{(E_2 - E_1)}{2\,V_0}\,y$$

Usando il fatto che:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi_y$$

si ottiene, seguendo le notazioni del testo:

$$-\frac{y}{x_2} - \frac{y}{x_1} = -\frac{E_2 - E_1}{2V_0}\,y$$

da cui segue il risultato indicato nel testo del problema:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{E_2 - E_1}{2V_0}\,y$$

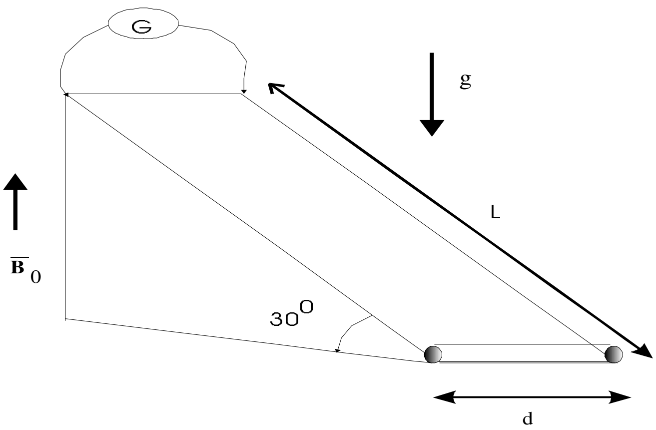
3) Su di un piano inclinato di 30 gradi sull'orizzontale sono montate due rotaie parallele di lunghezza L, a distanza d l'una dall'altra e aventi resistenza elettrica R (resistenza elettrica per unita' di lunghezza: R/L).
All'estremita' inferiore del piano viene posta una sbarretta conduttrice di massa m e lunghezza d che puo' scorrere senza attrito sulle rotaie (vedi figura) mantenendole in contatto elettrico; sia r la resistenza della sbarretta.

Sia presente un campo di induzione magnetica B uniforme e costante, diretto verticalmente verso l'alto. Si connettono le estremita' superiori delle rotaie a un generatore G di corrente i_0 e si lascia la sbarretta libera di muoversi: si verifica che la sbarretta sale sul piano inclinato di una lunghezza L in un tempo T. Il coefficiente di autoinduzione del circuito cosi' costruito sia sempre trascurabile.

a) Determinare il verso ed il valore della corrente i_0.

b) Si scriva l'equazione di conservazione dell'energia del sistema in un istante generico di moto considerando tutti gli scambi di energia che avvengono in un intervallo di tempo dt.

c) Avendo definito come "rendimento del sistema di sollevamento" il rapporto tra l'energia meccanica ottenuta e l'energia erogata dal generatore G, determinarne il valore.



Soluzione

a) La componente del campo parallela al piano inclinato e' irrilevante: chiamiamo $B = B_0 \cos\left(30^0\right)$ la componente normale. Se la corrente i_0 circola in verso orario (vista dall'alto) essa determina una forza sulla sbarretta, la cui componente parallela al piano inclinato e' rivolta verso l'alto e pari a $f = B\, d\, i_0$. Questa si oppone alla componente parallela al medesimo piano della forza peso, pari a $p = mg \sin(30^0)$.
La forza risultante e' costante ed il moto e' quindi uniformemente accelerato, con accelerazione:

$$a = \frac{Bd\, i_0}{m} - \frac{g}{2}$$

Dalla condizione $1/2aT^2 = L$ si puo' ricavare i_0:

$$i_0 = \frac{m}{Bd}\left[\frac{2L}{T^2} + \frac{g}{2}\right]$$

b) Bilancio energetico; si indica con:
- dK la variazione di energia cinetica
- dU_p la variazione di energia potenziale della sbarretta
- dU_m la variazione di energia magnetica del sistema
- W_G la potenza erogata dal generatore di corrente i_0
- W_{est} la potenza erogata dal generatore esterno che mantiene costante il campo magnetico
- W_J la potenza dissipata per effetto Joule

Si ha:

$$\frac{dK}{dt} = fv = mva = Bdvi_0 - \frac{mgv}{2}$$

$$\frac{dU_p}{dt} = mg\,\frac{dh}{dt} = \frac{mgv}{2}$$

poiche' e':

$$h = x\sin 30^0 = \frac{x}{2}$$

$$\frac{dU_m}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}\,i_0$$

$$W_G = V_G\,i_0 = [R(t)\,i_0 - \varepsilon]i_0 = R(t)i_0^2 - Bdv\,i_0$$

$$W_{ext} = \frac{d\Phi}{dt}\,i_0$$

$$W_J = R(t)\,i_0^2$$

Vale la relazione:

$$[W_G + W_{ext}]dt = dK + dU_p + dU_m + W_J\,dt$$

c) Possiamo chiamare rendimento il rapporto tra energia utile ed energia erogata, ovvero:

$$\eta = \frac{\Im_G - J}{\Im_G}$$

essendo J l'energia dissipata per effetto Joule e $\Im_G$ l'energia erogata dai generatori:

$$\Im_G = maL + {mgL}/{2} + J \quad = \quad Bdi_0\,L - {mgL}/{2} + {mgL}/{2} + J \quad = \quad Bdi_0\,L + J$$

$$J = \int_0^T R(t)\,i_0^2\,dt$$

con:

$$R(t) = r + 2\,\frac{L - x(t)}{L} R$$

da cui, essendo $x(t)=at^2/2$, e posto $J_0 = (r+2R)\ i_0^2\ t$; si ha:

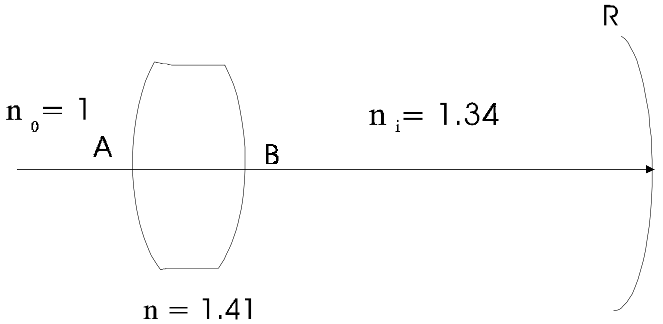
$$J = J_0 - \int_0^T \frac{aR i_0^2}{L} t^2\ dt = J_0 - \frac{2R i_0^2}{3L}\frac{aT^2}{2} T = J_0 - \frac{2}{3} R i_0^2\ T$$

In definitiva:

$$J = \left(r + \frac{4}{3} R \right) i_0^2\ T$$

$$\eta = \frac{B\,d\,L}{B\,d\,L + \left[r + \frac{4}{3} R \right] i_0\ T}$$

4) Solo per gli studenti che presentano il programma dell'anno accademico 1998-99
E' possibile schematizzare l'occhio umano come indicato in figura:



con i raggi di curvatura dei due diottri dati da:

$r_A = 9.4$ mm ; $r_B = 5.4$ mm
e con: $\overline{AB} = 2.4$ mm

La lente AB schematizza il cristallino ed il mezzo che occupa lo spazio oggetto e' l'umor acqueo. R e' la retina.

a) si calcoli la matrice di trasferimento del cristallino
b) si determinino le lunghezze focali f_i ed f_0.

c) Si determinino le posizioni dei piani principali H_i ed H_o rispetto ad A e B
d) Se l'oggetto e' situato all'infinito, l'immagine si forma sulla retina. Si determini la distanza della retina dal diottro d'uscita B
e) Se il raggio della pupilla d'ingresso e' R = 1.5 mm, si determini il limite al potere risolutivo dell'occhio posto dalla diffrazione (si prenda λ = 550 nm)

Soluzione

a) La matrice richiesta e' il prodotto delle due matrici di rifrazione relative ai diottri B ed A R_B ed R_A, e della matrice di traslazione $T_{(AB)}$, nell'ordine: $R_B\, T_{(AB)}\, R_A$.
Le matrici sono:

$$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -43.6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12.96 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{(AB)} = \begin{pmatrix} 1 & 0.0017 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice complessiva e' quindi:

$$T = \begin{pmatrix} 0.926 & 0.0017 \\ -55.6 & 0.978 \end{pmatrix}$$

La vergenza e' quindi 55.6.

b) Le lunghezze focali sono :

$$f_i = {}^{n_i}\!/_{V} = {}^{1.34}\!/_{55.6} = 24.1\, mm$$

$$f_0 = -\, {}^{n_o}\!/_{V} = -\, {}^{1}\!/_{55.6} = -18.0\, mm$$

c) Le distanze dei piani principali da A e B:

$$\overline{BH_i} = f_i\,(T_{11} - 1) \quad = \quad -1.78\, mm$$

$$\overline{AH_o} = f_o\,(T_{22} - 1) \quad = \quad 0.396\, mm$$

d) La distanza del punto B dal fuoco dello spazio immagine e':

$$BF_i = f_i\, T_{11} \quad = \quad 24.1 \bullet 0.926 \quad = \quad 22.3\, mm$$

Questa e' quindi la distanza della retina dal diottro d'uscita B.

e) L'errore introdotto dalla diffrazione sull'angolo e':

$$\Delta\Theta = 0.61\,\lambda/R = 2.23 \bullet 10^{-4}\ rad$$

da cui:

$$\Delta X \cong f_i\ \ \Delta\Theta\ \ =\ 5.4\ \mu m$$