Onde elettromagnetiche nei mezzi materiali

1 Alcune conseguenze delle equazioni di Maxwell

Consideriamo un mezzo caratterizzato da valori costanti della permeabilitá magnetica relativa μ_r e della costante dielettrica relativa ϵ_r. Ammettiamo inoltre che per tale mezzo continui a valere la legge di Ohm: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ con J eventualmente complesso.

Cerchiamo soluzioni di onda piana delle equazioni di Maxwell in tale mezzo, soluzioni che scriveremo nella forma:

$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{1}$$

$$\vec{B} = \vec{B_0}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{2}$$

Facendo uso delle equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\vec{E} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{4}$$

Moltiplicando la prima delle due ultime equazioni vettorialmente da sinistra per l'operatore $\vec{\nabla}$, avremo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\nabla}\times[\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\vec{E}]$$

e, ricordando l'identitá matematica:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

l'ultima equazione diventa:

$$-\nabla^2\vec{H} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}) = \sigma\vec{\nabla}\times\vec{E} + \epsilon\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Ricordando ora che $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$ e che la derivata $(\partial\vec{E})/\partial t$ per l'onda di frequenza angolare ω considerata é uguale a $-i\omega\vec{E}$, avremo:

$$\nabla^2\vec{H} + (\sigma - i\omega\epsilon)\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

Questa espressione puó essere ridotta ad un'equazione nella sola variabile $\vec{H}$ facendo uso della seconda delle due equazioni di Maxwell scritte:

$$\nabla^2 \vec{H} \; - \; (\sigma - i\omega\epsilon)\, \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \; = \; 0$$

Sostituendo infine al vettore $\vec{H}$ il suo modulo (ricordiamo che ci stiamo limitando ad esaminare un'onda piana), alla derivata $\frac{\partial H}{\partial t}$ il termine $-i\omega H$, e ricordando che per l'onda piana che stiamo considerando le derivate rispetto ad y e rispetto a z sono nulle, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \; + \; (i\omega\mu\sigma + \omega^2 \epsilon\mu) H \; = \; 0$$

Cerchiamo ora soluzioni di tale equazione del tipo di onda piana monocromatica scritta sopra **??**:

$$H(x) \; = \; H_0 e^{ikx}$$

sostituendo tale espressione nell'equazione precedente, possiamo ricavare k:

$$k \; = \; \sqrt{\epsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma}$$

Ricordando poi le relazioni:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$$c^2 \; = \; \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$k_0 \; = \; \omega / c$$

troviamo:

$$k \; = \; \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r \omega^2 + i\omega\mu_0\mu_r\sigma} \; = \; \sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_r \omega^2}{c^2} + i\omega\sigma \frac{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}{\epsilon}} \; =$$

$$= \; \sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_r \omega^2}{c^2} + i\omega\sigma \frac{\epsilon_r \mu_r}{\epsilon c^2}} \; = \; \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\omega\sigma}{\epsilon c^2}}$$

cioé:

$$k \; = \; \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \sqrt{k_0^2 + i k_0^2 \frac{\sigma}{\epsilon\omega}} \; = \; k_0 \; \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{5}$$

e per B abbiamo:

$$B \; = \; \frac{k}{\omega} \, E$$

Possono ora verificarsi tre casi distinti:

1. dielettrici: σ é trascurabile
2. conduttori: σ é molto grande
3. plasmi: σ é immaginario

Esamineremo ora nell'ordine questi tre casi.

2 Dielettrici

L'equazione **??** ottenuta nella precedente sezione, nel caso di sostanze aventi conducibilitá molto basse, come appunto i dielettrici, diventa:

$$k \;=\; k_0\sqrt{\mu_r\epsilon_r} \;\approx\; k_0\sqrt{\epsilon_r}$$

poiché é $\mu_r \;\approx\; 1$ nel caso dei dielettrici. Per la lunghezza d'onda ció implica:

$$\lambda \;=\; \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r} \;=\; \lambda_0/n$$

dove n é l'indice di rifrazione. Notiamo qui che ϵ_r non é necessariamente reale, e quindi n sará in genere complesso.

Per un discussione di questo punto si veda il libro di Mencuccini e Silvestrini, dove é discusso un semplice modellino classico dell'atomo che porta a valori della parte reale dell'indice di rifrazione in ragionevole accordo con i dati sperimentali.

3 Conduttori

Nel caso dei conduttori, come vedremo, é possibile in molti casi trascurare nell'equazione **??** il termine costante (1) rispetto all'altro. Ció accade se:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

Possiamo vedere che ció equivale a richiedere che nell'equazione di Maxwell **??** che dá il rotore di H, il termine di corrente di spostamento sia trascurabile rispetto a quello di conduzione. Infatti il rapporto dei due termini vale:

$$\frac{J_d}{J} \;=\; \frac{\epsilon\partial E/\partial t}{\sigma E}$$

che per un segnale sinusoidale: $E = E_0 exp(i\omega t)$ vale:

$$\frac{J_d}{J} \;=\; \frac{\epsilon\omega E}{\sigma E} \;=\; \frac{\epsilon\omega}{\sigma}$$

Ad esempio, per il rame ad una frequenza $f = 10^{16}s^{-1}$ avremo:

$$\sigma = 5.8\ 10^7\ S/m$$

$$\epsilon \;=\; \epsilon_0 \;=\; 8.85\ 10^{-12}$$

$$\frac{J_d}{J} \;=\; \frac{8.85\,10^{-12}\,10^{16}\ \ 6.28}{5.8\ 10^7} \;\approx\; 0.01$$

Cioé la corrente di spostamento contribuisce per circa 1% per frequenze di $10^{16}s^{-1}$ ed ancor meno a frequenze piú basse.

Nelle ipotesi fatte, dall'equazione **??** otteniamo:

$$k = k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}\,\sqrt{i} \;=\; k_0\sqrt{\frac{\sigma\mu_r}{\omega\epsilon_0}}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Facendo poi uso della relazione: $k_0 \;=\; \frac{\omega}{c}$ da questa si ottiene con facili passaggi:

$$k \;=\; \sqrt{\omega\sigma\mu}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Sostituendo tale espressione di k nell'equazione dell'onda piana:

$$e^{i(kx-\omega t)} \; = \; e^{-i(\omega t)} e^{i\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}\,x} \; e^{-\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}\,x}$$

Ponendo poi:

$$\delta \; = \; \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

l'equazione dell'onda nel conduttore diventa:

$$e^{i(\frac{x}{\delta}-\omega t)} \; e^{-\frac{x}{\delta}}$$

cioé abbiamo un'onda piana, avente modulo del vettore d'onda uguale a $1/\delta$ e che si attenua di un fattore e=2.718 dopo una lunghezza $x = \delta$.

Consideriamo come primo esempio quello del rame, per il quale $\sigma = 5.8\;10^7 Siemens/m$ e $\mu_r \approx 1$. Ad una frequenza di 60 Hz troviamo:

$$\delta \; = \; \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \; = \; \sqrt{\frac{2}{377 \cdot 5.8\;10^7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \; = \; 0.85\,cm$$

vediamo quindi che un'onda avente una frequenza di 60 Hz é attenuata di un fattore e=2.718 dopo una profonditá di 8.5 mm. Frequenze piú alte sono attenuate ancora di piú. A 60 MHz il campo é ridotto a meno dell'1% ad una profonditá di 0.05 mm.

Osserviamo per inciso che il fenomeno ha un analogo nella conduzione del calore (che é descritta da un'analoga equazione differenziale). In tal caso si nota che le variazioni diurne (alta frequenza) di temperatura non sono apprezzabili sottoterra quanto lo sono le variazioni stagionali (bassa frequenza).

Come il campo, cosí la corrente, ad alte frequenze, é limitata ad un sottile strato superficiale, tanto piú sottile quanto piú é elevata la frequenza (effetto pelle). Ció porta ad una effettiva riduzione della sezione utile dei conduttori e ad un aumento della resistenza.

Se il materiale é ferromagnetico, il parametro μ che compare nell'espressione di δ diverrá μ_r volte piú grande e l'effetto sará ulteriormente accentuato.

Notiamo ancora che la grandezza δ é legata alla lunghezza d'onda nel mezzo dalla relazione:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \; = \; \frac{1}{\delta}$$

da cui, nell'esempio appena considerato, si trova:

$$\lambda \; = \; 5.34\,cm$$

mentre la lunghezza d'onda nel vuoto era:

$$\lambda_0 \; = \; \frac{c}{f} \; = \; \frac{3\;10^8}{377} \; = \; 79.5 \cdot 10^6 cm$$

Nel caso di un conduttore atipico come l'acqua del mare, con $\sigma = 5\;S/m$ ed alla medesima frequenza, troviamo:

$$\delta \; = \; 29m$$

se quindi vogliamo comunicare via radio con un sottomarino, dovremo usare onde di bassa frequenza.

Conviene esaminare anche il rapporto tra il vettore elettrico e quello magnetico nel materiale. Dall'equazione di Maxwell per il rotore di E:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \;=\; -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

facendo uso dell'onda piana data dalle equazioni **??** e **??**, troviamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \;=\; \vec{\nabla} \times (\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}) \;=\; -\vec{E}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \;=\; -i\vec{E}_0 \times \vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \;=\; i\,\vec{k} \times \vec{E}$$

e questo deve essere uguale a:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;=\; i\omega \vec{B}$$

per cui, in definitiva avremo:

$$\vec{k} \times \vec{E} \;=\; \omega\, \vec{B} \;=\; \omega\mu \vec{H}$$

Vediamo quindi che anche nel mezzo i vettori $\vec{E}$,$\vec{H}$ ed il vettore d'onda $\vec{k}$ formano una terna ortogonale. Il rapporto tra i moduli di E e di B é pari a ω/k che, come si puó facilmente vedere, vale:

$$\frac{E}{B} \;=\; \sqrt{\frac{\omega}{\sigma\mu}}$$

ed é anche uguale alla velocitá (di fase) di propagazione della radiazione nel mezzo. Nel caso del rame ad una fequenza di 1 MHz troveremmo un rapporto pari a circa 300 m/s. Nel vuoto, alla medesima frequenza, troveremmo un valore pari a c = $310^8 m/s$. Vediamo quindi che nel mezzo considerato, ad 1 MHz, il campo elettrico é ridotto di un fattore 10^6, se rapportato al campo B, rispetto all'analogo valore nel vuoto. Il rapporto tra l'energia magnetica e l'energia elettrica sará:

$$R \;=\; \frac{B^2/2\mu}{\epsilon E^2/2} \;=\; \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \;\approx\; 10^{12}$$

cioé l'energia é quesi interamente magnetica.

4 Plasmi

Un plasma é un gas ionizzato ed elettricamente neutro: elettroni e nuclei non sono piú legati. Ció accade ad esempio a temperature estremamente elevate, o in presenza di intense sorgenti ionizzanti [**?**]. É un plasma ad esempio una scintilla, cosí come lo é in larga misura una stella. Un plasma (debolmente ionizzato) é la ionosfera, cioé la zona esterna dell'atmosfera terrestre,situata ad altezze comprese tra circa 100 e 400 km, ionizzata per effetto della radiazione solare.

In un plasma accade che la corrente segua il campo elettrico dell'onda con un'anticipo di fase pari a $\pi/2$; cioé la conducibilitá σ é immaginaria. Vediamo come ció accada.

Consideriamo al solito il caso di un'onda piana, diretta lungo un asse (asse z) e sia il campo elettrico diretto lungo l'asse y. Il campo elettrico dell'onda sia descritto da:

$$E \;=\; E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

La velocitá raggiunta al tempo t da un elettrone investito dall'onda sará:

$$v = \int a\, dt = \int \frac{e\, E}{m_e}\, dt = \frac{e\, E_0}{m_e} \int e^{i(kz-\omega t)}\, dt =$$

$$= -\frac{e\, E_0}{i\omega m_e}\, e^{i(kz-\omega t)} = -\frac{e\, E}{i\omega m_e}$$

dove con e ed m_e abbiamo indicato la carica e la massa dell'elettrone.
Segue poi per la densitá di corrente $J = \rho v$:

$$J = e\, N\, \frac{ieE}{\omega m_e}$$

dove N é il numero di elettroni per unitá di volume. Si vede quindi che la conducibilitá é data da:

$$\sigma = \frac{J}{E} = \frac{iNe^2}{\omega m_e}$$

che é immaginaria, come anticipato.

Ricordiamo ora la relazione **??**:

$$k = k_0\, \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

Possiamo ammettere che in tale espressione sia μ_r che ϵ_r valgano 1, trattandosi di gas a bassa densitá. Sostituendo allora l'espressione trovata per la conducibilitá, troviamo:

$$k = k_0 \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0}}$$

Introduciamo ora la *frequenza di plasma* ω_P:

$$\omega_P^2 = \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}$$

per scrivere il numero d'onda k nella forma semplificata:

$$k = k_0\, \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$$

Notiamo che la frequenza di plasma é determinata essenzialmente dalla densitá N di elettroni nel plasma, essendo gli altri parametri che intervengono nella definizione delle costanti universali. Ad esempio, nel caso della ionosfera terrestre, la densitá di elettroni varia tra circa 10^{12} e 10^{13} per m^3, il che implica valori di ω_P compresi tra $5.6\, 10^7$ e $1.8\, 10^8$ rad/s, cioé valori della variabile $f_P = \omega_P/2\pi$ compresi tra $8.9\, 10^6$ e $2.8\, 10^7 s^{-1}$.

Ora possono verificarsi tre casi, a seconda del valore relativo di ω e di ω_P.

a) $\omega < \omega_P$

In tal caso il radicando é negativo, e k immaginario. Ne segue che l'andamento spaziale dell'ampiezza del campo elettrico sará del tipo:

$$E = E_0\, e^{-|k|}$$

Ció implica una rapida attenuazione dell'onda che entra nella zona occupata dal plasma. Di fatto l'onda sará riflessa quasi totalmente (visto che nel meccanismo esaminato non intervengono, in prima approssimazione, fenomeni dissipativi). É quel che accade nelle trasmissioni radio in AM, dove si lavora con frequenze tipiche inferiori a qualche MHz. Si é visto infatti che le frequenze di plasma nella ionosfera sono dell'ordine di 10 Mhz. Tale fenomeno consente trasmissioni radio, in tale range di frequenze, a gandi distanze. Che l'onda non perda energia nel plasma é ovvio anche se si pensa che l'energia dissipata per unitá di tempo ed unitá di volume é: $\vec{E} \cdot \vec{J}$ e che $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, con σ immaginario, il che implica un'energia dissipata nulla.

b) $\omega = \omega_P$

In tal caso avremo $k = 0$ cioé una lunghezza d'onda infinitamente lunga nel plasma.

c) $\omega > \omega_P$

In tal caso k é reale e minore di k_0. Ció implica una lunghezza d'onda nel plasma (e quindi una velocitá di fase) maggiore di quella nel vuoto.

Notiamo che, fissato N, l'indice di rifrazione n tende ad 1 per $\omega \gg \omega_p$. Se invece fissiamo ω (ad un valore maggiore di ω_p), n diminuisce all'aumentare di N, cioé della densitá elettronica. Numericamente troviamo:

$$\omega_p = 56.415 \sqrt{N}$$

$$n = \sqrt{1 - 3182.7 \, N/\omega^2}$$

Per $\omega < \omega_p$ l'onda é riflessa qualunque sia l'angolo d'incidenza.
Se invece $\omega > \omega_p$, n é reale e minore di 1 ed avremo quindi, indicando con i l'angolo d'incidenza dell'onda sulla superficie del plasma e con r l'angolo di rifrazione:

$$\sin i = n \sin r$$

con $n < 1$; da cui:

$$\sin i_{max} = n = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}}$$

e quindi anche:

$$\cos i_{max} = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}}$$

La parte dell'atmosfera situata ad altezze superiori a circa 60 km é interessata da fenomeni rilevanti per la fisica dei plasmi e per le trasmissioni radio.

Infatti, la parte esterna dell'atmosfera terrestre é investita dalla radiazione solare con una intensitá (potenza per unitá di superficie) di circa 1370 $Watt/m^2$ (tale valore é noto come la costante solare). Tale radiazione copre un'ampio spettro di frequenze, che va dalle onde radio, all'infrasso ed arriva fino all'ultravioletto (uv). La radiazione uv, e quella a frequenze ancora piú elevate, ha un'energia sufficiente a ionizzare le molecole di gas incontrate. Nelle parti piú esterne dell'atmosfera l'intensitá della radiazione é molto elevata, ma la densitá del gas é ridotta, quindi la ionizzazione non é molto elevata. Via via che l'altezza diminuisce, la densitá dei gas aumenta e quindi aumenta anche la ionizzazione. Tuttavia tale aumento é compensato da un parallelo aumento della ricombinazione tra ioni ed elettroni, dovuto all'aumento della densitá e quindi ad una diminuzione del cammino libero medio degli elettroni tra una collisione e la successiva. La densitá del plasma ad una

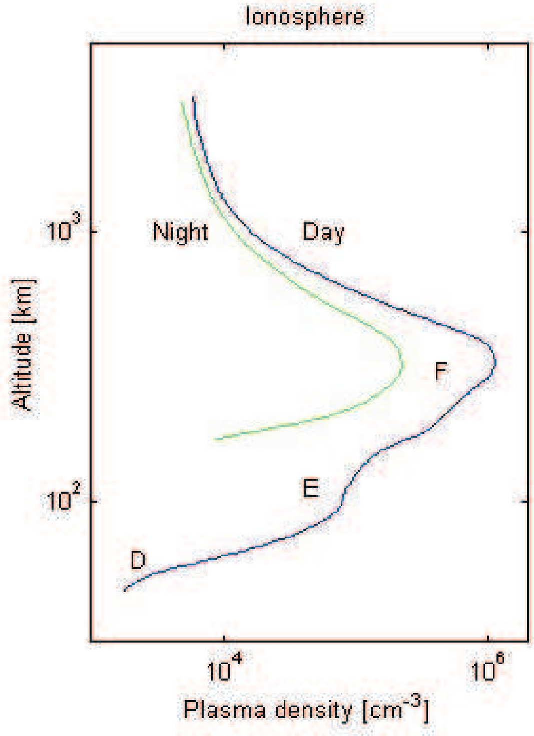

Figura 1:

data altezza é quindi determinata dal bilanciamento tra i processi di ionizzazione e ricombinazione.

Ad altezze ancora minori, la densitá di atomi e molecole aumenta ulteriormente, ma in parallelo diminuisce l'intensitá della radiazione che vi arriva, a causa dell'assorbimento negli strati piú alti dell'atmosfera. Si raggiunge infine un punto in cui la ridotta intensitá della radiazione, la maggiore densitá del gas e l'accresciuto rate di ricombinazione si fanno equilibrio, e la densitá del plasma comincia a diminuire con il diminuire dell'altezza. Si formano cosí della fascie, situate a varie altezze, cui corrispondono densitá ioniche diverse. Queste fasce vanno sotto il nome di strati di Heaviside e, a seconda della relativa densitá di ionizzazione, sono classificati con le sigle D, E, F1, F2 e G.

Lo strato D si estende da 60 a 90 km di altezza. Esso fu scoperto casualmente, quando ci si rese conto che emissioni radio dall'europa potevano esser rivelate negli Stati Uniti. Ci si rese allora conto che doveva esistere una qualche riflessione. Fu appunto Oliver Heaviside (e simultaneamente l'ingegnere elettronico americano Arthur Kennelly) a postulare l'esistenza di uno strato riflettente situato nella stratosfera.

Nel 1912 uno degli ex assistenti di Marconi, William Eccles, che aveva collaborato con Marconi alla preparazione della prima trasmissione radio intercontinentale, elaboró la teoria che spiegava come uno strato di gas ionizzato potesse svolgere tale ruolo. Nel 1924 Edward Appleton dimostró la fondatezza di tale teoria, quando egli scoprí la ionosfera. Lo strato E é quello cui corrisponde la riflessione di onde corte. Esso si estende da 90 a 140 km di altezza. Gli strati F1 ed F2 sono quelli dove la densitá di ioni é maggiore. Essi si estendono da 140 a 1000 km. Il massimo della densitá ionica é raggiunto ad altezze comprese tra 200 e 500 km, dove la densitá varia tra $4\ 10^{10}$ e $4\ 10^{12}\ m^{-3}$, che corrisponde a valori della frequenza di plasma ω_p compresi tra 1.8 e 18 MHz. La figura mostra l'andamento della densitá ionica in funzione dell'altezza. Le onde radio sono totalmente riflesse per frequenze inferiori alla frequenza di plasma (o frequenza critica). La riflessione puó anche aver luogo per frequenze piú elevate, se le onde incidono sulla ionosfera a grandi angoli. Ovviamente, le tasmissioni radio a lunga distanza sulla Terra debbono far uso di frequenze inferiori a quella critica, mentre la radioastronomia e le comunicazioni via satellite possono essere effettuate solo a frequenze tali da riuscire ad attraversare la ionosfera.

Riferimenti bibliografici

[1] Per una discussione piú approfondita delle proprietá dei plasmi, di quel che non sia possibile quí, si veda a pag. 554 del volume 3 (Elettricitá) di D. V. Sivuchin.