Capitolo 8

Il modello di Ebers-Moll per i transistor bipolari

8.1 Basi del modello

Il modello a parametri h del transistor bipolare, o equivalentemente il modello a π, sono utilizzabili per calcolare le principali proprietà (guadagno in corrente, resistenza d'ingresso etc.) di amplificatori a transistor. Nella più gran parte dei casi, in tali applicazioni, i transistor lavorano in zona attiva. Un modello che schematizza il funzionamento del transistor in una qualsivoglia delle zone di funzionamento (zona attiva diretta, attiva inversa, saturazione, interdizione) è quello proposto da Ebers e Moll nel 1954, successivamente perfezionato da altri ed ampiamente adoperato per simulare al computer il comportamento del transistor [1]

Le equazioni di Ebers-Moll hanno inoltre il vantaggio di esser "costruite" a partire dai principi fisici su cui è basato il comportamento del transistor. Se infatti indichiamo le correnti e tensioni nel transistor, facendo uso della notazione di figura 8.1, e ricordiamo che la corrente di collettore I_C è una frazione α della corrente di emettitore: $I_C = \alpha_D I_E$ avremo reso conto, approssimativamente, del funzionamento del transistor in zona attiva. Si noti che abbiamo chiamato α_D il parametro α, per indicare che intendiamo riferirci al funzionamento "diretto" (cioè nella normale zona attiva, con $V_{BE} > 0$ e $V_{BC} < 0$).

Ricordiamo ora che in zona attiva contribuisce alla corrente di collettore anche la corrente inversa di saturazione I_{CO}, dovuta alle cariche minoritarie (positive in un transistor npn) presenti nel collettore, accelerate verso la base (e poi l'emettitore) dalla polarizzazione inversa della giunzione base-collettore. A rigore dovremo quindi esprimere la corrente di collettore come:

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

Risulta più conveniente esprimere il secondo termine a secondo membro, nella forma completa che caratterizza un diodo (la giunzione base-collettore) polarizzato inversamente:

$$I_{CO} \rightarrow -I_{CO}\left(e^{V_{BC}/V_T} - 1\right)$$

[1] Questo è adoperato ad esempio nel programma di simulazione "SPICE"; dove peraltro è possibile scegliere modelli più avanzati, quali quello di Gummel-Poon o altri.

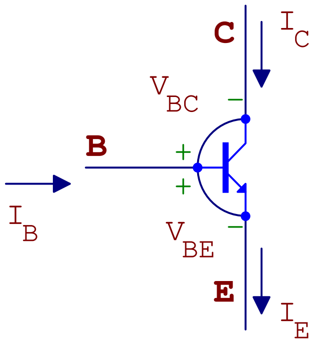

Figura 8.1:

che, nella zona di funzionamento attualmente in esame ($V_{BC} < 0$ e $|V_{BC}| \gg V_T$) coincide con $+I_{CO}$.

Il vantaggio di esprimere in tal modo il secondo termine è nel fatto che tale espressione è più generale. Essa renderà conto del funzionamento del transistor anche se la giunzione base-collettore è polarizzata direttamente. Scriveremo quindi:

$$I_C = \alpha_D I_E - I_{CO}\left(e^{V_{BC}/V_T} - 1\right) \tag{8.1}$$

Ammettiamo ora che sia la giunzione base-emittitore che quella base-collettore siano polarizzate inversamente. L'espressione precedente (scritta per V_{BC} negativo, e $|V_{BC}| \gg V_T$):

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

deve fornire, essendo con tali polarizzazioni il transistor interdetto, valori pressochè nulli per le correnti I_C ed I_E. Ciò è possibile se, accanto all'equazione 8.1, introduciamo una seconda equazione che fornisca I_E in funzione di V_{BC}, V_{BE} ed I_C. Il punto di partenza per costruire tale equazione è l'equazione che lega la corrente nel diodo base-emettitore alla differenza di potenziale V_{BE}:

$$I_E = I_{EO}\left(e^{V_{BE}/V_T} - 1\right)$$

Se il diodo è polarizzato direttamente ($V_{BE} > V_\gamma$), questa fornirà correttamente il valore della corrente I_E da adoperare nella 8.1.

Se il diodo è polarizzato inversamente avremo: $I_E = -I_{EO}$, cioè un contributo molto piccolo alla corrente (corrente inversa di saturazione della giunzione base-emettitore). Notiamo tuttavia che, con V_{BE} negativo, un ulteriore contributo alla corrente I_E può venire se la giunzione base-collettore è polarizzata *direttamente*. Infatti, in tali condizioni, il collettore immetterebbe elettroni nella base e questi, o meglio una frazione α_R di questi, passerebbero poi nell'emettitore[2].

[2] Il parametro α_R è l'analogo del parametro α_D che compare quando il transistor lavora in zona attiva diretta. Nelle condizioni ora in esame diremo che il transistor lavora in zona attiva inversa (la sottoscritta R sta per "reverse"). In genere è $\alpha_R \ll \alpha_D$

In termini della corrente, potremo dire che una frazione α_R della corrente di collettore, passa nell'emettitore:

$$I_E = \alpha_R I_C$$

a questa va poi *sommata* la corrente (I_{EO}) inversa di saturazione che, con $V_{BE} < 0$, fluisce tra emettitore a base:

$$I_E = \alpha_R I_C - I_{EO}$$

Infine, riscriviamo il secondo termine a secondo membro nel modo generale appropriato per un diodo, ottenendo:

$$I_E = \alpha_R I_C + I_{EO}\left(e^{V_{BE}/V_T} - 1\right) \tag{8.2}$$

Le 8.1 e 8.2 sono le equazioni di Ebers-Moll. Il primo dei termini a secondo membro di ciascuna delle due equazioni rappresenta la "componente di transistor" della relativa corrente; il secondo la "componente di diodo". Le due equazioni rendono conto del funzionamento del transistor in una qualsivoglia delle zone di funzionamento.

É facile verificare come da queste equazioni sia possibile ricavare le correnti in funzione delle tensioni:

$$I_E = \frac{I_{EO}}{1-\alpha_D\alpha_R}\left(e^{V_{BE}/V_T} - 1\right) - \frac{\alpha_R I_{CO}}{1-\alpha_D\alpha_R}\left(e^{V_{BC}/V_T} - 1\right) \tag{8.3}$$

$$I_C = \frac{\alpha_D I_{EO}}{1-\alpha_D\alpha_R}\left(e^{V_{BE}/V_T} - 1\right) - \frac{I_{CO}}{1-\alpha_D\alpha_R}\left(e^{V_{BC}/V_T} - 1\right) \tag{8.4}$$

Possiamo anche ricavare le tensioni ai capi delle giunzioni in funzione delle correnti:

$$V_{BE} = V_T \ln\left[1 - \frac{I_E - \alpha_R I_C}{I_{EO}}\right] \tag{8.5}$$

$$V_{BC} = V_T \ln\left[1 - \frac{I_C - \alpha_D I_E}{I_{CO}}\right] \tag{8.6}$$

I parametri fisici α_D, α_R, I_{EO}, I_{CO} non sono indipendenti; essi sono legati tra loro da:

$$\alpha_D I_{EO} = \alpha_R I_{CO}$$

Abbiamo già incontrato il parametro β del transistor, pari al rapporto tra I_C ed I_B in zona attiva. Anche ora possiamo definire $\beta = h_{FE}$ come:

$$h_{FE} = \frac{I_C}{I_B}$$

e, per la componente variabile:

$$h_{fe} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$$

Entrambi questi parametri possono esser espressi in funzione dei coefficienti presenti nelle equazioni di Ebers-Moll. Infatti, in zona attiva, con $V_{BC} < 0$ e $|V_{BC} \gg V_T$, la 8.1 diventa:

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

e, poichè $I_E = I_B + I_C$:

$$I_C = \alpha_D I_B + \alpha_D I_C + I_{CO}$$

da cui:

$$I_C = \frac{\alpha_D}{1-\alpha_D} I_B + \frac{I_{CO}}{1-\alpha_D} = h_{FE} I_B + \frac{I_{CO}}{1-\alpha_D}$$

e, per h_{fe}, essendo in genere I_{CO} piccolo:

$$h_{fe} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \approx h_{FE} \approx \frac{\alpha_D}{1-\alpha_D}$$

Ad esempio, per $\alpha_D = 0.98$ si ha $h_{FE} \approx h_{fe} \approx 50$.

Quando il transistor funziona in modo inverso, il ruolo dell'emettitore e del collettore vengono ad essere scambiati, ed I_C sostituisce I_E (e viceversa). Occorrerà ora far uso dell'equazione 8.2:

$$I_E = \alpha_R I_C - I_{E0}$$

dove $I_C = I_E - I_B$, per cui:

$$I_E = \alpha_R I_E - \alpha_R I_B - I_{E0}$$

e quindi:

$$I_E = -\frac{\alpha_R}{1-\alpha_R} I_B - \frac{I_{E0}}{1-\alpha_R}$$

per cui:

$$h_{FC} \equiv -\frac{I_E}{I_B} = \frac{\alpha_R}{1-\alpha_R}$$

Dove la sottoscritta C in h_{FC} stà ad indicare che ora, con i ruoli di emettitore e collettore scambiati, la configurazione è di *collettore comune*.

Si noti che ora I_E è negativo, rispetto alla convenzione adottata in precedenza per i versi delle correnti.

In genere α_R è molto diverso da α_D. Valori tipici sono:

$$\alpha_R \approx 0.01 \div 0.2 \;\Rightarrow h_{FC} \approx 0.01 \div 0.25$$

Cioè il guadagno in corrente nel modo attivo-inverso è molto minore di quello relativo al modo attivo-diretto. Il transistor, a causa dei dettagli costruttivi (drogaggio di base, emettitore e collettore; dimensioni fisiche delle giunzioni) non è simmetrico per scambio emettitore-collettore.

8.2 Il transistor in interdizione

Se la tensione tra base ed emettitore non è sufficientemente elevata da polarizzare direttamente la relativa giunzione, la corrente di emettitore si riduce a zero. Se inoltre anche la giunzione di collettore è polarizzata inversamente, con $V_{BC} \gg V_T$, la I_E può esser ottenuta dall'equazione 8.3:

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_D \alpha_R} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) + \frac{\alpha_R I_{C0}}{1 - \alpha_D \alpha_R}$$

e, facendo uso della relazione:

$$\alpha_D I_{E0} = \alpha_R I_{C0}$$

si trova:

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_D \alpha_R} \left(e^{V_{BE}/V_T} + \alpha_D - 1 \right)$$

dove $\alpha_D \approx 1$, per cui:

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_R} e^{V_{BE}/V_T}$$

che, con α_R nel range di valori $(0.01 \div 0.2)$, ci dà:

$$I_E \cong (1 \div 1.25)\, I_{E0} e^{V_{BE}/V_T}$$

Come nel caso di un diodo, I_E diverrà apprezzabile solo per $V_{BE} \geq 0.6\,V$.

8.3 Il transistor in saturazione

Consideriamo il montaggio di figura 8.2, con il transistor che lavora in zona attiva.

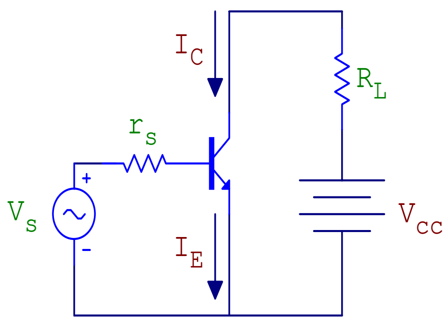

Figura 8.2:

In tali condizioni la corrente di base sarà tale che la corrispondente corrente di collettore I_C provoca in R_L una caduta di potenziale molto minore di V_{CC}. In tali condizioni, mentre la giunzione emitittore-base è polarizzata direttamente, quella base-collettore è polarizzata inversamente.

Se si aumenta ora la corrente di base, si avrà un conseguente aumento della corrente di collettore, un aumento della caduta di potenziale in R_L ed in definitiva un minor valore di V_C, e quindi di V_{CE}. Aumentando ulteriormente la corrente di base si potrà raggiungere un punto tale che la differenza di potenziale base-collettore cambi segno, cioè la giunzione venga ad esser polarizzata *direttamente* (cioè nel verso tale da sfavorire il flusso delle cariche di minoranza elettroni presenti nella base, verso il collettore).

Notiamo che la giunzione base-emettitore continua ad iniettare elettroni nella base (cioè corrente nell'emettitore), ma questi elettroni non possono più esser raccolti dal circuito di collettore, a causa della polarizzazione della giunzione base-collettore. In tali condizioni si dice che il transistor è entrato in *saturazione*. Avremo una elevata corrente di base, una elevata corrente di emettitore ma una piccola corrente di collettore. Il rapporto I_C/I_B, che è uguale ad una costante (h_{FE}) in zona attiva, diviene ora molto minore di h_{FE}. Possiamo allora scegliere quale parametro che misura il "grado di saturazione", il rapporto:

$$\sigma = \frac{I_C}{h_{FE} I_B}$$

che deve essere uguale ad 1 in zona attiva diretta.

Poichè la saturazione implica una polarizzazione diretta (o comunque non inversa) della giunzione base-collettore, ci si deve aspettare un legame tra σ e V_{BC} e, di conseguenza, tra σ e V_{CE}.

Con la convenzione per i segni già adottata in figura 8.1, la relazione tra V_{CE}, V_{BE} e V_{BC} è:

$$V_{CE} = V_{BE} - V_{BC}$$

Dalle equazioni 8.5 e 8.6, trascurando il termine costante (1) (poichè per entrambe le giunzioni è $V_D \gg V_T$), si ottiene:

$$V_{BE} - V_{BC} = V_T \ln \left(\frac{I_E - \alpha_R I_C}{I_{E0}} \cdot \frac{I_{C0}}{I_C - \alpha_D I_E} \right)$$

Poichè inoltre è:

$$\frac{I_{C0}}{I_{E0}} = \frac{\alpha_D}{\alpha_R}$$

nonchè: $I_C = I_E - I_B$, l'equazione precedente, dopo alcuni semplici passaggi algebrici diventa:

$$V_{CE} = V_{BE} - V_{BC} \;=\; V_T \ln \frac{I_E/h_{FC} + I_B}{I_B - I_C/h_{FE}}$$

con:

$$h_{FC} = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

$$h_{FE} = \frac{\alpha_D}{1 - \alpha_D}$$

e, dividendo numeratore e denominatore per I_B:

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1 + \frac{I_E}{h_{FC} I_B}}{1 - \frac{I_C}{h_{FE} I_B}} \; = \; V_T \ln \frac{1 + \frac{I_C}{h_{FC} I_B} + \frac{1}{h_{FC}}}{1 - \sigma} \; =$$

$$= \; V_T \ln \frac{1 + \frac{I_C}{h_{FE} I_B} \cdot \frac{h_{FE}}{h_{FC}} + \frac{1}{h_{FC}}}{1 - \sigma} \; = \; V_T \ln \frac{\sigma \cdot \frac{h_{FE}}{h_{FC}} + \frac{1 + h_{FC}}{h_{FC}}}{1 - \sigma}$$

L'andamento di questa funzione della variabile σ è mostrato in figura 8.3.

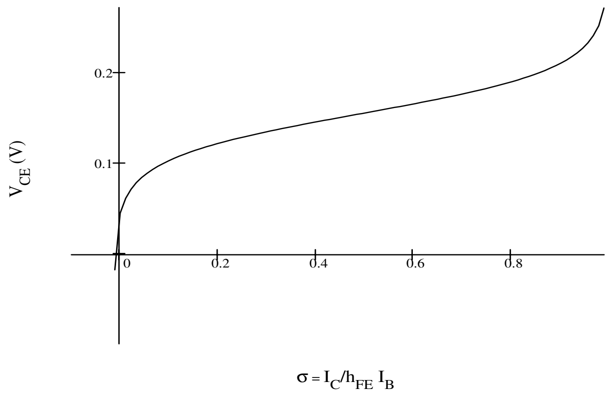

Figura 8.3:

Esaminiamo alcuni punti caratteristici di tale funzione, o equivalentemente della sua inversa $\sigma(V_{CE})$.

(1) σ si annulla per:

$$V_{CE} = V_T \ln \left(\frac{1 + h_{FC}}{h_{FC}} \right)$$

con:

$$h_{FC} = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

per cui: $V_{CE} = V_T \ln (1/\alpha_R)$ che, con valori tipici di

$$V_T = 25 \; mV \;\; , \;\;\; \alpha_R = 0.2$$

vale:

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1}{\alpha_R} \approx 25 \ln 5 \; mV \; = \; 40 \; mV$$

cioè σ, e quindi la corrente di collettore, è praticamente nulla per $V_{CE} \approx 40 \; mV$.

(2) σ è uguale ad 1 per:

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1}{h_{FC}} \frac{1 + h_{FE} + h_{FC}}{1 - \sigma} \to \infty$$

In pratica σ sarà prossimo ad 1 per valori di V_{CE} di $5 \div 10\ V$.

(3) Esaminiamo infine la zona di saturazione; quella in cui $V_{CE} \approx 0$. Questa è molto importante nei circuiti digitali, dove un basso valore di V_{CE} è essenziale per una buona separazione del livello logico "basso" (transistor in saturazione) dal livello logico "alto" (transistor interdetto).

Vediamo che V_{CE} si annulla per:

$$\frac{1 + h_{FC}}{h_{FC}} + \frac{h_{FE}}{h_{FC}}\sigma \ = \ 1 - \sigma$$

cioè:

$$\sigma \left(1 + \frac{h_{FE}}{h_{FC}}\right) = -\frac{1}{h_{FC}}$$

e quindi:

$$\sigma \ \equiv \ \frac{I_C}{h_{FE} I_B} = -\frac{1}{h_{FE} + h_{FC}}$$

da cui:

$$\frac{I_C}{I_B} = -\frac{1}{1 + \frac{h_{FC}}{h_{FE}}}$$

che, per $h_{FE} = 100$ ed $h_{FC} = 0.25$, ci dà:

$$\frac{I_C}{I_B} \approx -0.997$$

Il punto d'inizio della saturazione può essere considerato quello in cui $\sigma \leq 0.9$, al quale corrisponde un valore di V_{CE}^{sat} dato da:

$$V_{CE}^{sat} \ = \ V_T \ln \left[10 \left(\frac{1 + h_{FC}}{h_{FE}} + 0.9 \frac{h_{FE}}{h_{FC}}\right)\right]$$

dove è $h_{FE} \gg 1 + h_{FC}$, per cui questa è approssimativamente:

$$V_{CE}^{sat} \ = \ V_T \ln \left(9 \frac{h_{FE}}{h_{FC}}\right) \ = \ 285\ mV$$

dove abbiamo ammesso che sia $h_{FE} = 100$ ed $h_{FC} = 0.01$.

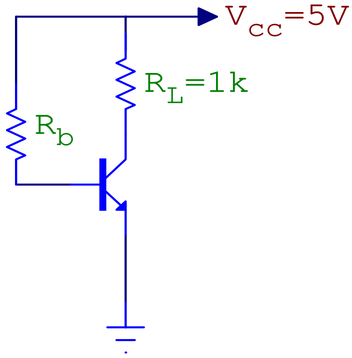

Figura 8.4:

In pratica, se si vuole utilizzare un transistor che operi in saturazione con il minor valore possibile di V_{CE}, si mantiene fisso I_C (ad esempio, nel circuito di figura 8.4, $I_C = V_{CC}/R_L$) e si cerca di ottenere il minimo valore possibile di V_{CE} aumentando I_B.

Se ad esempio volessimo un valore di $V_{CE} = 0.2\ V$ avremmo:

$$I_C = \frac{5 - 0.2}{1k} \; = \; 4.8\ mA$$

I_B dovrà allora esser maggiore di $4.8/h_{FE}$ che, con $h_{FE} = 50$ è:

$$I_B > 0.096\ mA$$

Possiamo, per precauzione, scegliere un valore doppio di questo: $I_B = 0.192\ mA \approx 0.2\ mA$. R_b dovrà allora valere:

$$R_b = \frac{5 - V_{BE}^{sat}}{0.2}\ (k\Omega)$$

dove $V_{BE}^{sat} \approx 0.8\ V$. Ne segue:

$$R_b = \frac{5 - 0.8}{0.2} = 21\ k\Omega$$

Spesso le case costruttrici forniscono, per un dato transistor, un grafico di V_{CE}^{sat} in funzione di σ o di I_C/I_B.