

Capitolo 10

Caratteristiche dei FET ed amplificatori a FET

10.1 Introduzione

In questo capitolo discuteremo alcuni semplici esempi dell'uso dei FET come amplificatori. Analizzeremo in particolare la scelta del punto di lavoro e delle reti di polarizzazione, il calcolo della risposta per piccoli segnali, a basse frequenze ed infine i limiti posti dalle capacità parassite e da quelle di accoppiamento sulla banda passante.

Anche se le considerazioni che faremo saranno limitate ai JFET, che sono dei tipici dispositivi a svuotamento, queste possono facilmente essere generalizzate al caso dei MOSFET, sia a svuotamento che ad arricchimento. Nel seguito di questo capitolo adopereremo il termine FET per JFET.

Per una trattazione più dettagliata dell'argomento, si consulti le referenze ([9]),([6]),([10]),([22]).

10.2 Caratteristiche dei FET

Le curve caratteristiche di un tipico FET a canale n sono mostrate in figura 10.1 dove v'è notato che, per un dispositivo a svuotamento quale il JFET, V_{gs} deve essere negativo.

I punti indicati con la labels A,B,C,..., sono i punti di *pinchoff* corrispondenti ai vari valori di V_{GS} .

La zona di saturazione inizia per $V_{DS} = V_A$ se $V_{GS} = 0$, per $V_{DS} = V_B$ se $V_{GS} = V_1$, etc..

La caratteristica che esprime l'andamento di I_D in funzione di V_{GS} nella zona di saturazione è mostrata in figura 10.2.

Questa è a volte espressa analiticamente nella forma:

$$I_{DS} = I_{DSS} \left[1 + 3 \frac{V_{GS}}{V_{P0}} + 2 \left(-\frac{V_{GS}}{V_{P0}} \right)^{3/2} \right] \quad (10.1)$$

che è spesso approssimata con un andamento quadratico:

$$I_{DS} = I_{DSS} \left(1 + \frac{V_{GS}}{V_{P0}} \right)^n \quad (10.2)$$

con $n \approx 2$.

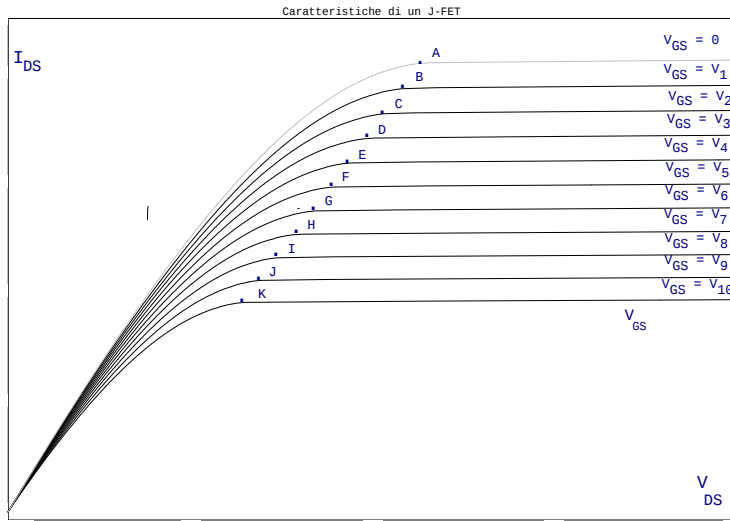


Figura 10.1:

Come sappiamo, un FET è un dispositivo che controlla una corrente (la corrente nel canale, I_{DS}) mediante una tensione (la differenza di potenziale V_{GS} tra gate e source). Un parametro importante è quindi la transconduttanza g_m :

$$g_m \equiv \frac{\Delta I_{DS}}{\Delta V_{GS}} \quad (10.3)$$

Facendo uso dell'ultima equazione (con $n=2$) si trova:

$$g_m = -\frac{2}{V_{P0}} \sqrt{I_{DS} I_{DSS}} \quad (10.4)$$

La corrente I_{DS} nella zona di saturazione non è rigorosamente costante per V_{GS} fissato, ma dipende leggermente ¹ anche da V_{DS} . Scriveremo allora:

$$I_D \equiv I_{DS} = f(V_{GS}, V_{DS})$$

e, per piccole variazioni di V_{GS} e V_{DS} :

$$\delta I_D = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} \delta V_{GS} + \frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}} \delta V_{DS}$$

cioè, indicando con lettere minuscole le componenti variabili di correnti e tensioni:

$$i_d = g_m v_{gs} + g_d v_{ds} \quad (10.5)$$

dove:

$$g_d = \frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}} \quad (10.6)$$

è la conduttanza differenziale del canale nella zona di saturazione: $g_d = 1/r_d$.

Valori tipici di g_m ed r_d sono:

$$g_m \approx 3 \text{ mS}$$

¹Ciò è analogo a quanto accade nel caso dei transistor bipolari, a causa dell'effetto "Early"

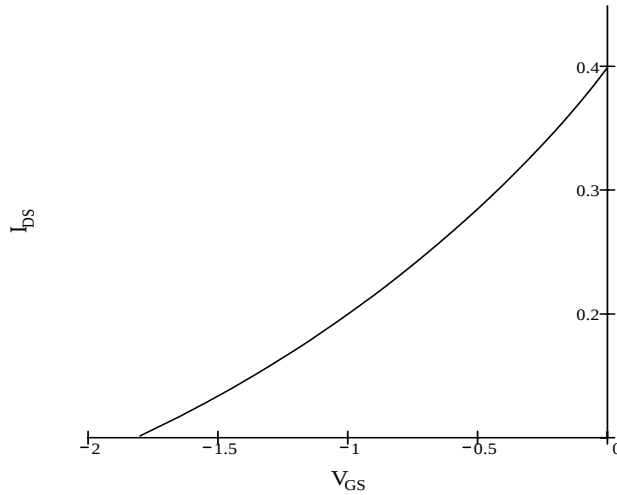


Figura 10.2:

$$r_d \approx 100 \text{ k}\Omega$$

Spesso r_d è così elevato da poter esser trascurato.

Confrontiamo la 10.5 con l'analogia equazione per il transistor bipolare:

$$i_c = h_{fe}i_b + h_{oe}v_{ce}$$

con:

$$v_{be} = h_{ie}i_b$$

da cui:

$$i_c = \frac{h_{fe}}{h_{ie}}v_{be} + h_{oe}v_{ce}$$

vediamo che il parametro h_{fe}/h_{ie} del transistor bipolare corrisponde al g_m del JFET, mentre h_{oe} corrisponde a g_d .

Il g_m tipico del FET è $(1 - 5) \text{ mS}$, mentre il parametro h_{fe}/h_{ie} del transistor bipolare vale $(40 - 400) \text{ mS}$.

10.3 Circuito equivalente del FET

L'equazione 10.5 della sezione precedente porta in modo immediato al circuito equivalente di figura 10.3.

Notiamo che l'impedenza d'ingresso è effettivamente infinita, il che è rappresentato dal gate che risulta isolato nello schema equivalente. Usando poi il teorema di Thevenin, possiamo sostituire, come mostrato in figura 10.4, al generatore dipendente di corrente, in parallelo con la resistenza r_d , un generatore di tensione, $-\mu v_{gs}$, in serie con r_d .

Il parametro $g_d = 1/r_d$ è noto come "conduttanza di drain" o "conduttanza d'uscita". Il parametro μ è anche uguale a:

$$\mu = \left. \frac{\partial V_{DS}}{\partial V_{GS}} \right|_{I_{DS}=const.}$$

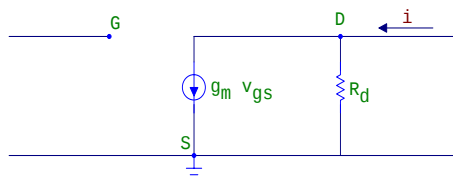


Figura 10.3:

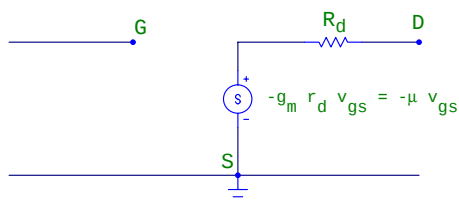


Figura 10.4:

10.4 Schemi di polarizzazione per il FET

Uno schema tipico in cui un FET a canale n viene adoperato come amplificatore è quello mostrato in figura 10.5.

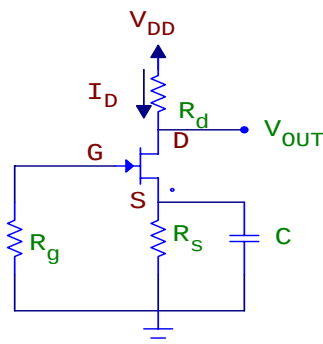


Figura 10.5:

Le resistenze R_g ed R_s servono a tenere il gate ad una tensione negativa rispetto al source. Indicando con $I_D = I_{DS}$ la corrente quiescente nel FET, si ha infatti:

$$V_{GS} = V_G - V_S = -R_s I_D \quad (10.7)$$

É anche:

$$V_{DD} = R_d I_D + V_{DS} + R_s I_D = (R_d + R_s) I_D + V_{DS} \quad (10.8)$$

Il condensatore C è un corto circuito per la componente variabile, mentre è un interruttore aperto per la corrente che polarizza il source.

Se sono dati V_{DD} , R_d , R_s , R_g , è immediato trovare il punto di lavoro, facendo uso delle caratteristiche di uscita o dell'espressione analitica di I_D vs V_{GS} :

$$I_D = I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{P0}}\right)^2 \quad (10.9)$$

Infatti, dall'equazione 10.7 si ha: $I_D = -V_{GS}/R_s$ e, uguagliando questa al secondo membro della 10.9, si ottiene:

$$I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{P0}}\right)^2 = -\frac{V_{GS}}{R_s}$$

che è un'equazione quadratica nella variabile V_{GS} . Risolta tale equazione si ottiene V_{GS} . Noto così V_{GS} , I_D si ottiene facendo uso della 10.9 e V_{DS} facendo uso della 10.8.

Consideriamo il seguente esempio:

$$V_{DD} = 15 \text{ V} , \quad R_d = 620 \, \Omega , \quad R_s = 380 \, \Omega$$

$$R_g = 10 \text{ M}\Omega , \quad I_{DSS} = 13 \text{ mA} , \quad V_{P0} = -4.4 \text{ V}$$

Troviamo facilmente:

$$V_{GS} = -1.77 \text{ V}$$

da cui:

$$I_D = 4.65 \text{ mA}$$

ed infine:

$$V_{DS} = V_{DD} - (R_d + R_s)I_D = 10.35 \text{ V}$$

Allo stesso risultato si potrebbe arrivare, fissati i valori dei componenti, facendo uso delle caratteristiche di uscita, mostrate in figura 10.6.

Il valore di V_{DD} fissa il punto della retta di carico corrispondente a $I_D = 0$, mentre il rapporto tra V_{DD} ed $(R_d + R_s)$ fissa il punto corrispondente a $V_{DS} = 0$.

Il punto di lavoro Q sarà il punto d'intersezione tra la retta di carico e la curva caratteristica per la quale risulti essere:

$$I_D = -\frac{V_{GS}}{R_s}$$

Esaminiamo come secondo esempio il seguente.

Si vuol calcolare la rete di polarizzazione di un J-FET a canale n (BFW10) tale che il punto di riposo abbia:

$$I_{DSQ} = 6 \text{ mA} , \quad V_{DSQ} = 10 \text{ V} , \quad V_{DD} = 20 \text{ V}$$

I parametri I_{DSS} e V_{P0} , forniti dal costruttore, sono:

$$I_{DSS} = 13 \text{ mA} , \quad V_{P0} = -4.5 \text{ V}$$

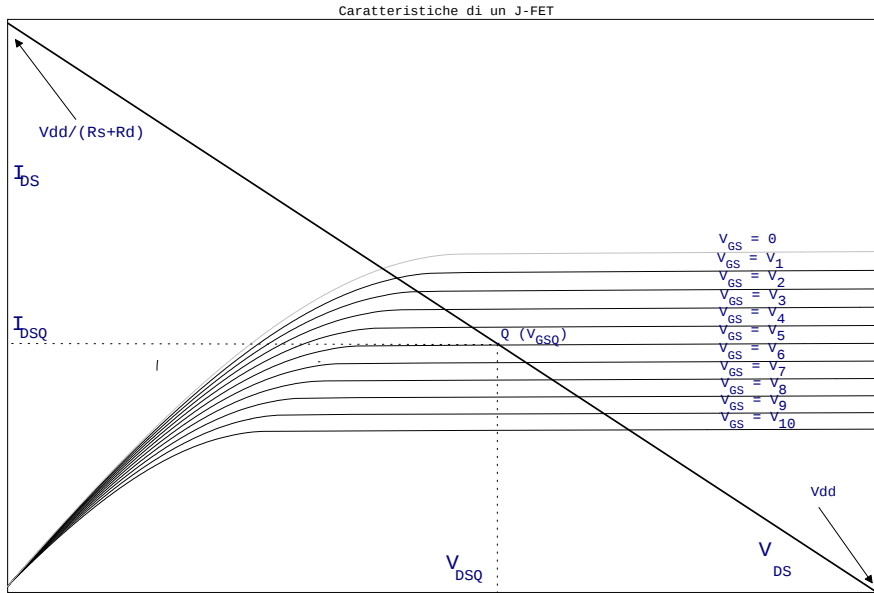


Figura 10.6:

Il circuito di polarizzazione è il medesimo usato nell'esempio precedente. Calcoliamo ora i valori dei componenti. Dall'espressione analitica di I_D vs V_{GS} , troviamo:

$$V_{GS} = V_{P0} \left(1 - \sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}} \right)$$

cioè:

$$V_{GSQ} = V_{P0} \left(1 - \sqrt{\frac{I_{DQ}}{I_{DSS}}} \right)$$

che, con i valori numerici dati, fornisce:

$$V_{GSQ} = -4.5 \left(1 - \sqrt{\frac{6}{13}} \right) = -1.44 \text{ V}$$

Con tale valore di V_{GSQ} troviamo:

$$R_s = -\frac{V_{GSQ}}{I_{DQ}} = 250 \text{ } \Omega$$

$$R_d = \frac{V_{DD} - V_{DSQ} - R_s I_{DQ}}{I_{DQ}} = \frac{20 - 10 - 0.25 \cdot 6}{6} \approx 1.4 \text{ k}\Omega$$

Il valore della resistenza R_g non è molto importante. Esso può essere scelto in modo da ottimizzare il valore della resistenza d'ingresso dell'amplificatore.

Teniamo ora conto del taglio in frequenza posto dalla presenza del condensatore C. La costante di tempo associata al sistema $R_s C$:

$$\tau = R_s C = 250 \text{ C}$$

corrispondente ad una frequenza $f_{min} = 1/(2\pi\tau)$.

Se si vuole adoperare l'amplificatore a frequenze f maggiori di 40 Hz , dovremo avere:

$$40 > \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{1500C}$$

da cui:

$$C > \frac{1}{40 \cdot 1500} \approx 16\text{ }\mu\text{F}$$

Per calcolare i valori dei componenti necessari per polarizzare un FET, è possibile alternativamente far uso della caratteristica mutua ($I_{DS} - V_{GS}$).

Consideriamo ad esempio il caso di un FET per il quale, dalla caratteristica mutua, si possa desumere che per il valore di I_{DSQ} voluto (10 mA) sia $V_{GS} = -1\text{ V}$. Se inoltre si vuole $V_{DSQ} = 10\text{ V}$ e $V_{DD} = 20\text{ V}$, dalle solite equazioni 10.7 e 10.8 si trova:

$$R_s = 100\text{ }\Omega$$

$$R_d = 900\text{ }\Omega$$

Uno schema di polarizzazione alternativo è quello che usa un partitore sul gate, come mostrato in figura 10.7.

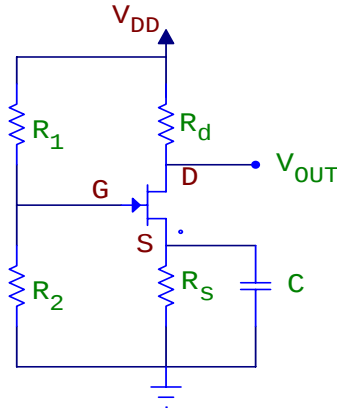


Figura 10.7:

Si supponga di voler far uso di un J-FET a canale n BF256B, la cui caratteristica di trasferimento è mostrata in figura 10.8.

Si sia inoltre scelto:

$$R_s = 1\text{ k}\Omega \quad , \quad R_d = 3\text{ k}\Omega \quad , \quad R_1 + R_2 = 2\text{ M}\Omega \quad , \quad V_{DD} = 25\text{ V}$$

e fissato V_G a $+2\text{ V}$. Dalla maglia d'ingresso si ha:

$$V_{GS} = V_G - R_s I_D \tag{10.10}$$

dove:

$$V_G = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{DD}$$

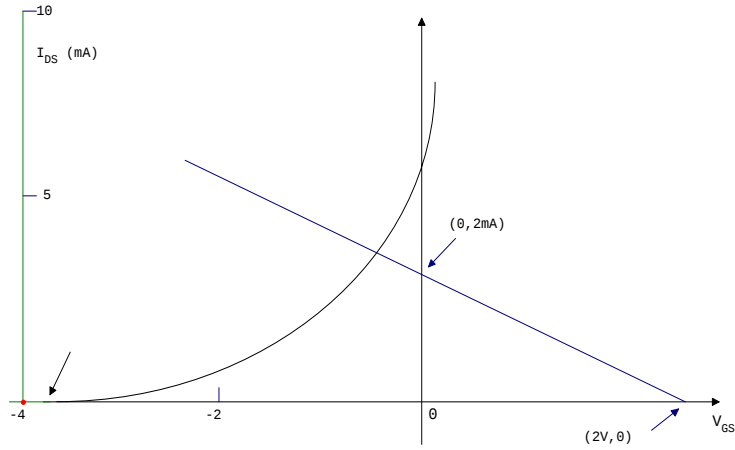


Figura 10.8:

da cui:

$$R_2 = (R_1 + R_2) \frac{V_G}{V_{DD}} = 160 \text{ k}\Omega$$

Per cui:

$$R_1 = 2 \text{ M}\Omega - R_2 = 1840 \text{ k}\Omega$$

Tracciamo ora sulla caratteristica, la retta di carico data dalla 10.10. Questa passa per i punti $(0, V_G/R_s)$ e $(V_G, 0)$; cioè, nel nostro caso, per i punti: $(0, 2 \text{ mA})$ e $(2V, 0)$. Le coordinate del punto d'intersezione con la caratteristica mutua sono:

$$I_{DQ} = 3.5 \text{ mA}$$

$$V_{GSQ} = -1.5 \text{ V}$$

Si ha poi per la tensione di drain:

$$V_{DSQ} = V_{DD} - (R_d + R_s)I_{DQ} = 25 - (3 + 1) 3.5 \text{ V} = 11 \text{ V}$$

Al medesimo risultato si sarebbe potuti arrivare facendo uso delle caratteristiche "di drain" (I_{DS}, V_{DS}) anzichè di quelle di trasferimento.

10.5 Amplificatori a FET

Il parametro più importante nel calcolare la risposta di un FET adoperato come amplificatore è la transconduttanza g_m . Abbiamo già visto (equazione 10.4) che essa è data da:

$$g_m = -\frac{2}{V_{P0}} \sqrt{I_{DS} I_{DSS}}$$

Se ora definiamo:

$$g_{m0} = g_m(I_{DS} = I_{DSS}) = -\frac{2}{V_{P0}} I_{DSS}$$

avremo:

$$g_m = g_{m0} \sqrt{\frac{I_{DS}}{I_{DSS}}} \quad (10.11)$$

o, alternativamente:

$$g_m = g_{m0} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{P0}}\right) \quad (10.12)$$

Vediamo così che la transconduttanza aumenta come la radice quadrata di I_{DS} .

Facciamo ora uso del modello del FET discusso in precedenza per calcolare il guadagno in tensione di un amplificatore a FET come quello mostrato in figura 10.9.

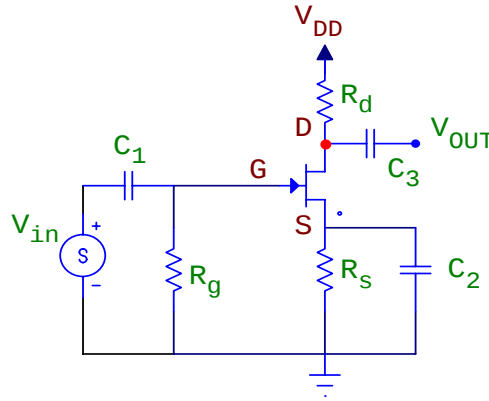


Figura 10.9:

Se ammettiamo di potere, alle frequenze di lavoro, assimilare tutti i condensatori a dei cortocircuiti, lo schema equivalente utile per il calcolo del guadagno in tensione, definito come il rapporto tra v_{ds} e v_{gs} , è quello di figura 10.10.

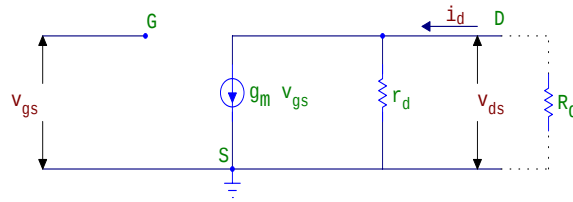


Figura 10.10:

Da questo si ottiene:

$$i_d = g_m v_{gs} + g_d v_{ds}$$

$$v_{ds} = -R_d i_d$$

con: $g_d = 1/r_d$.

da cui:

$$v_{ds} = -R_d g_m v_{gs} - R_d g_d v_{ds}$$

$$v_{ds} (1 + R_d g_d) = -R_d g_m v_{gs}$$

ed infine:

$$A_v \equiv \frac{v_{ds}}{v_{gs}} = -\frac{R_d g_m}{1 + R_d g_d} \quad (10.13)$$

Essendo poi:

$$1 + R_d g_d = 1 + R_d / r_d = \frac{r_d + R_d}{r_d}$$

il guadagno A_v può anche essere espresso come:

$$A_v \equiv -\frac{g_m R_d r_d}{R_d + r_d} = -g_m R_d^* \quad (10.14)$$

dove R_d^* è il parallelo di R_d ed r_d .

Il circuito d'uscita può quindi essere schematizzato come un generatore di tensione pari a $-g_m R_d^* v_{gs}$ in serie con la resistenza R_d^* , come mostrato in figura 10.11:

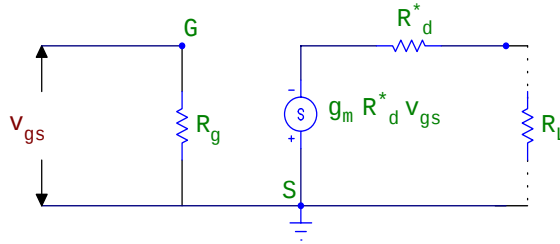


Figura 10.11:

dove abbiamo anche specificato la resistenza di polarizzazione sul gate e l'eventuale carico R_L .

Se ad esempio ammettiamo di far uso di un FET con $g_m = 2 \text{ mS}$ ed una resistenza di drain $R_d = 10 \text{ k}\Omega$, avremo un guadagno in tensione di 20.

Calcoliamo ora l'impedenza d'uscita di questo amplificatore. Per farlo usiamo la definizione:

$$Z_{out} = \frac{v_{out} (circuitto aperto)}{i_{out} (corto circuito)}$$

dove:

$$v_{out} (circuitto aperto) = \left[-\frac{R_d g_m}{1 + R_d g_d} \right]_{R_d=\infty} v_{gs} = -\frac{g_m}{g_d} v_{gs}$$

e:

$$i_{out} (corto circuito) = -g_m v_{gs}$$

Ne segue:

$$Z_{out} = \frac{1}{g_d} = r_d$$

10.6 Inseguitore di source

Il circuito di figura 10.12, analogo all'inseguitore di emettitore, è un inseguitore di source.

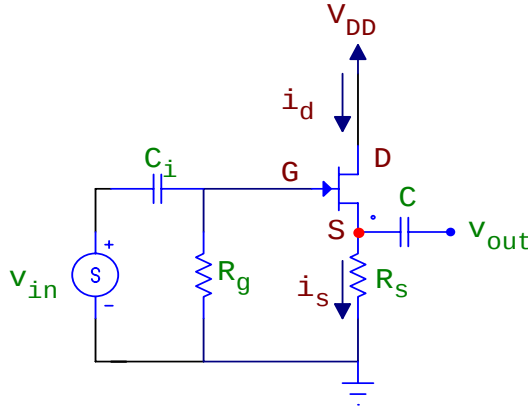


Figura 10.12:

La relazione tra segnale in uscita e segnale in ingresso è ottenibile facilmente se si ricorda che:

$$i_d = i_s = g_m v_{gs}$$

Essendo poi:

$$v_{out} = R_s i_s = R_s g_m v_{gs}$$

e:

$$v_{gs} = v_{in} - v_{out}$$

si ha:

$$v_{out} = R_s g_m v_{in} - R_s g_m v_{out}$$

da cui:

$$v_{out} (1 + R_s g_m) = R_s g_m v_{in}$$

ed infine:

$$A_v \equiv \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{R_s g_m}{1 + R_s g_m} \approx 1 \quad (10.15)$$

poichè $R_s g_m \gg 1$ (in realtà questa disuguaglianza non è sempre vera: se $R_s = 1\text{ k}\Omega$ e $g_m = 3\text{ mS}$ segue che $R_s g_m = 3$).

Consideriamo ad esempio un amplificatore che adopera un FET 2N3819, con:

$$g_m = 2\text{ mA/V}$$

$$R_s = 4.7\text{ k}\Omega$$

Si trova:

$$A_v = \frac{9.4}{10.4} \approx 0.9$$

L'impedenza d'ingresso dell'inseguitore di source è determinata essenzialmente da R_g , che può esser scelto di valore molto alto ($> 20 M\Omega$). L'impedenza d'uscita è ottenibile dalla definizione:

$$R_{out} = \frac{v_{out} (circuitto\ aperto)}{i_{out} (circuitto\ chiuso)}$$

in questa espressione, il numeratore è:

$$v_{out} = A_v v_{in} = \frac{R_s g_m}{1 + R_s g_m} v_{in}$$

mentre il denominatore è semplicemente: $g_m v_{in}$.

Si ha cioè:

$$R_{out} = \frac{R_s g_m}{(1 + R_s g_m) g_m} \approx \frac{1}{g_m} \quad (10.16)$$

Nell'esempio fatto, $R_{out} = 1/(2mA/V) = 500 \Omega$.

Negli esempi visti, l'impedenza d'ingresso dell'amplificatore a FET è ridotta, rispetto all'impedenza della giunzione di gate, dalla presenza delle resistenze di polarizzazione. Un fenomeno analogo si incontra nell'amplificatore a transistor bipolare, dove, peraltro, l'impedenza d'ingresso "intrinseca" non è altrettanto elevata.

Un metodo per ridurre l'effetto della resistenza di polarizzazione nell'inseguitore di source è quello noto come "bootstrap", di cui un esempio è quello di figura 10.13.

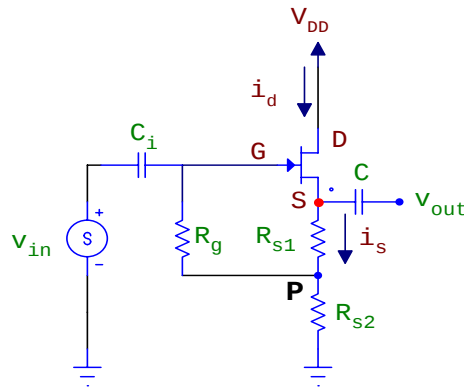


Figura 10.13:

Prima di esaminare quantitativamente il problema, vediamo di capire intuitivamente ciò che, in tale circuito, causa l'aumento dell'impedenza d'ingresso. La tensione del source, come sappiamo, "insegue" quella del gate. La tensione del punto P, se R_{s1} è piccola rispetto ad R_{s2} , "insegue" anch'essa la tensione di gate. La corrente i che attraversa la resistenza R_g è pari alla differenza di potenziale ai suoi capi divisa per R_g . Ora, la differenza di potenziale ai capi di R_g , per l'effetto di "inseguimento" menzionato, è molto piccola: se v_g aumenta, così fa anche v_p ; di

conseguenza il rapporto v_g/i , che è appunto la resistenza vista guardando dal gate verso massa, sarà grande. Vediamolo ora quantitativamente. La tensione del punto P è:

$$v_p = \frac{R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} v_s$$

mentre è:

$$R_g i = v_g - v_p = v_g - \frac{R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} v_s$$

L'impedenza "effettiva" di R_g è allora:

$$Z_{eff} = \frac{v_g}{i} = \frac{v_g}{\frac{v_g}{R_g} - \frac{R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} \frac{v_s}{R_g}} = \frac{R_g}{1 - \frac{R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} \frac{v_s}{v_g}}$$

Sostituiamo ora al rapporto v_s/v_g la sua espressione data dalla 10.15. Troviamo:

$$Z_{eff} = \frac{R_g}{1 - \frac{R_{s2} g_m}{1 + (R_{s1} + R_{s2}) g_m}} \approx \frac{R_g}{1 - \frac{R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}}} = R_g \left(\frac{R_{s1} + R_{s2}}{R_{s1}} \right)$$

Vediamo così che se $(R_{s1} + R_{s2}) \gg R_{s1}$, si ha:

$$Z_{eff} \gg R_g$$

10.7 Amplificatore a FET: struttura generale

Abbiamo finora studiato le caratteristiche dell'amplificatore a FET nelle configurazioni source-comune o inseguitore di source. Nel primo caso la resistenza di source era "bypassata" dal condensatore, nel secondo non c'era alcuna resistenza sul drain e mancava il condensatore. Esaminiamo ora il caso generale in cui siano presenti sia R_d che R_s e che nessuna delle due abbia un condensatore in parallelo.

La struttura è quindi quella di figura 10.14. Il circuito equivalente utile per il calcolo del guadagno e delle impedenze d'uscita e d'ingresso è mostrato nella stessa figura

v_{o2} è l'uscita nel caso in cui si adoperi il circuito come inseguitore di source; v_{o1} quella relativa al caso in cui lo si adoperi come amplificatore common-source. Abbiamo adoperato, nel circuito equivalente, il generatore dipendente di tensione: $\mu v_{gs} = g_m r_d v_{gs}$ in serie con r_d .

Dall'equazione della maglia d'uscita otteniamo:

$$i_d (R_d + r_d + R_s) = \mu v_{gs}$$

$$v_{gs} = v_g - v_s = v_i - R_s i_d$$

Da queste due equazioni segue:

$$i_d (R_d + r_d + R_s) = \mu v_i - \mu R_s i_d$$

da cui:

$$i_d = \frac{\mu v_i}{R_d + r_d + R_s (1 + \mu)}$$

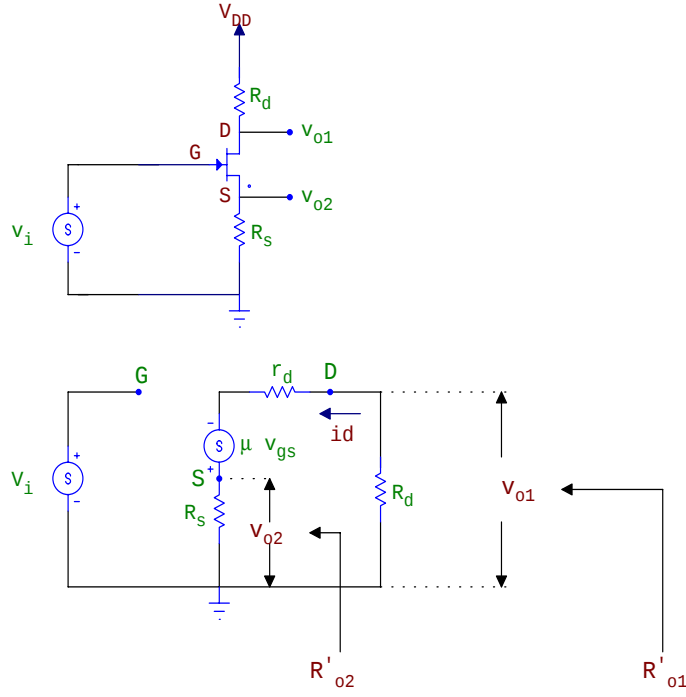


Figura 10.14:

La tensione in uscita sul drain è:

$$v_{o1} = -R_d i_d = -\frac{\mu R_d v_i}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)} \quad (10.17)$$

La tensione in uscita sul source:

$$v_{o2} = R_s i_d = \frac{\mu R_s v_i}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)} \quad (10.18)$$

Il guadagno in tensione relativo al primo caso (amplificatore source-comune con resistenza sul source) è allora:

$$A_{v1} = \frac{v_{o1}}{v_i} = -\frac{\mu R_d}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)} \quad (10.19)$$

(dove $\mu \gg 1$).

Questa può esser riscritta, trascurando 1 rispetto a μ e sostituendo $\mu = g_m r_d$ nella forma:

$$A_{v1} = -\frac{g_m r_d R_d}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)} = -\frac{g_m R_{||}}{1 + g_m(R_s/R_d)R_{||}} \quad (10.20)$$

dove:

$$R_{||} = \frac{r_d R_d}{r_d + R_d}$$

Se è $g_m R_s / R_d R_{||} \gg 1$, questa diventa $A_{v1} = -R - d/R_s$, cioè il guadagno viene a dipendere solo dalle resistenze R_d ed R_s e non dal g_m del FET. Ciò è analogo a

quel che si trova nel caso di un amplificatore a transistor bipolare con resistenza sull'emettitore.

Calcoliamo ora, per questa configurazione, l'impedenza d'uscita R'_{o1} . Ricorriamo alla definizione:

$$R'_{o1} = \frac{v_{o1} \text{ (circuito aperto)}}{i_{o1} \text{ (circuito chiuso)}}$$

dove $v_{o1} \text{ (circuito aperto)}$ è il segnale di tensione in uscita in assenza di carico (a parte R_d), cioè:

$$v_{o1} \text{ (circuito aperto)} = -\frac{\mu R_d v_i}{R_d + r_d + (1 + \mu) R_s}$$

e la corrente in uscita $i_{o1} \text{ (circuito chiuso)}$ è ottenibile dal circuito equivalente di figura, ponendo un corto in parallelo ad R_d . Si ottiene in tal modo:

$$i_{o1} \text{ (circuito chiuso)} = -i_d = -\frac{v_{gs}}{r_d + R_s}$$

con:

$$v_{gs} = v_g - v_s = v_i - R_d i_d$$

da cui si ottiene poi:

$$i_{o1} \text{ (circuito chiuso)} = -i_d|_{R_d=0} = -\frac{\mu v_i}{r_d + R_s(1 + \mu)}$$

Si ha così per l'impedenza d'uscita:

$$R'_{o1} = R_d \frac{r_d + R_s(1 + \mu)}{r_d + R_d + R_s(1 + \mu)} = R_d \parallel (r_d + R_s(1 + \mu)) \quad (10.21)$$

Si vede da quest'ultima espressione che la resistenza d'uscita R'_{o1} , calcolata senza tener conto di R_d è:

$$R_{o1} = r_d + R_s(1 + \mu) \quad (10.22)$$

Calcoliamo ora la resistenza d'uscita R'_{o2} .

$$R'_{o2} = \frac{v_{o2} \text{ (circuito aperto)}}{i_{o2} \text{ (circuito chiuso)}}$$

dove:

$$v_{o2} \text{ (circuito aperto)} = \frac{\mu R_s v_i}{R_d + r_d + (1 + \mu) R_s}$$

$$i_{o2} \text{ (circuito chiuso)} = i_{o2}|_{R_s=0} = \frac{\mu v_i}{R_d + r_d}$$

da cui:

$$R'_{o2} = \frac{R_s(R_d + r_d)}{R_d + r_d + (1 + \mu) R_s} \quad (10.23)$$

Il guadagno in tensione nella configurazione inseguitore di source (con resistenza sul drain) è (facendo uso della 10.18):

$$A_{v2} = \frac{v_{o2}}{v_i} = \frac{\mu R_s}{R_d + r_d + (1 + \mu)R_s}$$

che per $R_d = 0$ diventa:

$$A_{v2} = \frac{\mu R_s}{r_d + (1 + \mu)R_s} \approx \frac{g_m r_d R_s}{r_d + g_m r_d R_s}$$

Se ad esempio si sceglie:

$$R_s = 2 \text{ k}\Omega \quad , \quad R_d = 1 \text{ k}\Omega \quad , \quad r_d = 100 \text{ k}\Omega \quad , \quad g_m = 3 \text{ mS}$$

e quindi:

$$\mu = g_m r_d = 300$$

Avremo:

$$A_{v2} \approx 0.85 \quad , \quad R'_{o2} \approx 290 \Omega$$

10.8 Risposta in frequenza di un amplificatore a FET

Il guadagno dell'amplificatore a FET nella configurazione source-comune, calcolato in precedenza:

$$A_v = -\frac{R_d r_d}{R_d + r_d} g_m = -g_m R_d^*$$

è indipendente dalla frequenza. Ciò dipende dal fatto che si sono trascurate le capacità presenti nel circuito. Queste comprendono sia la capacità di accoppiamento, che le capacità parassite interne al FET, nonché quelle associate ai cavi che collegano il generatore dei segnali che si vogliono amplificare all'amplificatore stesso. L'effetto di tutte queste capacità è quello di ridurre la banda passante e di far sì che essa assuma l'aspetto mostrato in figura 10.15, dove è riportato, in funzione di $\log(f)$, il rapporto $|v_{out}/v_{in}|$ espresso in decibel.

Vogliamo ora esaminare l'effetto delle varie capacità e vedere come esse influenzino sulla banda passante. Il circuito base, mostrato in figura 10.16, presenta le seguenti capacità:

- C_o : capacità d'uscita del generatore
- r_s : resistenza d'uscita del generatore
- C_f : capacità associata ai cavi di collegamento
- C_a : condensatore d'accoppiamento
- C_{gs} : capacità parassita tra gate e source nel FET
- C_{gd} : capacità parassita tra gate e drain nel FET

Esaminiamo ora in dettaglio l'effetto di queste capacità sulla banda passante, separatamente per le alte e le basse frequenze.

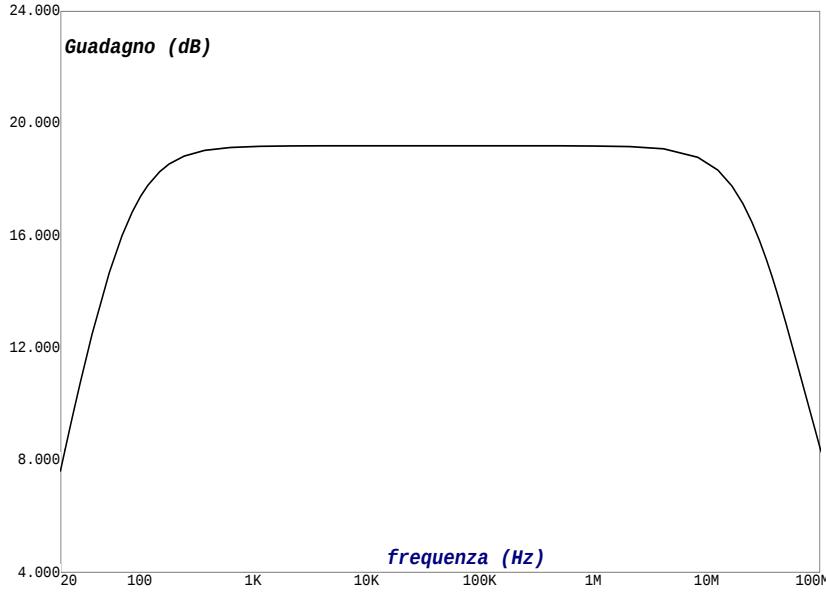


Figura 10.15:

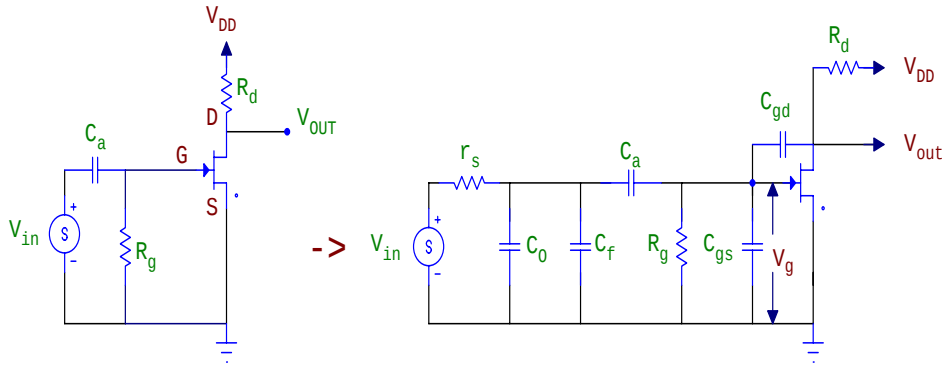


Figura 10.16:

10.8.1 Risposta alle alte frequenze

Cominciamo con l'esaminare la risposta del circuito ad alta frequenza, dove C_a può esser assimilata ad un corto-circuito. In tali condizioni, le capacità C_o , C_f , C_{gs} risultano in parallelo, e possono esser sostituite da un'unica capacità C_1 . Il circuito diventa allora quello di figura 10.17 (a).

La resistenza R_g è in genere molto grande e può quindi esser trascurata. Sostituiamo inoltre al FET il suo circuito equivalente, costituito da un generatore di tensione $-g_m R_d^* v_g$, in serie con la resistenza $R_d \parallel r_d \equiv R_d^*$. Si ottiene così lo schema di figura 10.17 (b).

Facciamo ora l'ulteriore approssimazione (che verificheremo tra poco) consistente nel trascurare la caduta ai capi di R_d^* . Ammettiamo cioè che sia $v_{out} = -g_m R_d^* v_g$. Il circuito si trasforma allora ulteriormente in quello di figura 10.17 (c).

Applichiamo ora il teorema di Miller, facendo uso dell'impedenza che collega i terminali d'uscita v_{out} a quelli d'ingresso v_g . L'impedenza è quella costituita dalla

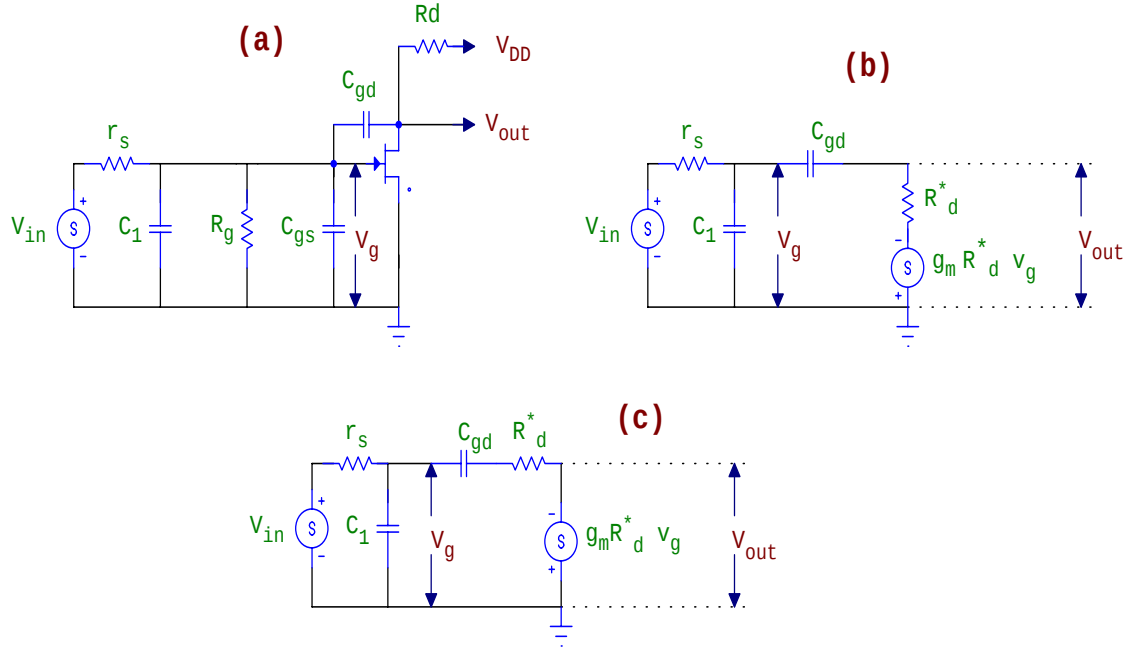


Figura 10.17:

serie di C_{gd} ed R_d^* :

$$Z = \frac{1}{j\omega C} + R_d^* = \frac{1 + j\omega R_d^* C}{j\omega C}$$

dove abbiamo per brevità di scrittura posto $C \equiv C_{gd}$. Il teorema di Miller dà il circuito di figura 10.18, dove si è posto $K = -g_m R_d^*$.

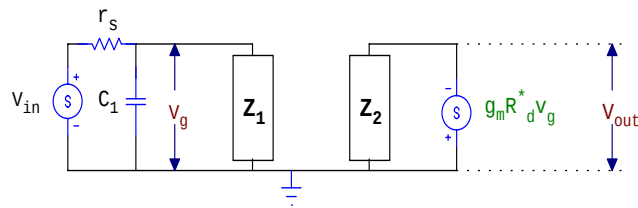


Figura 10.18:

Il guadagno in tensione è:

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{v_{out}}{v_g} \frac{v_g}{v_{in}} = -g_m R_d^* \frac{v_g}{v_{in}} \quad (10.24)$$

Le impedenze Z_1 e Z_2 sono date da:

$$Z_1 = \frac{Z}{1 - K} = \frac{1 + j\omega R_d^* C}{j\omega C(1 + g_m R_d^*)}$$

$$Z_2 = \frac{ZK}{K-1} = \frac{(1+j\omega R_d^*C)g_m R_d^*}{1+g_m R_d^*}$$

Facciamo ancora un'approssimazione (la cui validità sarà verificata); ammettiamo che sia:

$$R_d^* \ll \frac{1}{\omega C}$$

cioè: $\omega C R_d^* \ll 1$.

Con ciò Z_1 diventa:

$$Z_1 \approx \frac{1}{j\omega C(1+g_m R_d^*)}$$

L'impedenza del parallelo $Z_1 \parallel C_1$ è allora:

$$Z' = \frac{Z_1}{1+j\omega C_1 Z_1} = \frac{1}{j\omega [C_1 + C(1+g_m R_d^*)]}$$

La relazione tra v_g e v_{in} è quindi:

$$v_g = v_{in} \frac{Z'}{r_s + Z'} = v_{in} \frac{1}{1+j\omega r_s [C_1 + C(1+g_m R_d^*)]}$$

per cui:

$$\frac{v_g}{v_{in}} = \frac{1}{1+j\omega r_s [C_1 + C(1+g_m R_d^*)]}$$

Facendo uso della 10.24 si ottiene poi:

$$A_v(\omega) = -\frac{g_m R_d^*}{1+j\omega r_s [C_1 + C(1+g_m R_d^*)]}$$

Ponendo $A_o = g_m R_d^*$ (guadagno a centro banda), questa può essere riscritta nella forma:

$$A_v(\omega) = -\frac{A_o}{1+j\omega r_s [C_1 + C(1+A_o)]} \quad (10.25)$$

Vediamo così che la capacità $C = C_{gd}$ risulta moltiplicata per il fattore $1+A_o$, che è in genere grande. Ciò è conseguenza dell'effetto Miller. I FET sono normalmente costruiti in modo che la capacità C_{gd} (indicata in letteratura come C_{rss}) sia minore di C_{gs} (con il simbolo C_{iss} viene indicata la somma $C_{gd} + C_{gs}$). Valori tipici di C_{rss} per i FET sono nel range (1-15) pF mentre per C_{iss} troviamo valori nel range (3-70) pF².

Il modulo di A_v dipende da ω come:

$$|A_v(\omega)| = \frac{A_o}{\sqrt{1+(\omega/\omega_U)^2}} \quad (10.26)$$

con:

$$\omega_U = \frac{1}{r_s [C_1 + C(1+A_o)]} \quad (10.27)$$

²Sia C_{gd} che C_{gs} dipendono molto dalla differenza di potenziale V_{DS} e decrescono all'aumentare di questa, per rimanere approssimativamente costanti per valori di V_{DS} maggiori di (10-15) V

Per valori di C_{gd} , C_{gs} ed r_s :

$$C_{gd} = 2 \text{ pF}$$

$$C_{gs} = 4 \text{ pF}$$

$$r_s = 10 \Omega$$

e per un guadagno a centro banda $A_o = 20$, troviamo (ammettendo di poter trascurare C_1):

$$\omega_U = \frac{1}{10 [2 \cdot 10^{-12} \cdot 21]} \approx 2.38 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

cioè:

$$f_U = \frac{\omega_U}{2\pi} = 379 \text{ MHz}$$

L'andamento di $|A_v|$ (in dB) in funzione della frequenza f è mostrato, per un tipico amplificatore a FET, in figura 10.19.

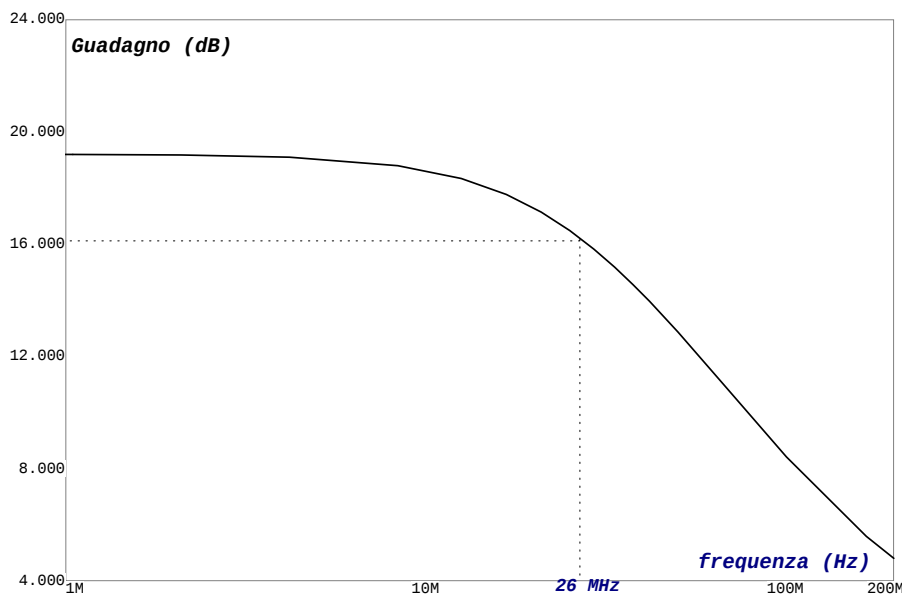


Figura 10.19:

Il valore di f_U per tale amplificatore è di 26 MHz. A tale frequenza il guadagno si è ridotto di 3 dB rispetto al valore che esso ha a centro banda.

La frequenza f_U (26 MHz nel nostro esempio) definisce il taglio superiore della banda passante dall'amplificatore.

Dalla definizione 10.27 di ω_U segue che, per aumentare la banda passante occorre:

- diminuire A_o
- diminuire r_s
- diminuire C_1

- diminuire C_{gd}

Vediamo che diminuire quest'ultimo parametro è particolarmente importante poichè esso compare moltiplicato per A_o .

Un aumento del guadagno A_o a frequenze intermedie si accompagna ad una riduzione della banda passante. Si definisce quindi un fattore di merito dell'amplificatore:

$$F = A_o f_U$$

Cioè:

$$F = \frac{A_o}{2\pi r_s [C_1 + (1 + A_o)C_{gd}]}$$

A parità di F , un aumento di un fattore 10 nel guadagno A_o si accompagna (all'incirca) ad una riduzione di un fattore 10 nella banda passante.

L'effetto della capacità interna al FET tra gate e drain (C_{gd}) è mostrato in figura 10.20. Si vede chiaramente che, all'aumentare di C_{gd} tra 1 pF e 40 pF la frequenza di taglio superiore scende da 220 MHz a 5.5 MHz.

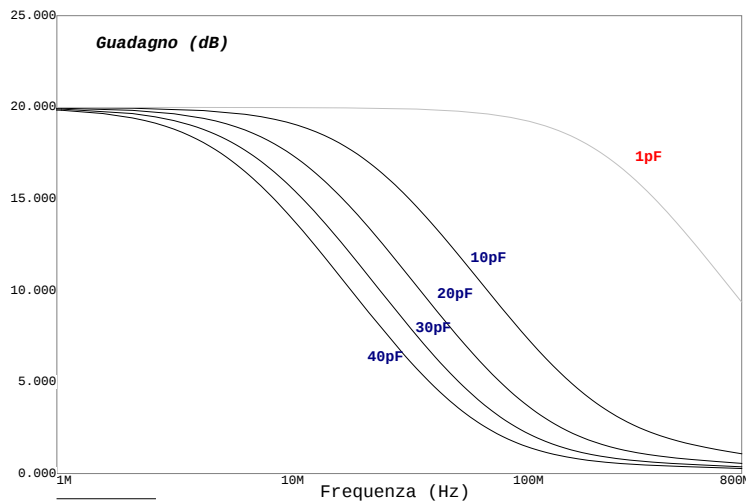


Figura 10.20:

Verifichiamo ora, con un esempio numerico, la validità delle approssimazioni fatte.

La prima delle approssimazioni è consistita nel trascurare (vedi figura 10.17) la caduta di potenziale ai capi di R_d^* rispetto al potenziale del generatore dipendente $-g_m R_d^* v_g$. La seconda nel trascurare la caduta di potenziale ai capi di R_d^* rispetto a quella ai capi della capacità C_{gd} .

Ammettiamo che sia:

$$g_m = 2 \text{ mS} , \quad R_d^* = 2 \text{ k}\Omega , \quad v_g = 0.1 \text{ V} , \quad C = C_{gd} = 2 \text{ pF} , \quad f = 1 \text{ MHz}$$

Avremo allora:

$$g_m R_d^* v_g = 0.4 \text{ V}$$

La resistenza associata alla capacità C sarà:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \approx 80 \text{ k}\Omega$$

Poichè questa è molto maggiore di R_d^* , vediamo che la caduta di potenziale ai capi di R_d^* è trascurabile rispetto a quella ai capi di C, il che giustifica la seconda delle approssimazioni fatte (a maggior ragione se la frequenza fosse più bassa di quella scelta). L'approssimazione verrebbe meno solo a frequenze tali che:

$$Z_c \approx R_d^*$$

cioè:

$$f \approx \frac{1}{2\pi R_d^* C} \approx 400 \text{ MHz}$$

maggiore della frequenza di taglio dell'amplificatore.

Per verificare la prima delle approssimazioni calcoliamo la corrente nella serie $C - R_d^*$:

$$i = \frac{v_g (g_m R_d^* + 1)}{\sqrt{(R_d^*)^2 + 1/(\omega^2 C^2)}} \approx \omega C v_g (g_m R_d^* + 1)$$

La caduta di potenziale ai capi di R_d^* sarà allora:

$$v = R_d^* i = v_g (g_m R_d^* + 1) \frac{R_d^*}{1/(\omega C)} \approx 0.025 \cdot (g_m R_d^* + 1) \ll (g_m R_d^* + 1) v_g$$

cioè molto minore della differenza di potenziale ai capi di C.

10.8.2 Risposta alle basse frequenze

Ci siamo fino a questo momento occupati della risposta dell'amplificatore alle alte frequenze. Vediamo ora di esaminarne il comportamento all'altra estremità dello spettro, a frequenze molto basse. In tale regione si farà ovviamente sentire l'effetto delle capacità in serie al segnale, cioè essenzialmente della capacità di accoppiamento C_a . Poichè in tale zona di frequenza, l'impedenza capacitativa $|1/(j\omega C_a)|$ è grande, potremo trascurare, rispetto a questa, l'impedenza d'uscita r_s del generatore.

Il circuito equivalente che adopereremo per calcolare la risposta in questa zona di frequenze è mostrato in figura 10.21.

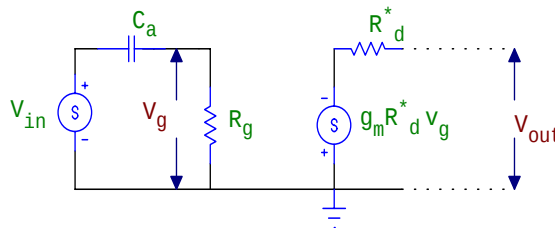


Figura 10.21:

In tale schema, v_g è dato da:

$$v_g = \frac{R_g}{R_g + \frac{1}{j\omega C_a}} v_{in} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_g C_a}} v_{in}$$

da cui segue:

$$v_{out} = -g_m R_d^* v_g = -\frac{A_o}{1 + \frac{1}{j\omega C_a R_g}} \quad (10.28)$$

dove abbiamo posto:

$$A_o = g_m R_d^*$$

Il modulo della funzione di trasferimento $|A_v|$ è quindi:

$$|A_v(\omega)| = \frac{A_o}{\sqrt{1 + (\omega_L/\omega)^2}} \quad (10.29)$$

dove abbiamo posto:

$$\omega_L = \frac{1}{C_a R_g}$$

Esso tende a 0 per $\omega \rightarrow 0$ e si riduce di 3 dB per $\omega = \omega_L$, cioè per un valore della frequenza f :

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi C_a R_g} \quad (10.30)$$

Se $R_g = 1\text{ M}\Omega$ e $C_a = 4\text{ nF}$; si trova:

$$f_L = \frac{1}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-9}} = 40\text{ Hz}$$

La frequenza f_L definisce il limite inferiore della banda passante dell'amplificatore. Notiamo ancora che per $\omega = \omega_L$, la 10.28 ci dà per la quantità complessa A_v :

$$A_v = -\frac{A_o(1-j)}{2} \quad (10.31)$$

da cui vediamo che alla frequenza f_L c'è uno sfasamento di $\pi/2$ tra v_{in} e v_{out} .

10.8.3 Risposta sull'intero spettro di frequenze

L'espressione della risposta globale in frequenza può essere ottenuta combinando la 10.26 con la 10.29. Si trova:

$$|A_v| = \frac{A_o}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_U)^2} \sqrt{1 + (\omega_L/\omega)^2}} \quad (10.32)$$

L'andamento del guadagno in funzione della frequenza f è qualitativamente quello mostrato nella figura 10.22. Il grafico superiore si riferisce al modulo del guadagno, espresso in decibel, quello inferiore allo sfasamento (in gradi). Notiamo che agli estremi della banda passante, ad esempio per $f = f_L$ o $f = f_U$, il segnale in uscita è non soltanto attenuato, ma anche fortemente fuori fase rispetto al valore che esso ha a centro banda.

Se quindi v_{in} ha componenti di Fourier su di una banda di frequenza che si estende dal centro banda fino ad uno degli estremi, v_{out} avrà componenti di Fourier che, per frequenza prossime all'estremità della banda, sono ridotte e sfasate. Ciò implica che v_{out} sarà *distorto* rispetto a v_{in} .

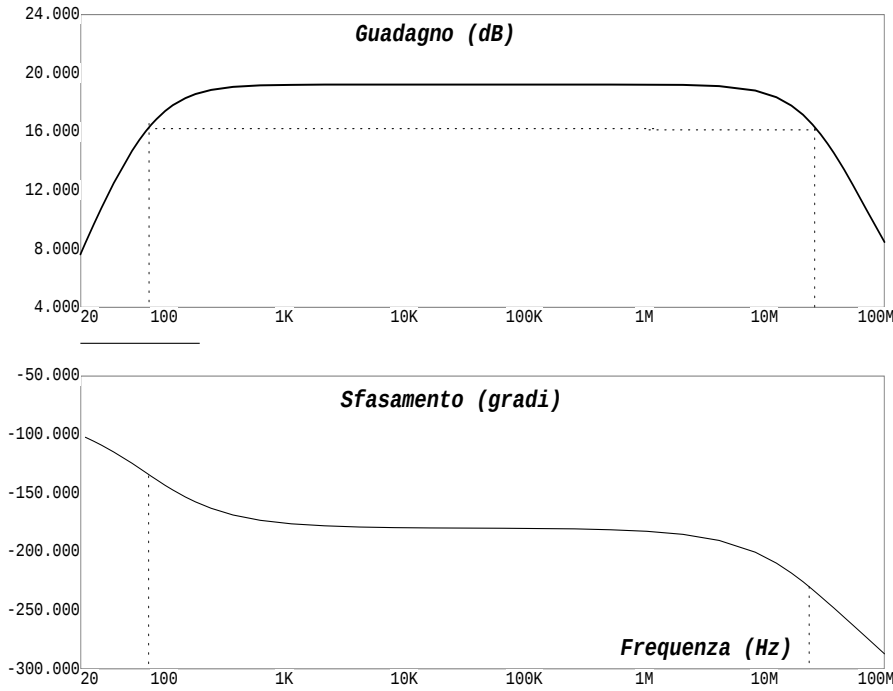


Figura 10.22:

10.9 Verifica delle approssimazioni fatte

Nella sezione precedente abbiamo ricavato la risposta in frequenza dell'amplificatore a FET facendo uso di alcune approssimazioni. Ci proponiamo ora di calcolare tale funzione di trasferimento senza fare alcuna approssimazione. Confronteremo poi il risultato con quello approssimato ottenuto prima. Il circuito equivalente è quello di figura 10.23. Questo può esser trasformato in quello di figura 10.24, dove è:

$$Z_g = \frac{R_g}{1 + sR_gC_{gs}}$$

Facendo uso delle leggi di Kirchhoff, si ottiene, come mostrato in appendice, il seguente risultato:

$$A_v(s) \equiv \frac{v_o}{v_s} = \frac{R_d^*(sC_{gd} - g_m)}{(1 + sC_{gd}R_d^*) \left[1 + sr_sC_s + \frac{1}{sC_aZ_g} + \frac{r_s(C_a + C_s)}{C_aZ_g} \right] + \frac{C_{gd}(sr_s(C_a + C_s) + 1)(1 + g_mR_d^*)}{C_a}} \quad (10.33)$$

Questa può esser messa nella forma di un rapporto tra polinomi nella variabile s . Infatti la $A_v(s)$ è ottenibile dalla 10.33, sostituendo a $Z_g(s)$ la sua espressione:

$$Z_g = \frac{R_g}{1 + sR_gC_{gs}}$$

Si trova, dopo alcuni semplici passaggi algebrici, che la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento è data da:

$$A_v(s) = \frac{A_0s + A_1s^2}{B_0 + B_1s + B_2s^2 + B_3s^3} \quad (10.34)$$

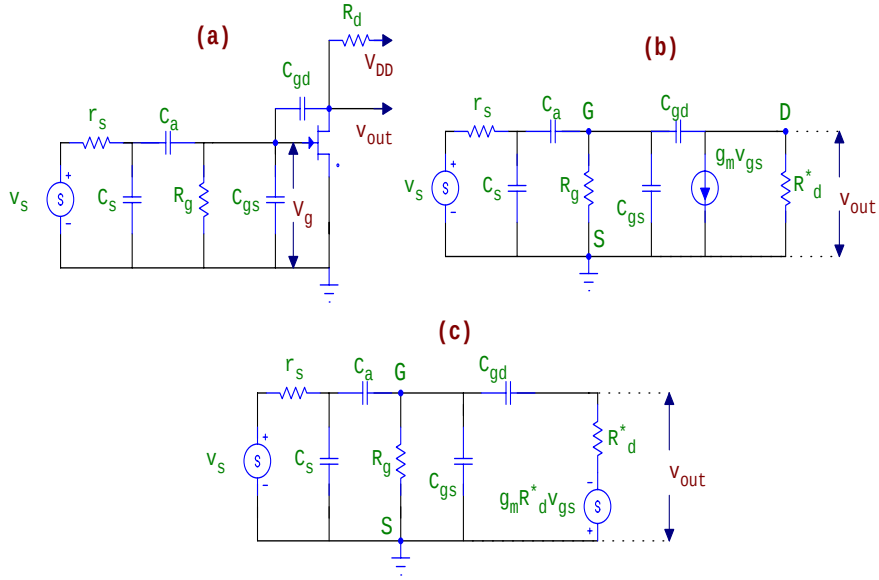


Figura 10.23:

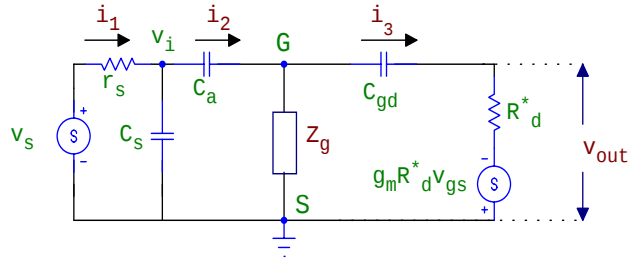


Figura 10.24:

dove:

$$A_0 = -R_d^* g_m$$

$$A_1 = R_d^* C_{gs}$$

$$B_0 = \frac{1}{C_a R_g}$$

$$B_1 = 1 + r_s \frac{C_a + C_s}{C_a R_g} + \frac{C_{gs}}{C_a} + \frac{R_d^* C_{gd}}{C_a R_g} + \frac{C_{gd}}{C_a} + \frac{C_{gd} g_m R_d^*}{C_a}$$

$$B_2 = r_s C_s + r_s \frac{(C_a + C_s) C_{gs}}{C_a} + C_{gd} R_d^* + \frac{C_{gd} R_d^* C_{gs}}{C_a} + \frac{C_{gd} r_s (C_a + C_s)}{C_a} + \frac{C_{gd} r_s (C_a + C_s) g_m R_d^*}{C_a} + \frac{r_s (C_a + C_s) C_{gd} R_d^*}{C_a R_g}$$

$$B_3 = \frac{r_s (C_a + C_s) C_{gs} C_{gd} R_d^*}{C_a} + C_{gd} R_d^* r_s C_s$$

Il risultato ottenuto con la seguente scelta dei parametri:

$$R_d = 5000\Omega, \quad C_{gd} = 2pF, \quad C_a = 1nF, \quad r_s = 100\Omega, \quad C_{gs} = 5pF,$$

$$R_g = 100M\Omega, \quad g_m = 3 \cdot 10^{-3} S, \quad C_s = 2pF$$

è confrontato con quello del calcolo approssimato nelle figure 10.25 e 10.26, rispettivamente per la zona delle alte e delle basse frequenze.

Come si vede, il risultato esatto è praticamente identico a quello approssimato a basse frequenze, mentre se ne discosta alquanto ad alte frequenze.

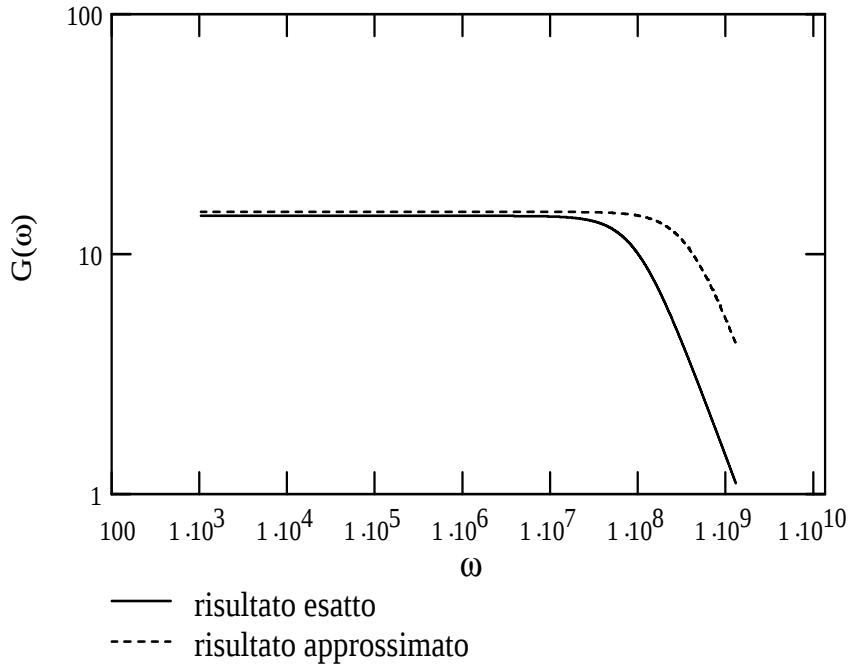


Figura 10.25:

10.10 Risposta dell'amplificatore ad un gradino di tensione

Come sappiamo, la risposta in frequenza di un generico circuito è legata alla risposta ad un gradino di tensione. Vediamo allora di calcolare tale risposta, che ci sarà utile quando ci occuperemo dell'elettronica per rivelatori di particelle nucleari.

La risposta al gradino è facilmente ottenibile una volta nota la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento. Questa è stata ottenuta nella sezione precedente (equazione 10.34).

La risposta al gradino unitario è ora data dall'antitrasformata di $A_v(s)/s$, cioè di:

$$v_o(s) = \frac{A_0 + A_1 s}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + B_3 s^3} \quad (10.35)$$

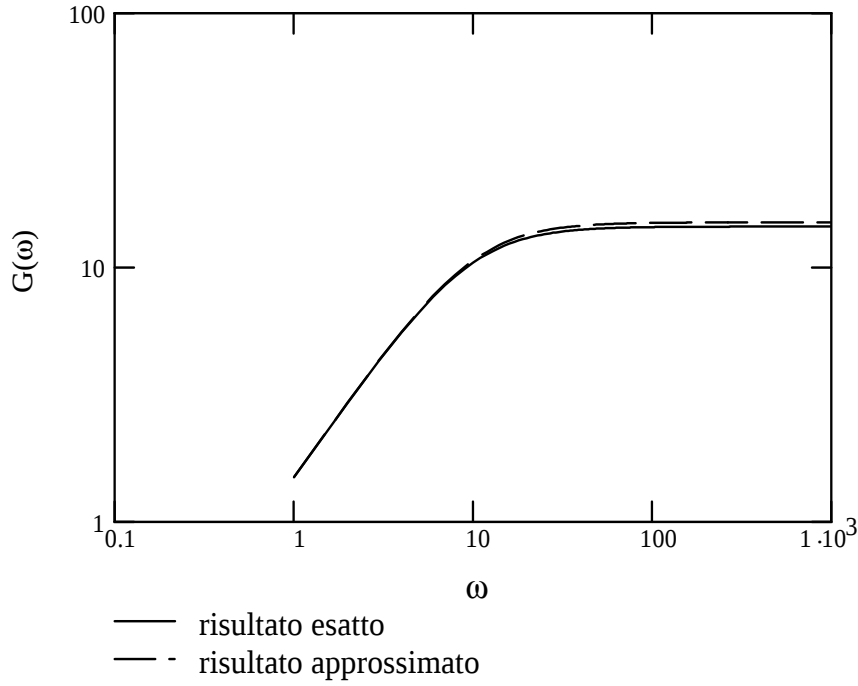


Figura 10.26:

Tale antitrasformata può esser calcolata numericamente facendo uso di programmi standard, quali Mathematica. Con la seguente scelta dei valori dei componenti:

$$R_d = 5000\Omega, \quad C_{gd} = 2pF, \quad C_a = 1nF, \quad r_s = 100\Omega, \quad C_{gs} = 5pF,$$

$$R_g = 100M\Omega, \quad g_m = 3 \cdot 10^{-3} S, \quad C_s = 2pF$$

si trova:

$$A_0 = -15., \quad A_1 = 1.0 \cdot 10^{-8},$$

$$B_0 = 10., \quad B_1 = 1.037, \quad B_2 = 1.396 \cdot 10^{-8}, \quad B_3 = 7.01 \cdot 10^{-18}$$

L'antitrasformata ottenuta è mostrata in figura 10.27, dove il segnale ottenuto è confrontato con il risultato approssimato ottenuto con il metodo discusso nelle sezioni precedenti. La curva relativa al calcolo "esatto" è quella che riproduce meno bene il gradino applicato in ingresso.

Si nota che il segnale in uscita non è un perfetto gradino, ma ha un tempo di salita finito.

L'andamento a tempi lunghi, mostrato in figura 10.28 mostra che la parte piatta del gradino acquista, dopo l'amplificatore, una pendenza finita. Questa è legata sostanzialmente alla costante di tempo $R_g C_a$ e può esser ridotta scegliendo un piccolo valore di C_a .

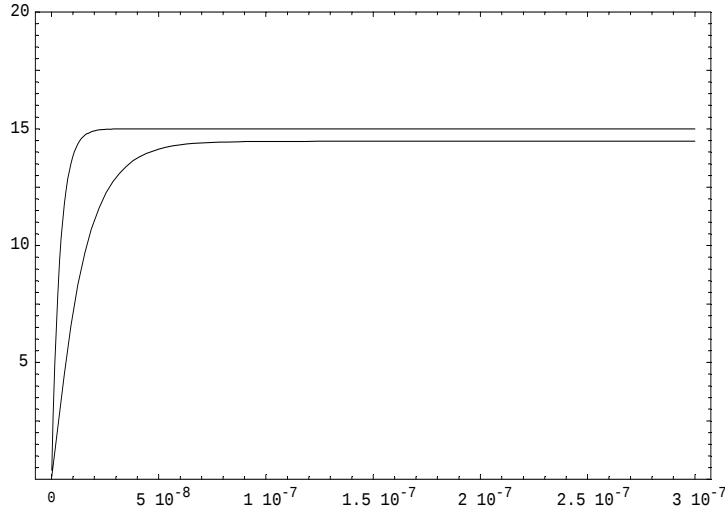


Figura 10.27: Risposta dell'amplificatore a FET ad un gradino. La curva superiore è quella relativa al calcolo approssimato, quella inferiore al calcolo senza approssimazioni

10.11 Funzione di trasferimento dell'amplificatore a FET

Calcoliamo ora, facendo uso del circuito equivalente mostrato in figura 10.24, la funzione di trasferimento dell'amplificatore a FET.

La corrente attraverso la capacità C_s è pari a $i_1 - i_2$, per cui:

$$v_i = (i_1 - i_2) \frac{1}{sC_s} \quad (10.36)$$

dove:

$$v_i = v_s - i_1 r_s \quad (10.37)$$

Dalla 10.36 otteniamo:

$$i_1 = i_2 + sC_s v_i$$

che, sostituita nella 10.37 fornisce:

$$v_i = v_s - r_s i_2 - s r_s C_s v_i$$

cioè:

$$i_2 = -\frac{v_i}{r_s} (s r_s C_s + 1) \quad (10.38)$$

La corrente in Z_g è uguale a $i_2 - i_3$, per cui:

$$v_{gs} = (i_2 - i_3) Z_g \quad (10.39)$$

dove è:

$$v_{gs} = v_i - \frac{i_2}{sC_a} \quad (10.40)$$

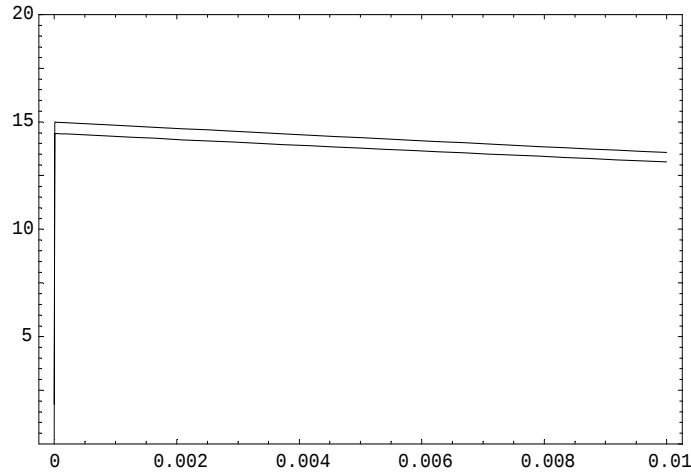


Figura 10.28: Risposta dell'amplificatore a FET ad un gradino. La curva superiore è quella relativa al calcolo approssimato, quella inferiore al calcolo senza approssimazioni

Dalla 10.39 otteniamo:

$$i_2 = i_3 + \frac{v_{gs}}{Z_g}$$

che, sostituita nella 10.40 fornisce:

$$v_{gs} = v_i - \frac{i_3}{sC_a} - \frac{v_{gs}}{sC_a Z_g}$$

cioè:

$$v_{gs} \left(1 + \frac{1}{sC_a Z_g} \right) = v_i - \frac{i_3}{sC_a} \quad (10.41)$$

Dal nodo D abbiamo:

$$v_o = v_{gs} - \frac{i_3}{sC_{gd}} \quad (10.42)$$

nonchè:

$$v_o - R_d^* i_3 - g_m R_d^* v_{gs} \quad (10.43)$$

Calcoliamo ora i_3 facendo uso della 10.41 e sostituiamo nella 10.42:

$$\frac{i_3}{sC_a} = v_i - v_{gs} \left(1 + \frac{1}{sC_a Z_g} \right)$$

cioè:

$$i_3 = sC_a v_i - v_{gs} \left(sC_a + \frac{1}{Z_g} \right) \quad (10.44)$$

sostituendo poi nella 10.42:

$$v_o = v_{gs} \left(1 + \frac{C_a}{C_{gd}} + \frac{1}{sC_{gd}Z_g} \right) \quad (10.45)$$

Sostituendo invece i_3 nella 10.43:

$$v_o = -g_m R_d^* v_{gs} + R_d^* s C_a v_i - R_d^* v_{gs} (s C_a + 1/Z_g)$$

da cui:

$$v_o = -v_{gs} \left(R_d^* g_m + R_d^* s C_a + \frac{R_d^*}{Z_g} \right) + R_d^* s C_a v_i$$

e quindi:

$$v_i = \frac{v_o + v_{gs} R_d^* (g_m + s C_a + 1/Z_g)}{R_d^* s C_a} \quad (10.46)$$

Sostituendo questa nella 10.45, si ottiene poi:

$$\begin{aligned} v_o &= v_{gs} \left(\frac{s C_{gd} Z_g + s C_a Z_g + 1}{s C_{gd} Z_g} \right) - \frac{C_a [v_o + v_{gs} (g_m + s C_a + 1/Z_g)]}{C_{gd} R_d^* s C_a} = \\ &= v_{gs} \left[\frac{s C_{gd} Z_g + s C_a Z_g + 1}{s C_{gd} Z_g} - \frac{g_m + s C_a + 1/Z_g}{s C_{gd}} \right] - \frac{v_o}{s R_d^* C_{gd}} \end{aligned}$$

da cui con facili passaggi si ottiene:

$$v_o = v_{gs} \frac{R_d^* (s C_{gd} - g_m)}{1 + s R_d^* C_{gd}} \quad (10.47)$$

Dobbiamo ancora esprimere v_{gs} in funzione di v_s . Esprimiamo v_{gs} in funzione di v_i e poi v_i in funzione di v_s .

Riscriviamo a tale scopo le 10.38 e 10.40:

$$v_{gs} = v_i - \frac{i_2}{s C_a}$$

con:

$$i_2 = \frac{v_s}{r_s} - \frac{v_i}{r_s} (1 + s r_s C_s)$$

$$v_{gs} = v_i - \frac{v_s}{s C_a r_s} + \frac{v_i}{s C_a r_s} (1 + s r_s C_s)$$

e poi:

$$v_{gs} = v_i \frac{s r_s C_a + s r_s C_s + 1}{s r_s C_a} - \frac{v_s}{s r_s C_a} \quad (10.48)$$

Uguagliando la 10.42 e 10.43 si ottiene:

$$i_3 = \frac{s C_{gd} v_{gs} (1 + g_m R_d^*)}{1 + s C_{gd} R_d^*} \quad (10.49)$$

Uguagliando la i_3 data dalla 10.49 con la 10.44 si ottiene poi:

$$\frac{sC_{gd}v_{gs}(1+g_mR_d^*)}{1+sC_{gd}R_d^*} = sC_a v_i - v_{gs} \left(sC_a + \frac{1}{Z_g} \right)$$

da cui:

$$v_{gs} \left(sC_a + \frac{1}{Z_g} + \frac{sC_{gd}(1+g_mR_d^*)}{1+sC_{gd}R_d^*} \right) = sC_a v_i$$

e poi:

$$v_i = \frac{v_{gs}}{sC_a Z_g(1+sC_{gd}R_d^*)} [sC_a Z_g(1+sC_{gd}R_d^*) + (1+sC_{gd}R_d^*) + sC_{gd}Z_g(1+g_mR_d^*)] \quad (10.50)$$

Dalla 10.48 otteniamo:

$$v_i = \left(v_{gs} + \frac{v_s}{sr_s C_a} \right) \frac{sr_s C_a}{1 + sr_s(C_a + C_s)} \quad (10.51)$$

Uguagliando la 10.50 alla 10.51 si ha poi:

$$\begin{aligned} \left(v_{gs} + \frac{v_s}{sr_s C_a} \right) \frac{sr_s C_a}{1 + sr_s(C_a + C_s)} &= \\ &= \frac{v_{gs}}{sC_a Z_g(1+sC_{gd}R_d^*)} \{ sZ_g C_a(1+sC_{gd}R_d^*) + (1+sC_{gd}R_d^*) + sZ_g C_{gd}(1+g_mR_d^*) \} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} v_{gs} \left\{ \frac{sr_s C_a}{1 + sr_s(C_a + C_s)} - 1 - \frac{1}{sC_a Z_g} - \frac{C_{gd}(1+g_mR_d^*)}{C_a(1+sC_{gd}R_d^*)} \right\} &= \\ &= -\frac{v_s}{1 + sr_s(C_a + C_s)} \end{aligned}$$

Da questa si ottiene:

$$\begin{aligned} v_{gs} &= -v_s \frac{sC_a Z_g(1+sC_{gd}R_d^*)}{(1+sC_{gd}R_d^*) [s^2 C_a^2 Z_g r_s - sC_a Z_g (sr_s(C_a + C_s) + 1) - (sr_s(C_a + C_s) + 1)]} - \\ &\quad - sC_{gd}Z_g (sr_s(C_a + C_s) + 1) (1+g_mR_d^*) \end{aligned}$$

Sostituendo questa nella 10.47 si ottiene infine:

$$v_o = v_s \frac{R_d^*(sC_{gd} - g_m)}{[1 + sC_{gd}R_d^*] \left[\frac{1}{sC_a Z_g} + (1 + sr_s C_s) + \frac{r_s(C_a + C_s)}{C_a Z_g} \right] + \frac{C_{gd}[sr_s(C_a + C_s) + 1][1 + g_m R_d^*]}{C_a}}$$

Che è la relazione cercata.

Questa può esser messa nella forma del rapporto di due polinomi nella variabile complessa s . Basterà sostituire a Z_g la sua espressione:

$$Z_g = \frac{R_g}{1 + sR_g C_{gs}}$$

Si ottiene in tal modo, dopo alcuni passaggi, che la funzione di trasferimento è data da:

$$G(s) = \frac{s^2 R_d^* C_{gd} - s R_d^* g_m}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + B_3 s^3}$$

dove:

$$B_0 = \frac{1}{C_a R_g}$$

$$B_1 = \left[1 + \frac{r_s (C_a + C_s)}{C_a R_g} + \frac{C_{gd} R_d^*}{C_a R_g} + \frac{C_{gd}}{C_a} + \frac{C_{gd}}{C_a} g_m R_d^* \right]$$

$$B_2 = r_s C_s + r_s C_{gs} \frac{C_a + C_s}{C_a} + C_{gd} R_d^* + \frac{C_{gd} R_d^* C_{gs}}{C_a} + \frac{C_{gd} r_s (C_a + C_s)}{C_a} + \\ + \frac{C_{gd} r_s (C_a + C_s) g_m R_d^*}{C_a} + r_s C_{gd} R_d^* \frac{(C_a + C_s)}{C_a R_g}$$

$$B_3 = \left[r_s C_{gs} C_{gd} R_d^* \frac{C_a + C_s}{C_a} + C_{gd} R_d^* r_s C_s \right]$$