Intensitá di un'onda sonora

24 Ottobre 2001

0.1 Intensitá di un'onda sonora in un tubo pieno di gas

0.1.1 Prima derivazione

Possiamo calcolare l'intensitá a partire dall'espressione del lavoro (per unitá di tempo e di superficie) che lo strato di gas posto a monte di una certa sezione del tubo fa su quello posto a valle. Tale lavoro é pari al prodotto della "pressione in eccesso" $P_e = P - P_0$ per la velocitá con cui si muove lo strato di gas. Denotando con $\delta(x,t)$ la funzione che esprime lo spostamento nel punto di ascissa x al tempo t, avremo:

$$I(t) \;=\; \frac{\partial \delta}{\partial t} P_e$$

dove, per un'onda sinusoidale é:

$$\delta(t) \;=\; \delta_0 \cos(kx - \omega t)$$

Derivando questa rispetto al tempo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} \;=\; \omega \delta_0 \sin(kx - \omega t)$$

La pressione in eccesso P_e é data da:

$$P_e \;=\; -K\rho_0 \frac{\partial \delta}{\partial t}$$

dove K é dato da:

$$K \;=\; v^2$$

e ρ_0 é la densitá a riposo del gas. v é la velocitá di propagazione dell'onda.

Si ha quindi per P_e:

$$P_e \;=\; K\rho_0\delta_0\omega \sin(kx - \omega t)$$

Per cui:

$$I(t) \;=\; P_e \frac{\partial \delta}{\partial t} \;=\; \frac{K\rho_0\omega^2\delta_0^2}{v} sin^2(kx - \omega t)$$

La media su di un periodo dá un fattore 1/2, per cui:

$$I \;=\; 2\pi^2\nu^2\delta_0^2\rho_0 v$$

0.1.2 Seconda derivazione

L'intensitá puó anche esser calcolata a partire dall'energia cinetica trasportata per unitá di tempo e di superficie.

Consideriamo un trattino di tubo di lunghezza Δx. La massa di gas contenuta in esso, per unitá di area é:

$$\Delta m \;=\; \rho_0 \Delta x$$

La sua energia cinetica:

$$\Delta T \;=\; \frac{1}{2}\Delta m v^2 \;=\; \frac{1}{2}\rho_0 \Delta x \left(\omega\delta_0 sin(kx-\omega t)\right)^2 \;=\; \frac{1}{2}\rho_0 \Delta x \omega^2 \delta_0^2 sin^2(kx-\omega t)$$

Per Δx infinitesimo:

$$dT \;=\; \frac{1}{2}\rho_0 dx \omega^2 \delta_0^2 sin^2(kx-\omega t)$$

L'energia cinetica per unitá di tempo sará ora:

$$\frac{dT}{dt} \;=\; \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 \delta_0^2 sin^2(kx-\omega t)\,\frac{dx}{dt} \;=\; \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 \delta_0^2 sin^2(kx-\omega t)\,v$$

Il valor medio di questo su di un periodo é:

$$\frac{1}{4}\rho_0 \omega^2 \delta_0^2 v$$

Poiché sappiamo che l'energia potenziale é uguale a quella cinetica, l'energia totale trasportata sará due volte questa:

$$I \;=\; \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 \delta_0^2 v \;=\; 2\pi^2 \nu^2 \delta_0^2 \rho_0 v$$

Cioé il medesimo risultato ottenuto con il metodo precedente.

0.2 Intensitá di un'onda sonora emessa da una sorgente "puntiforme" (onda sferica)

Calcoliamo ora, seguendo lo stesso metodo adoperato nel caso di un'onda piana, l'intensitá di un'onda sferica. Confronteremo poi il risultato ottenuto con quello relativo al caso dell'onda piana.

Lo spostamento radiale di un guscio sferico infinitesimo é ora dato da:

$$\delta(r,t) \;=\; \frac{\overline{\delta}^2}{r} cos(kr-\omega t)$$

dove abbiamo indicato con $\overline{\delta}^2$ l'ampiezza (in tal modo la funzione δ avrá le dimensioni di una lunghezza).

L'energia cinetica contenuta nel guscio sferico di spessore infinitesimo dr é data da:

$$dT \;=\; \frac{4\pi r^2 \rho_0}{2}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 dr \;=\; \frac{4\pi r^2}{2}\frac{\rho_0 \overline{\delta}^4 \omega^2}{r^2} sin^2(kr-\omega t)\,dr$$

dove ρ_0 é la densitá di volume del gas a riposo.

Poiché siamo interessati all'intensitá, cioé all'energia per unitá di superficie (e di tempo) dividiamo per $4\pi r^2$, ottenendo:

$$dT \;=\; \left(\frac{\overline{\delta}^2}{r}\right)^2 \frac{\omega^2 \rho_0}{2} sin^2(kr-\omega t)\,dr$$

In un intervallo di tempo infinitesimo dt, questa energia cinetica si sposta del tratto vdt, dove v é la velocitá di propagazione dell'onda:

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\overline{\delta}^2}{r}\right)^2 \frac{\omega^2\rho_0}{2} sin^2(kr - \omega t)\, v$$

Questa rappresenta il contributo all'intensitá istantanea dovuto alla sola energia cinetica trasportata. Teniamo ora conto del fatto che l'energia potenziale contribuisce in ugual misura. Mediando sul tempo otteniamo allora per l'intensitá:

$$I = \left(\frac{\overline{\delta}^2}{r}\right)^2 \frac{\omega^2\rho_0}{2}\, v$$

Per confrontare ora questo risultato con quello ottenuto nel caso dell'onda piana, esaminiamo il coefficiente $\frac{\overline{\delta}^2}{r}$, che é l'ampiezza d'oscillazione dell'onda, alla distanza r dalla sorgente. Se r varia da r_1 ad r_2, la variazione percentuale di tale coefficiente sará:

$$2\,\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

Vediamo che, per $r_1 \approx r_2$ molto grande, tale variazione percentuale é piccola. In tal caso il termine: $\frac{\overline{\delta}^2}{r}$ puó esser considerato all'incirca costante. Ponendo:

$$\frac{\overline{\delta}^2}{r} = \delta_0$$

abbiamo allora:

$$I = \delta_0^2 \frac{\omega^2\rho_0}{2}\, v$$

cioé il medesimo risultato ottenuto nel caso dell'onda piana.