Considerazioni energetiche sui circuiti percorsi da corrente e legge di Faraday

1 Energia potenziale associata ad un circuito in un campo di induzione magnetica B

Abbiamo giá visto che l'energia potenziale meccanica di un circuito percorso da corrente, immerso in un campo d'induzione magnetica B é data da:

$$W = -i\phi = -i\int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} \qquad (1)$$

dove $\vec{ds}$ é orientato secondo la regola della mano destra.

Quindi, dovendosi il circuito orientare fino a raggiungere una configurazione di energia minima, esso si disporrá in modo tale che ϕ sia massimo, cioé con $\vec{B}$ parallelo a $\vec{ds}$. Poiché nel computo dell'energia occorre in realtá tener conto anche del lavoro compiuto dal generatore che mantiene costante la corrente, e poiché tale lavoro, come si vedrá piú avanti, risulta di segno opposto a quello fatto per spostare il circuito, e doppio di questo, é opportuno ridefinire l'energia meccanica come:

$$U = -W = i\int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} \qquad (2)$$

Se ora facciamo uso della definizione del potenziale vettore $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

avremo:

$$U = i\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\vec{ds} = i\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} \qquad (3)$$

dove l'integrale é effettuato lungo il contorno di S con la solita convenzione per il verso. Ne segue ad esempio che l'energia di una piccola spira di area a é:

$$U = i\,\phi = i\,\vec{B}\cdot\vec{a} = \vec{m}\cdot\vec{B} \qquad (4)$$

con: $\vec{m} = i\,a\,\vec{n}$, dove $\vec{n}$ é il versore normale al piano della spira ed $\vec{m}$ il momento magnetico della stessa.

2 Energia d'interazione mutua tra circuiti percorsi da corrente

L'energia che un circuito percorso da corrente ha nel campo B prodotto da un'altro circuito, puó esser calcolata facendo uso dell'espressione del potenziale vettore $\vec{A}$ generato da uno dei due circuiti e di quella dell'energia (3) che il secondo ha nel campo $\vec{A}$ generato dal primo, cioé:

$$dU_{12} \;=\; i_2 \oint_2 \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \;=\; \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_2 i_1 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

da cui:

$$U_{12} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\, i_1\, i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \tag{5}$$

Il coefficiente che moltiplica $i_1 i_2$ in questa espressione é chiamato coefficiente di mutua induzione ed indicato con il simbolo L_{12}:

$$L_{12} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \tag{6}$$

(formula di Neumann)

É evidente dalla simmetria del problema che $L_{12} = L_{21}$.

L'energia del sistema sará quindi:

$$U_{12} \;=\; L_{12}\, i_1\, i_2 \tag{7}$$

Si puó poi facilmente verificare che le unitá di misura del coefficiente di mutua induzione sono quelle di una lunghezza moltiplicate per quelle della permeabilitá magnetica del vuoto, cioé $[L] = [\mu_0][m] = [\Omega \cdot s] = [henry]$.

L'estensione dell'equazione ottenuta al caso di n circuiti é immediata:

$$U \;=\; \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{jk}\, i_j\, i_k \;\; (j \neq k) \tag{8}$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ deriva dal fatto che nella somma ciascuna energia d'interazione é contata due volte.

Nel caso di un singolo circuito avremo:

$$U \;=\; \frac{1}{2}\, L\, i^2 \tag{9}$$

Una volta noto U é poi possibile calcolare forze e momenti prendendo le derivate (con segno (+)) di U rispetto alla variabile corrispondente.

L'energia associata ad una generica distribuzione di correnti nello spazio puó essere ottenuta attraverso un'ovvia generalizzazione della 8. Infatti, essendo l'energia del j-mo circuito data dal prodotto della corrente che vi flusce per il flusso del campo generato da tutti i circuiti attraverso il medesimo:

$$U_j \;=\; \Phi_j\, i_j$$

ne segue che l'energia totale puó essere espressa in termini dei flussi e delle correnti come:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \Phi_j \, i_j \tag{10}$$

dove:

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^{n} L_{jk} \, i_k \tag{11}$$

Facendo ora uso del teorema di Stokes e della definizione di $\vec{A}$:

$$\Phi_j = \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \oint_j \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

si ottiene:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \oint_j i_j \vec{A} \cdot \vec{dl} \tag{12}$$

Se le correnti non sono filiformi ma distribuite in determinati volumi, dovremo effettuare la sostituzione:

$$i_j \, \vec{dl} \rightarrow \vec{J} d\tau$$

dove $d\tau$ é l'elemento di volume. In tal caso inoltre l'operazione di somma sulle correnti e di integrazione di linea si riducono ad un'unica integrazione di volume, per cui:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{J} \cdot \vec{A} \, d\tau \tag{13}$$

Essendo poi

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{14}$$

questa diventa:

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{A} \, d\tau \tag{15}$$

Ricordiamo ora la seguente proprietá dell'operatore $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

per cui:

$$\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Sostituendo questa nell'espressione di U, avremo la differenza tra due integrali, corrispondenti ai due termini che figurano a secondo membro dell'ultima equazione scritta. Di questi, possiamo facilmente vedere che l'ultimo si annulla.

Infatti l'integrale di volume della divergenza che vi compare puó essere trasformato nell'integrale di superficie di $(\vec{A} \times \vec{B})$ esteso ad una superficie che puó esser presa arbitrariamente grande.

Ora sappiamo che a distanza infinita, il potenziale vettore A va come 1/r mentre B va come $1/r^2$, mentre l'area della superficie cresce come r^2.

Ne segue che l'integrale di superficie di $(\vec{A} \times \vec{B})$ andrá a zero come 1/r. In definitiva rimane:

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \, d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 d\tau \tag{16}$$

Che é l'espressione dell'energia magnetica associata ad una generica configurazione di correnti che generano un campo d'induzione magnetica $\vec{B}$.

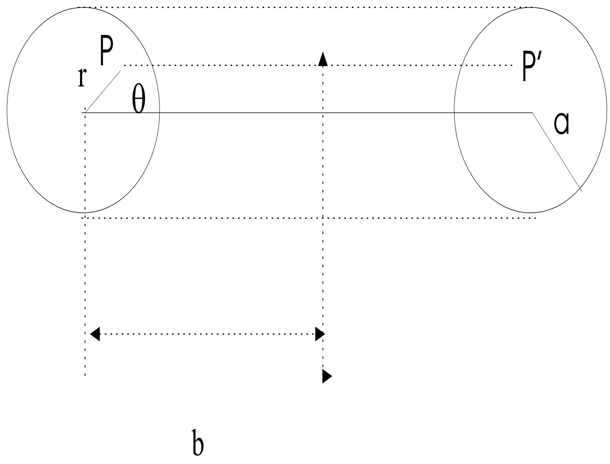

Figura 1:

3 Calcolo dei coefficienti d'induzione

Nel calcolo, anziché far uso della definizione, formula (6), é spesso piú agevole far ricorso alla relazione che esprime il flusso in funzione delle correnti:

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^{n} L_{jk}\, i_k \tag{17}$$

Un esempio molto semplice é quello di un solenoide, avente n spire per unitá di lunghezza, in cui quest'ultima sia molto maggiore del raggio, ed attorno al quale (nella zona centrale) siano avvolte m spire. Vediamo di calcolare il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti. Il campo dentro il solenoide (nella parte lontana dai bordi) é uniforme, parallelo all'asse del solenoide e vale:

$$B = \mu_0\, n\, i \tag{18}$$

Il flusso di B attraverso ciascuna spira dell'avvolgimento é:

$$\Phi = \mu_0\, n\, i\, A$$

dove A indica l'area della sezione del solenoide. Il flusso attraverso le m spire dell'avvolgimento é:

$$\Phi = (\mu_0\, n\, m\, A)\, i$$

e quindi:

$$L = L_{12} = L_{21} = \mu_0\, n\, m\, A \tag{19}$$

Consideriamo come secondo esempio un toroide (solenoide circolare) come quello mostrato in figura. Sia a il raggio del solenoide e b quello dell'intero toroide. Sia n il numero di spire di cui é costituito il toroide ed ammettiamo che attorno ad esso sia presente un avvolgimento contenente m spire. Calcoliamo il coefficiente di mutua induzione tra i due. Consideriamo una circonferenza con centro sull'asse del toroide, giacente in un piano perpendicolare a tale asse e passante per i punti P e P' indicati. Il raggio di tale circonferenza é: $R = b - r cos(\theta)$. Il campo B sará, per motivi di simmetria, diretto tangenzialmente a tale circonferenza ed uguale in tutti i punti di essa. La circuitazione di B lungo tale circonferenza vale:

$$2\pi RB \;=\; 2\pi(b - rcos(\theta))\, B \;=\; \mu_0 n\, i$$

dove i é la corrente nel solenoide. Ne segue:

$$B \;=\; \frac{\mu_0 ni}{2\pi(b - rcos(\theta))} \tag{20}$$

ed il flusso attraverso la sezione del solenoide sará:

$$\Phi(B) \;=\; \frac{\mu_0 ni}{2\pi}\, 2\int_0^a rdr \int_0^\pi \frac{d\theta}{(b - rcos(\theta))} = \mu_0 ni(b - \sqrt{b^2 - a^2})$$

Il flusso attraverso le m spire dell'avvolgimento esterno sará allora:

$$\Phi_m \;=\; \mu_0 nm(b - \sqrt{b^2 - a^2})\; i$$

ed il coefficiente di mutua induzione cercato:

$$L \;=\; \mu_0 nm(b - \sqrt{b^2 - a^2}) \tag{21}$$

Il coefficente di autoinduzione del toroide sará poi ovviamente:

$$M \;=\; \mu_0 n^2(b - \sqrt{b^2 - a^2}) \tag{22}$$

Se $b \gg a$, possiamo sviluppare la parentesi nelle precedenti espressioni, trascurando termini $\frac{a^2}{b^2}$:

$$b - \sqrt{b^2 - a^2} \approx \frac{a^2}{2b}$$

con che avremo:

$$M \;=\; \frac{\mu_0 n^2}{2\pi}\frac{A}{b} \;=\; \frac{\mu_0 n^2 A}{l} \tag{23}$$

dove A é l'area della sezione del solenoide ed l la lunghezza della sua circonferenza centrale.

4 Leggi di Faraday

In un generico circuito, in una zona di spazio dove sia presente un campo d'induzione magnetica B, se il flusso del campo attraverso il circuito subisce, per un qualsivoglia motivo, una variazione nel corso del tempo, nasce una forza elettromotrice e, se il circuito é chiuso su se stesso, fluisce una corrente. La variazione del flusso di B puó esser dovuta a:

(a) uno spostamento del circuito, in una zona di campo disuniforme

(b) uno spostamento delle sorgenti del campo

(c) una variazione temporale dell'intensitá del campo.

In formule, la legge di Faraday é espressa da:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \tag{24}$$

o anche, nel caso di un circuito chiuso su se stesso, avente una resistenza R:

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \tag{25}$$

dove i é la corrente che fluisce nel circuito. Possiamo, partendo dalle equazione date in precedenza, che esprimono l'energia di un insieme di circuiti percorsi da correnti, ricavare l'ultimo di questi risultati, nel caso di circuiti rigidi in posizioni fisse. Se in tale sistema le correnti in alcuni dei circuiti subiscono delle variazioni, varierá il campo B da essi generato e ció modificherá il flusso di B attraverso i rimanenti circuiti. Essendo i circuiti rigidi ed in posizioni fisse, il lavoro meccanico fatto sará nullo e la variazione complessiva di energia del sistema dovrá essere controbilanciata dal lavoro fatto dalle forze elettromotrici che nascono nei circuiti. Ricordiamo l'espressione dell'energia di un sistema di circuiti:

$$U \;=\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}\, i_j\, i_k$$

Se la corrente nel j-mo circuito varia di δi_j la corrispondente variazione dell'energia U sará:

$$\delta U \;=\; \sum_{k=1}^{n} i_k \sum_{j=1}^{n} L_{jk}\delta i_j \tag{26}$$

Il motivo per cui il fattore $\frac{1}{2}$ non é piú presente, puó esser facilmente compreso scrivendo il differenziale di U per il caso di solo due circuiti:

$$U = \frac{1}{2}[i_1L_{11}i_1 + i_1L_{12}i_2 + i_2L_{22}i_2 + i_2L_{21}i_1] \tag{27}$$

da cui:

$$\delta U =$$

$$\frac{1}{2}[i_1L_{11}\delta i_1 + \delta i_1L_{11}i_1 + i_1L_{12}\delta i_2 + \delta i_1L_{12}i_2 +$$

$$+i_2L_{22}\delta i_2 + \delta i_2L_{22}i_2 + i_2L_{21}\delta i_1 + \delta i_2L_{21}i_1] =$$

$$= [i_1L_{11}\delta i_1 + i_1L_{12}\delta i_2 + i_2L_{21}\delta i_1 + i_2L_{22}\delta i_2]$$

che puó essere scritta nella forma:

$$\delta U \;=\; \sum_{k=1}^{n} i_k \sum_{j=1}^{n} L_{jk}\delta i_j \tag{28}$$

Il flusso attraverso il k-mo circuito é dato da:

$$\phi_k \;=\; \sum_{j=1}^{n} L_{jk} i_j$$

e la variazione di tale flusso, conseguente alla variazione delle correnti:

$$\delta\phi_k \;=\; \sum_{j=1}^{n} L_{jk}\delta i_j$$

La variazione di energia puó quindi essere espressa come:

$$\delta U \;=\; \sum_{k=1}^{n} i_k\delta\phi_k$$

Se indichiamo con dt l'intervallo di tempo infinitesimo in cui tale variazione ha luogo, avremo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \;=\; \sum_{k=1}^{n} i_k\frac{\partial\phi_k}{\partial t}$$

Poiché i circuiti sono fermi, il lavoro meccanico sará nullo e quindi per la conservazione dell'energia l'ultima espressione dovrá eguagliare l'energia spesa per unitá di tempo dalle forze elettriche. Se indichiamo con ϵ_k la forza elettromotrice indotta nel k-mo circuito, il lavoro per unitá di tempo fatto da questa é $\epsilon_k i_k$ e quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k\frac{\partial\phi_k}{\partial t} \;=\; -\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k i_k$$

essendo poi le correnti nei vari circuiti indipendenti l'una dall'altra, dovranno essere uguali i termini corrispondenti nelle somme a primo ed a secondo membro:

$$\epsilon_k \;=\; -\frac{\partial\phi_k}{\partial t} \tag{29}$$

Naturalmente dovranno essere anche presenti delle batterie o generatori di forze elettromotrici addizionali ϵ'_k che manterranno le correnti i_k nei vari circuiti e che dissiperanno energia al rate $\epsilon'_k i_k$, ma in aggiunta a queste avremo la forza elettromotrice ϵ_k che é prodotta dalla conversione di energia magnetica in energia elettrica. Possiamo esprimere la forza elettromotrice indotta in termini delle correnti e dei coefficienti di mutua induzione, anziche in termini dei flussi del campo. A tale scopo é sufficiente ricordare le equazioni che danno il flusso in termini dei coefficienti di mutua induzione:

$$\phi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{jk} i_j$$

dalle quali si ottiene subito:

$$\epsilon_k \;=\; -\sum_{j=1}^{n} L_{jk}\frac{di_j}{dt} \tag{30}$$

Nell'ultima equazione abbiamo usato il simbolo della derivata totale al posto di quella parziale, poiché far uso dei coefficenti di induzione vuol dire ammettere che i circuiti siano in quiete l'uno rispetto all'altro e che l'unica dipendenza dal tempo sia quella delle correnti. Nel caso di un singolo circuito avente un coefficiente di autoinduzione L, una variazione di corrente dará luogo ad una forza elettromotrice (di verso tale da opporsi alla variazione) data da:

$$\epsilon = -L\frac{di}{dt} \tag{31}$$

Passiamo ora a considerare il caso (a) elencato sopra, in cui i circuiti si muovano in una zona di campo non uniforme. Esaminiamo per semplicitá il caso di una singola spira di forma generica, avente resistenza R, ed in cui un generatore di forza elettromotrice ϵ' faccia circolare una corrente i. L'energia della spira, immersa nel campo B, sará:

$$U = i\Phi$$

Ammettiamo ora che la spira venga spostata di un tratto infinitesimo in un tempo infinitesimo dt. Il lavoro fatto nel corso dello spostamento é pari a $\mathcal{L} = id\Phi$ Il calore sviluppato nella spira per effetto Joule é:

$$W = Ri^2 dt$$

mentre il lavoro totale fatto dal generatore:

$$\mathcal{L} \; = \; \epsilon \, i \, dt$$

Il bilancio energetico risulta in:

$$\epsilon \, i \, dt \; = \; R \, i^2 \, dt \; + \; i \, d\Phi \tag{32}$$

da cui si ottiene poi:

$$i \; = \; \frac{\epsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R} \tag{33}$$

Quindi la corrente nella spira é determinata non soltanto dalla f.e.m. del generatore, ma contiene anche il termine $-\frac{d\Phi}{dt}$.

Se ϵ fosse nullo, avremmo una corrente:

$$i \; = \; -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \tag{34}$$

il che mostra che la soluzione i=0 della (31) non sarebbe fisicamente accettabile, poiché la corrente i é sicuramente $\neq 0$ per $\epsilon = 0$. Quest'ultima derivazione della legge di Faraday per un circuito in movimento in una zona di spazio ove sia presente un campo d'induzione magnetica é dovuta ad Helmholtz (1821-1894).

Vediamo quindi che lungo il circuito agisce una forza elettromotrice, la quale si somma a quella giá esistente ϵ'. Cioé lungo il percorso della spira agisce un campo elettrico la cui circuitazione non é nulla. In altri termini, se abbiamo un circuito in movimento in una zona di spazio in cui esiste un campo d'induzione magnetica, l'integrale di linea del campo elettrico lungo il circuito non é nullo; il campo che nasce non é piú conservativo.

Passiamo, per completezza, ad esaminare il medesimo problema tenendo conto della forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

dove $\vec{u}$ é la velocitá di trascinamento, cioé quella con cui con cui il conduttore si muove. Per il nostro circuito in moto nel campo B, questa equivale ad un campo elettrico:

$$\vec{E'} = \vec{u} \times \vec{B}$$

Tale campo dará luogo ad una corrente elettrica nel circuito che, in virtú della legge di Lenz, sará tale da opporsi alla variazione di flusso e quindi da opporsi al moto del conduttore. A tale forza si da il nome di reazione elettromagnetica. Benché la forza elettromotrice che dá luogo a tale corrente abbia origine nel moto della cariche nel campo B, possiamo considerarla della stessa natura di quella dovuta alla variazione di flusso. Per il teorema di Stokes avremo:

$$\epsilon' = \oint \vec{E'} \cdot \vec{dl} \ = \ \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \ = \ \int_S [\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})] \cdot \vec{ds}$$

dove la superficie d'integrazione é delimitata dal cammino d'integrazione, che giace internamente al conduttore. Se ora ammettiamo che durante il moto il campo B stia cambiando, la forza elettromotrice totale, prodotta sia dalla variazione del flusso che dal moto del conduttore puó allora essere espressa da:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \ = \ -[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ - \ \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})] \qquad (35)$$

Il membro a destra di tale equazione puó esser considerato la derivata totale cambiata di segno di $\vec{B}$ rispetto a t per un conduttore rigido (che é il caso che si incontra piú di frequente). Ricordiamo infatti che $\vec{u}$ non dipende dalle coordinate spaziali e che inoltre é $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Da ció e da una nota identitá vettoriale segue che il termine $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$, puó essere scritto come:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \ = \ (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \ =$$

$$= -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

La componente x di questo vettore cambiato di segno, cioé la componente x di $-\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$, é :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial B_x}{\partial z} u_z$$

con espressioni analoghe per le altre componenti. Ma, se a tale espressione sommiamo ora la derivata parziale $\frac{\partial B_x}{\partial t}$ troviamo la derivata totale $\frac{dB_x}{dt}$. Tenendo conto anche delle componenti y e z, avremo in definitiva:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \ = \ -\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad (36)$$

o anche, tenendo conto della definizione del potenziale vettore $\vec{A}$:

$$\vec{E} \ = \ -\frac{d\vec{A}}{dt} \qquad (37)$$

Cioé il campo elettrico che nasce per l'effetto combinato di una variazione del flusso e del movimento del conduttore nel campo é la derivata totale del potenziale vettore rispetto al tempo. Integrando la penultima espressione scritta su di una generica superficie che delimita il circuito, vediamo poi che la forza elettromotrice é pari alla derivata del flusso di $\vec{B}$ rispetto al tempo.