Capitolo 5

Rappresentazione grafica di funzioni di trasferimento in elettronica

5.1 Introduzione

Ci proponiamo in questa sezione di discutere i metodi comunemente adoperati in elettronica per rappresentare graficamente le funzioni di trasferimento dei circuiti quadripolari. Tali metodi sono di notevole utilità sia per una visualizzazione immediata della risposta di un circuito che per discutere il problema della stabilità nei circuiti oscillanti e, più in generale, nei circuiti con feedback. Inizieremo con una breve discussione di quelli che sono noti come i *diagrammi di Bode*, e con la presentazione di alcuni esempi. Passeremo poi a discutere i diagrammi di Nyquist.

5.2 Diagrammi di Bode

Cominceremo con l'analizzare un esempio: quello del ben noto circuito RC passa-basso, che per comodità riportiamo in figura (5.1).

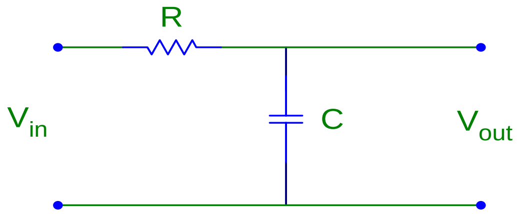

Figura 5.1:

Come sappiamo, la funzione di trasferimento di questo circuito, espressa in funzione della variabile s (dove $s = j\omega$ o, più in generale, $s = \sigma + j\omega$ se facciamo uso delle trasformate di Laplace, con ω la frequenza angolare) è:

$$G(s) = \frac{k}{s - s_1}$$

dove $\tau = RC$ e $k = -s_1 = 1/\tau$. Tale funzione ha un polo in s_1 e nessuno zero.

Esaminiamo l'andamento del modulo della G, espresso in decibel, in funzione del logaritmo di ω:

$$20 \log |G(\omega)| \;=\; 20 \log |k| - 20 \log |j\omega - s_1|$$

Per frequenze angolari $\omega \ll |s_1|$ questa diventa:

$$20 \log |G(\omega)| \;=\; 20 \log |k| - 20 \log |s_1| \;=\; 0 \tag{5.1}$$

essendo $|s_1| = |k|$. Vediamo quindi che il modulo della funzione di trasferimento espresso in dB si annulla. Ciò vuol dire che il guadagno $|G(\omega)|$ ha modulo unitario.

Ad alte frequenze ($\omega \gg |s_1|$)avremo invece:

$$20 \log |G(\omega)| \;=\; 20 \log |k| - 20 \log \omega \tag{5.2}$$

Questa ci dice che il modulo della funzione di trasferimento espressa in dB è una funzione lineare della variabile $20 \log \omega$.

Il grafico che si ottiene riportando per un circuito il modulo della funzione di trasferimento espresso in dB in funzione del $\log \omega$ è il diagramma di Bode per il modulo di G. Un diagramma tipico è mostrato in figura (5.2).

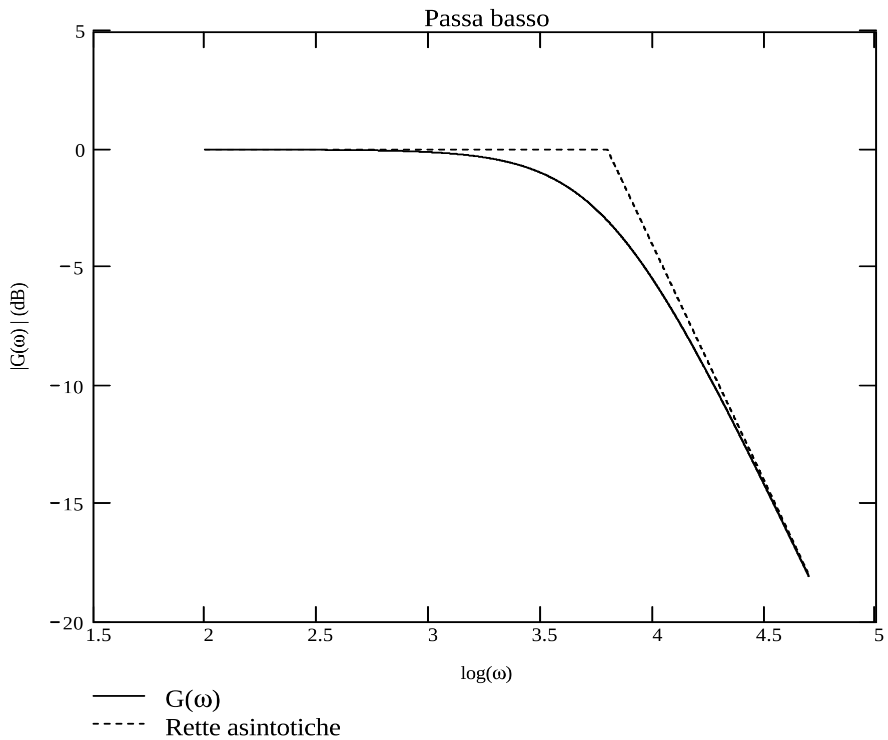

Figura 5.2:

Poichè $G(\omega)$ è in genere un numero complesso, esso è caratterizzato anche da una fase $\phi(\omega)$. Il grafico che si ottiene riportando la fase in funzione del $\log \omega$ è il diagramma di Bode per la fase. L'insieme dei due diagrammi di Bode per un dato circuito caratterizza la risposta dello stesso.

Quello che abbiamo appena analizzato è quindi il diagramma di Bode per il modulo del circuito passa-basso.

In realtà, è spesso sufficiente esaminare le rette asintotiche che descrivono l'andamento del modulo (in dB) e della fase della funzione di trasferimento.

Nell'esempio in esame, relativo al modulo di $G(\omega)$, le due rette asintotiche sono quelle date dalle equazioni (5.1) e (5.2). Esse si incontrano, come si può facilmente verificare, nel punto:

$$\omega \;=\; |k| \;=\; \frac{1}{\tau}$$

(vedi figura (5.2)). Notiamo che se ω raddoppia (cioè in un'ottava) la grandezza $20 \log \omega$ aumenta di circa un fattore 6. Poichè la funzione (5.2) è lineare nella variabile $20 \log \omega$, si vede che essa è tale da subire una variazione (diminuzione) di 6 dB per ottava. Il filtro passa-basso ha quindi un'andamento asintotico alle alte frequenze caratterizzato da una retta di pendenza pari a 6 dB/ottava.

Si può poi facilmente verificare che se la frequenza varia di un fattore 10 anzichè 2 (cioè in una decade) la funzione avrà subito una variazione di 20 dB. Ciò si esprime dicendo che la retta in esame ha una pendenza (negativa) di 20 dB/decade.

Nel punto in cui le due rette asintotiche si incontrano, il modulo della risposta vera $|G(\omega)|$ del circuito vale, come si può facilmente vedere, $1/\sqrt{2}$. In decibel, esso vale $-3\ dB$, e quindi è 3 dB al di sotto del valore asintotico alle basse frequenze (che è 0 dB).

Esaminiamo ora il filtro passa-alto, mostrato in figura (5.3).

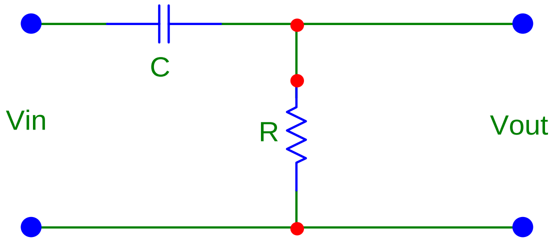

Figura 5.3:

La funzione di trasferimento, come si può facilmente verificare, vale:

$$G(s) \;=\; \frac{s}{s - s_1}$$

con $s_1 = -1/\tau$. Questa ha uno zero nell'origine (s=0) oltre ad un polo in $s = s_1$. L'andamento del modulo di questa funzione (in dB) per $\omega \ll |s_1|$ è:

$$|G(s)|_{dB} \;=\; 20 \log \omega - 20 \log |s_1|$$

Vediamo che questa funzione cresce all'aumentare di $\log \omega$ con una pendenza di 6 dB/ottava. Per frequenze molto alte ($\omega \gg |s_1|$) l'andamento diventa costante:

$$|G(s)|_{dB} \;=\; 0$$

cioè il guadagno diventa unitario.

Tali comportamenti, per alte e per basse frequenze, sono schematicamente indicati nel diagramma di Bode di figura (5.4).

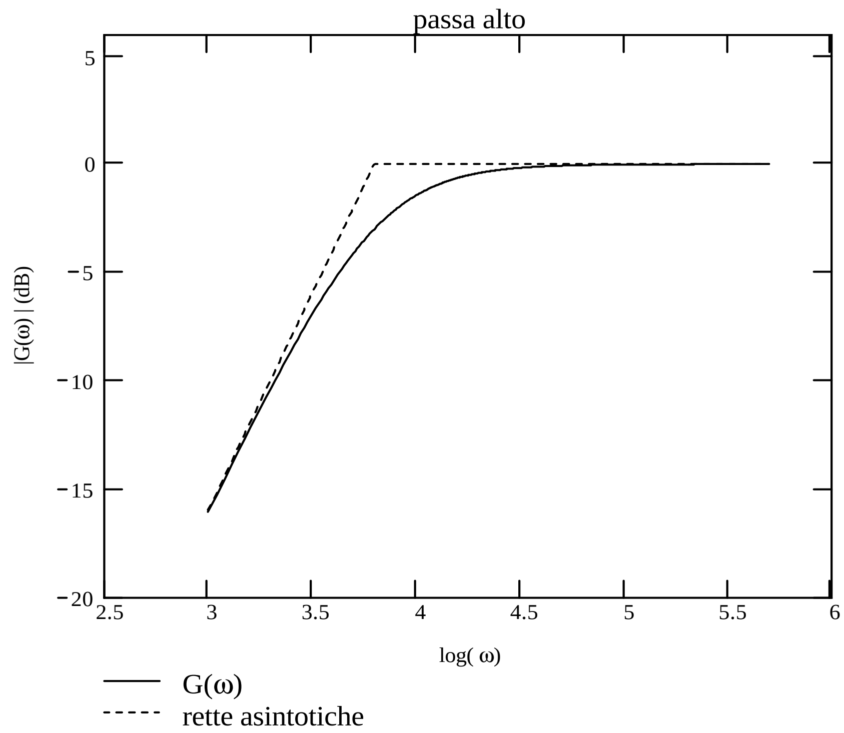

Figura 5.4:

Le due rette asintotiche si incontrano nel punto: $\omega = |s_1| = 1/\tau$. In tale punto il valore vero di $|G(\omega|_{dB}$ è -3 dB, come nel caso del circuito passa-basso.

Riassumendo, possiamo dire che ad una funzione di trasferimento con un polo semplice e nessuno zero, corrisponde un filtro passa-basso, caratterizzato da una risposta piatta (0 dB) a frequenze molto minori del valore assoluto del polo e da una risposta che decresce con pendenza di 6 dB/ottava ad alte frequenze. Le rette asintotiche che descrivono tali andamenti si incontrano nel punto $\omega = |s_1|$ dove s_1 è la posizione del polo. In corrispondenza a tale frequenza la funzione $|G(\omega)|_{dB}$ ha un valore che è $-3\ dB$.

Una funzione di trasferimento con un polo semplice ed uno zero nell'origine corrisponde ad un filtro passa-alto, caratterizzato da un'andamento crescente con una pendenza di 6 dB/ottava a basse frequenze ($\omega \ll |s_1|$), dove s_1 è la posizione del polo, e da un'andamento costante (0 dB) ad alte frequenze. Le rette che descrivono i due andamenti asintotici si incontrano in $\omega = |s_1|$. In corrispondenza a tale frequenza angolare la funzione di trasferimento vale $-3\ dB$.

Plots di Bode per la fase

La fase ϕ, nel caso del circuito passa-basso, è data da:

$$\tan\phi = \frac{\omega}{s_1} = -\omega\tau$$

cioè:

$$\phi = -arctan(\omega\tau) \tag{5.3}$$

Vediamo che ϕ tende a zero se $\omega \ll |s_1|$, mentre tende ad $-\pi/2$ se $\omega \gg |s_1|$. L'andamento reale di ϕ, descritto dalla (5.3) è mostrato in figura (5.5), insieme agli andamenti asintotici per $\omega \gg |s_1|$ e per $\omega \ll |s_1|$.

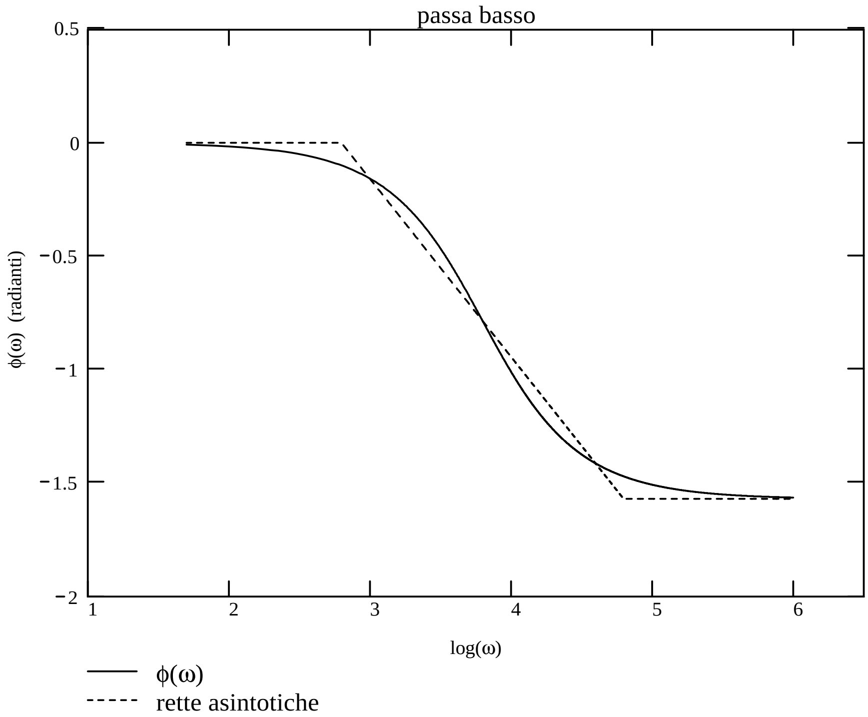

Figura 5.5:

Si può facilmente verificare che, per $\omega = \frac{0.1}{\tau}$, la fase è ancora vicina a zero, mentre per $\omega = 10\tau$ essa ha ormai raggiunto il suo valore asintotico $-\pi/2$.

Esaminiamo ora il caso del filtro passa-alto, già analizzato. É facile vedere che in tal caso la fase è data da:

$$\tan\phi \;=\; -\frac{s_1}{\omega} \;=\; \frac{1}{\omega\tau}$$

cioè:

$$\phi \;=\; arctan(1/\omega\tau) \tag{5.4}$$

Vediamo da quest'equazione che $\phi \to \pi/2$ per $\omega \to 0$, mentre $\phi \to 0$ per $\omega \to \infty$. Tali andamenti asintotici sono mostrati in figura (5.6) insieme all'andamento vero, descritto dalla (5.4).

Anche in questo caso l'andamento asintotico per piccoli valori di ω ($\omega \ll 1/\tau$) differisce molto poco dall'andamento reale per $\omega = 0.1/\tau$, mentre l'andamento asintotico per grandi valori di ω ($\omega \gg 1/\tau$) differisce poco da quello reale quando $\omega = 10/\tau$.

La figura (5.7) mostra i plot di Bode relativi ad un circuito CR, con valori dei componenti dati da: $C = 1nF$, $R = 1k\Omega$. Questi sono stati ottenuti facendo uso del programma di simulazione Microcap VII [5].

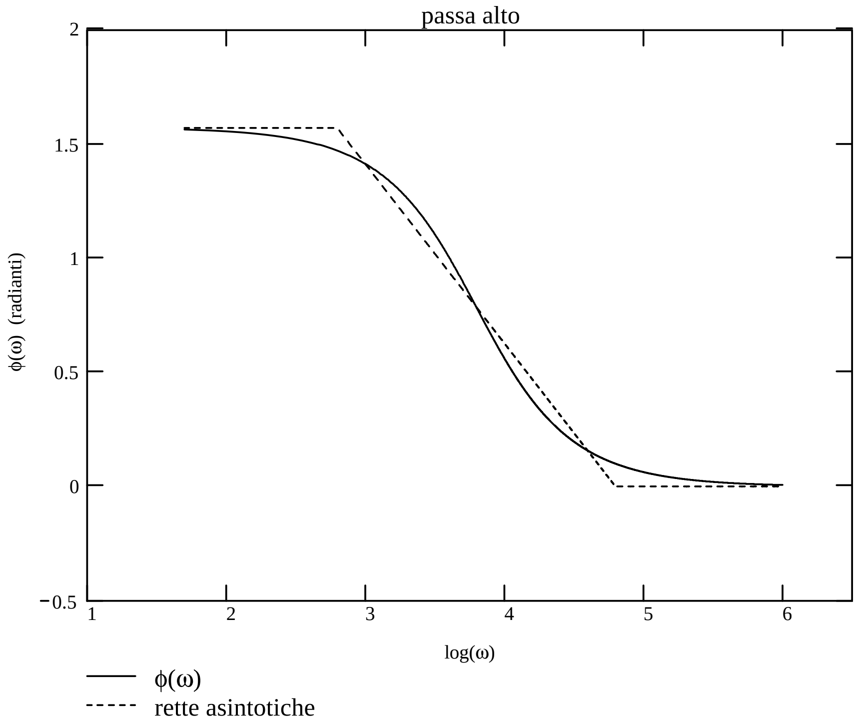

Figura 5.6:

Consideriamo ancora una funzione di trasferimento con un polo ed uno zero non nell'origine:

$$G(s) \; = \; \frac{1 + s\tau_2}{1 + s\tau_1}$$

Il polo è in $s_1 = -1/\tau_1$; lo zero in $s_2 = -1/\tau_2$. Il plot di Bode per il modulo è mostrato in figura (5.8) (dove si è ammesso che sia $\tau_1 \ll \tau_2$).

Il plot di Bode per la fase può esser facilmente ottenuto facendo uso della relazione:

$$\phi \; = \; \arctan{(\omega\tau_2)} \; - \arctan{(\omega\tau_1)}$$

dove $\tau_1 < \tau_2$, cioè $1/\tau_2 < 1/\tau_1$. Avremo i seguenti andamenti asintotici:

- Per $\omega \ll \frac{1}{\tau_2}$ (e quindi anche $\omega \ll \frac{1}{\tau_1}$) $\Rightarrow \phi \approx 0$
- Per $\omega \gg \frac{1}{\tau_1}$ (e quindi anche $\omega \gg \frac{1}{\tau_2}$) $\Rightarrow \phi \approx 0$
- Per $\omega \gg \frac{1}{\tau_2}$ ed $\omega \ll \frac{1}{\tau_1} \Rightarrow \phi = arctan(\omega\tau_2) \; \approx \; \pi/2$

Tali andamenti sono qualitativamente indicati nella figura (5.9).

5.3 Quadripoli del secondo ordine

Esaminiamo ora un sistema descritto da una funzione di trasferimento del tipo:

$$G(s) \; = \; \frac{k}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

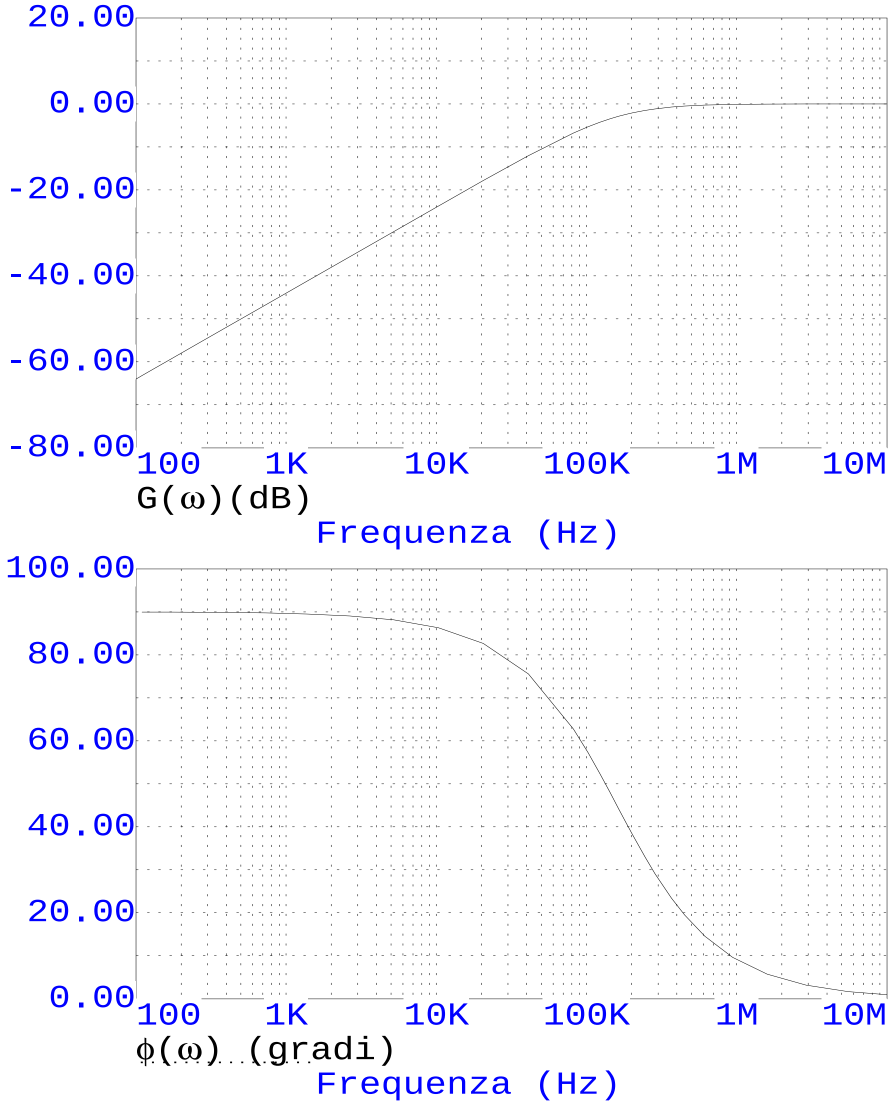

Figura 5.7:

Questa non ha alcuno zero, ma ha due poli nei punti s_1 ed s_2. I poli s_1 ed s_2 possono essere reali e distinti, reali e coincidenti o complessi coniugati.

Cominciamo con l'esaminare il caso in cui i due poli sono reali e coincidenti. In tal caso possiamo scrivere:

$$20 \log |G(j\omega)| \; = \; 20 \log |k| - 20 \log |s - \overline{s}|^2 \; = \; 20 \log |k| - 40 \log |j\omega - \overline{s}|$$

con: $s_1 = s_2 = \overline{s}$ (reale).

Esaminiamo gli andamenti asintotici. Per $\omega \ll \overline{s}$:

$$|G(\omega)|_{dB} \; = \; 20 \log |k| - 40 \log |\overline{s}| \; = \; costante \tag{5.5}$$

Se invece è $\omega \gg \overline{s}$:

$$|G(\omega)|_{dB} \; = \; 20 \log |k| - 40 \log \omega$$

cioè si ha un'andamento decrescente, con pendenza pari a -12 dB/ottava, cioè al doppio di quella che si aveva nel caso del filtro passa-basso del primo ordine.

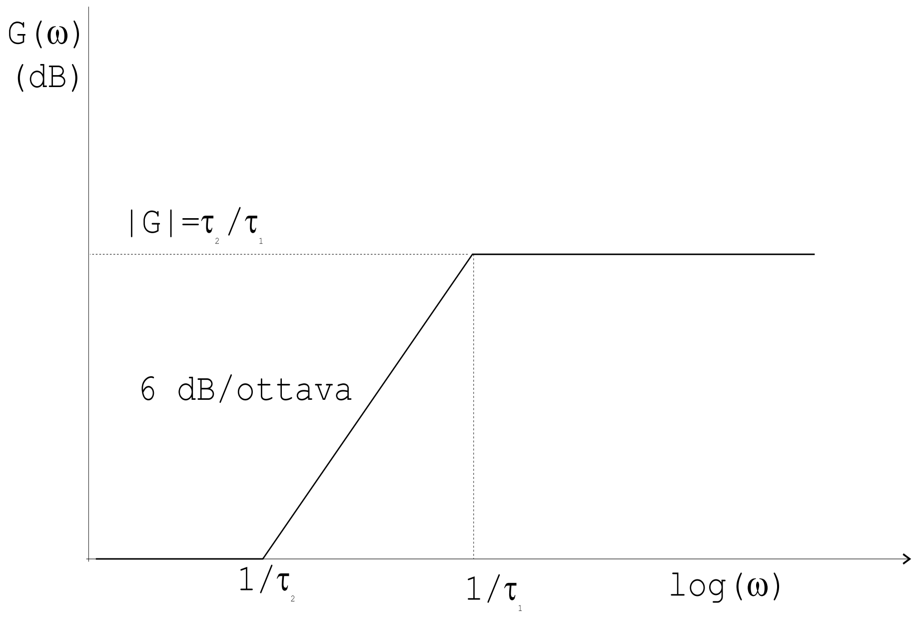

Figura 5.8:

Le due rette che descrivono l'andamento asintotico per basse e per alte frequenze si incontrano nel punto $\omega = \overline{s}$. In tale punto la $|G(\omega)|_{dB}$ vale:

$$|G(\omega)|_{dB} \;=\; 20\log|k| - 40\log|j\overline{s} - \overline{s}| \;=$$

$$=\; 20\log|k| - 40\log\overline{s} - 40\log\sqrt{2} \;=\; costante - 6dB$$

dove la costante ha un valore uguale a quello dell'analoga costante presente nella (5.5). Si ha quindi un'attenuazione di 6 dB rispetto a quella che si aveva a basse frequenze. Abbiamo quindi un filtro passa-basso con un *taglio* più netto di quello che avremmo avuto utilizzando un sistema del primo ordine.

Esaminiamo ora il caso di un sistema descritto dalla medesima funzione di trasferimento appena esaminata, ma nel quale le due radici s_1 ed s_2 del polinomio a denominatore siano reali e distinte. Ammettiamo per semplicità che esse siano abbastanza distanti l'una dall'altra:

$$|s_1| \ll |s_2|$$

Facendo ora uso di quanto appreso finora, possiamo vedere che, se $\omega \ll |s_1|$ (e quindi $\omega \ll |s_2|$) avremo un andamento costante per $|G(\omega)|_{dB}$. Per valori di $\omega \gg |s_1|$ ed $\omega \ll |s_2|$, il contributo del termine $1/(s - s_2)$ sarà ancora costante, mentre il termine $1/(s - s_1)$ avrà un andamento decrescente, con una pendenza di 6 dB/ottava. Infine, per $\omega \gg |s_2|$ (e quindi $\omega \gg |s_1|$) alla pendenza di 6 dB/ottava causata dal termine $1/(s - s_1)$ si somma un ulteriore contributo di 6 dB/ottava causato dal termine $1/(s - s_2)$. L'andamento complessivo può in definitiva esser riassunto come indicato in figura (5.10).

L'andamento della fase $\phi(\omega)$ per tale sistema è poi quello mostrato in figura (5.11).

Ci riserviamo di esaminare nella prossima sezione il caso di poli complessi coniugati, che merita un'attenzione particolare.

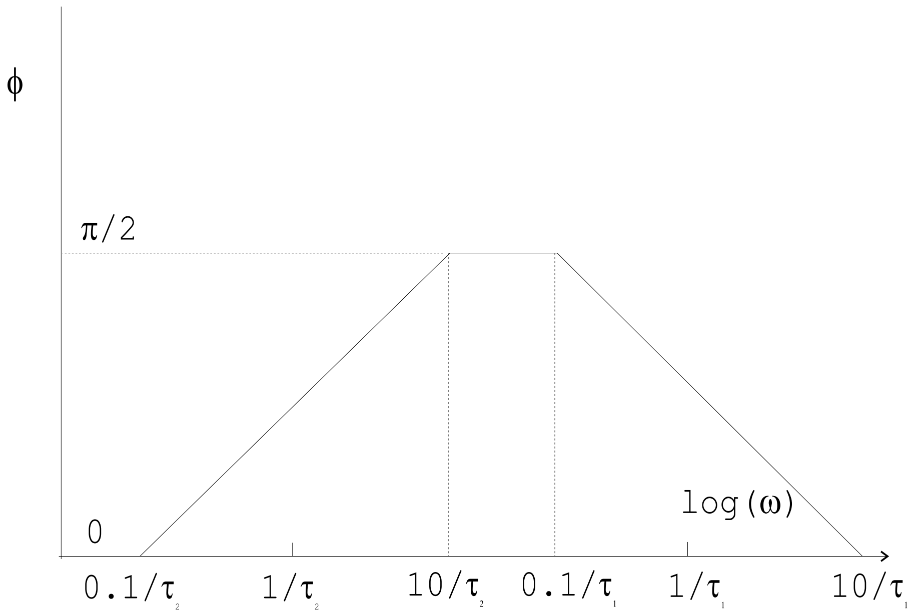

Figura 5.9:

Esaminiamo ora il caso della funzione di trasferimento:

$$G(s) \; = \; \frac{ks^2}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

con $|s_1| \ll |s_2|$. Questa funzione ha due zeri coincidenti nell'origine e due poli nei punti s_1 ed s_2. Esaminiamo il relativo diagramma di Bode per il modulo. Si ha:

$$20\log|G(\omega)| \; = \; 20\log\left|\frac{k\omega^2}{(j\omega-s_1)(j\omega-s_2)}\right|$$

Per frequenze angolari $\omega \ll |s_1|, |s_2|$, si ha:

$$|G(\omega)|_{dB} \to 20\log\frac{k\omega^2}{s_1 s_2} \; = \; 20\log\frac{k}{s_1 s_2} \; + \; 40\log\omega$$

cioè un'andamento crescente in funzione di $\log\omega$. La pendenza nel diagramma di Bode è di 12 dB/ottava. Per frequenze $\omega \gg |s_1|$ed $\omega \ll |s_2|$ avremo invece:

$$|G(\omega)|_{dB} \to 20\log\frac{k\omega}{|s_2|} \; = \; 20\log\frac{k}{|s_2|} \; + \; 20\log\omega$$

Vediamo che questa ha, nel diagramma di Bode, un'andamento crescente con una pendenza di 6 dB/ottava. La retta che descrive l'andamento asintotico per $\omega \ll |s_1|$ e quella che descrive l'andamento asintotico per $|s_1| \ll \omega \ll |s_2|$ si incontrano nel punto di coordinata ω tale che:

$$20\log\frac{k}{|s_1 s_2|} \; + \; 40\log\omega \; = \; 20\log\frac{k}{|s_2|} \; + \; 20\log\omega$$

cioè: $\omega = |s_1|$.

Infine, per $\omega \gg |s_2| \gg |s_1|$ avremo:

$$|G(\omega)|_{dB} \to 20\log k \; = \; costante$$

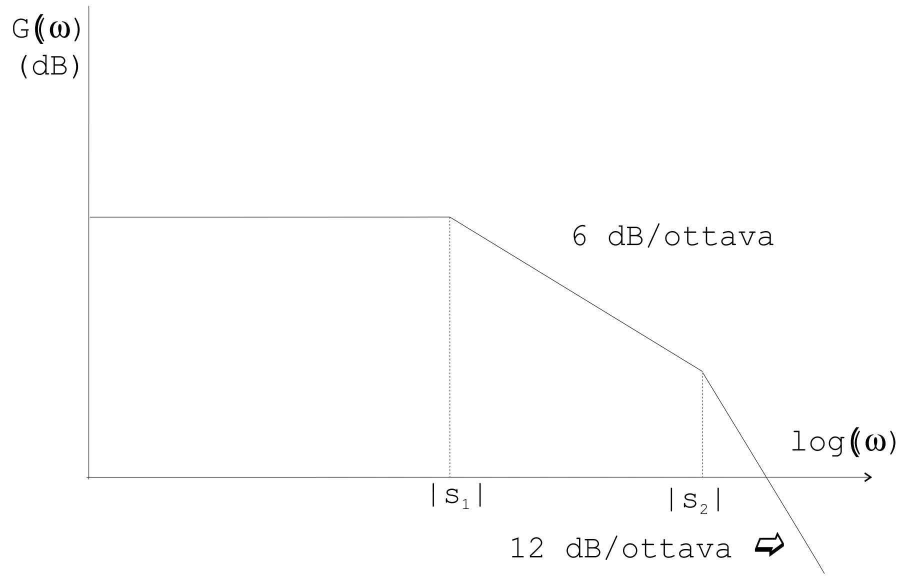

Figura 5.10:

Vediamo quindi che il circuito descritto da questa funzione di trasferimento è un passa-alto. Calcoliamo il valore di ω per cui la retta che descrive il comportamento asintotico per $|s_1| \ll \omega \ll |s_2|$ incontra quella che descrive il comportamento asintotico per $\omega \gg |s_2|$. Troviamo facilmente:

$$\omega = |s_2|$$

In corrispondenza a tale valore di ω la funzione di trasferimento espressa in dB vale:

$$20 \log \left| \frac{k s_2^2}{(j s_2 - s_1)(j s_2 - s_2)} \right| = 20 \log k - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log k - 3dB$$

Cioè la risposta è, come in altri casi simili esaminati, 3 dB al di sotto del valore asintotico per $\omega \to \infty$.

L'andamento di tale funzione di trasferimento è mostrato nel diagramma di Bode di figura (5.12).

Esaminiamo ora un sistema descritto da una funzione con uno zero semplice nell'origine e due poli distinti:

$$G(s) = \frac{ks}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Per frequenze angolari $\omega \ll |s_1| \ll |s_2|$ avremo:

$$20 \log |G(\omega)| = 20 \log k + 20 \log \omega - 20 \log |s_1 s_2|$$

Cioè abbiamo un'andamento crescente con una pendenza di 6 dB/ottava, come mostrato in figura (5.13).

Per frequenze angolari comprese tra s_1 ed s_2 avremo:

$$|G(\omega)|_{dB} = 20 \log k + 20 \log |s_2| = costante$$

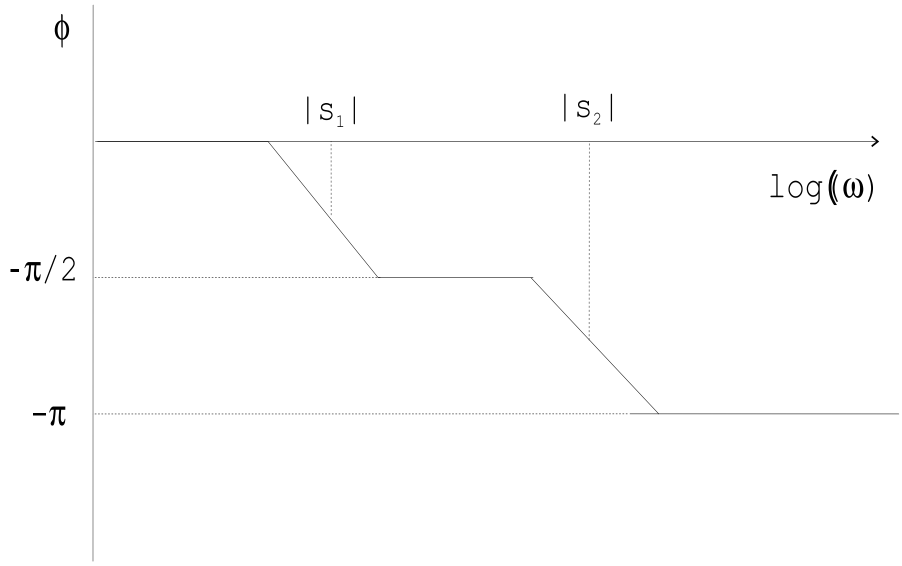

Figura 5.11:

Infine, per valori di ω molto maggiori di s_2:

$$|G(\omega)|_{dB} \;=\; 20\log k + 20\log\omega - 20\log\omega^2 \;=\; 20\log k - 20\log\omega$$

cioè abbiamo un andamento decrescente, con una pendenza di -6 dB/ottava.

Anche in questo caso potremmo verificare che le rette che descrivono l'andamento asintotico per $\omega \ll |s_1|$ e per $\omega \gg |s_1|$ si incontrano in $\omega = |s_1|$, e che quelle che descrivono gli andamenti asintotici per $\omega \ll |s_2|$ e per $\omega \gg |s_2|$ si incontrano in $\omega = |s_2|$. Inoltre in tali punti il valore vero della $|G(\omega)|_{dB}$ è sotto di 3 dB rispetto al valore che la retta asintotica orizzontale fornisce. Abbiamo ovviamente un filtro passa-banda.

Consideriamo infine un circuito descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) \;=\; \frac{k(s_2+\omega_0^2)}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

che ha due poli in s_1 ed s_2 e due zeri imaginari in $s = \pm j\omega_0$. Si può dimostrare che tale funzione descrive un filtro *elimina-banda.*

A conclusione delle considerazioni svolte, possiamo ora trarre alcune conclusioni di carattere generale:

a) ad uno zero semplice nella funzione di trasferimento corrisponde nel diagramma di Bode un'andamento crescente, con una pendenza di 6 dB/ottava

b) ad uno zero doppio corrisponde un'andamento crescente con una pendenza di 12 dB/ottava

c) ad un polo semplice corrisponde un'andamento decrescente con una pendenza di 6 dB/ottava

d) ad un polo doppio corrisponde un'andamento decrescente con una pendenza di 12 dB/ottava

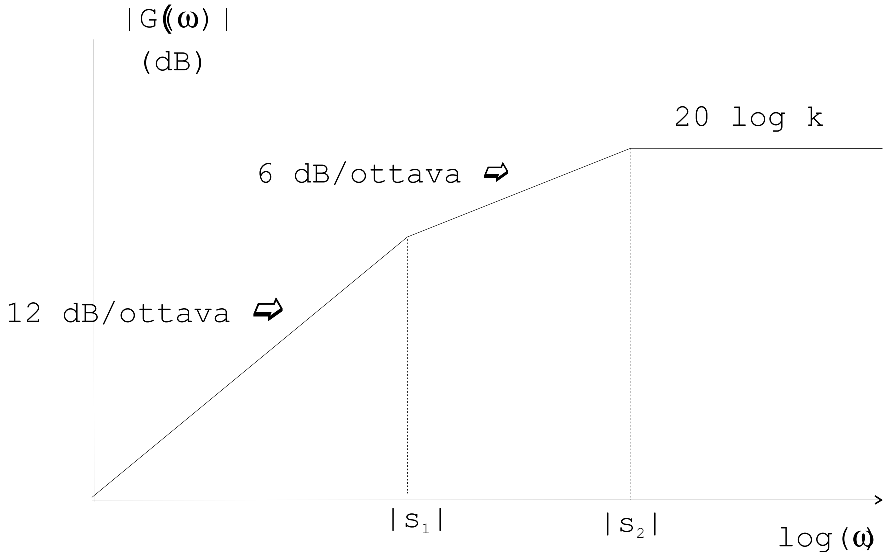

Figura 5.12:

Quindi, un'analisi dei poli e degli zeri della funzione di trasferimento può portare ad individuare in modo semplice il tipo di risposta che ci si deve aspettare dal circuito descritto dalla funzione stessa.

Esaminiamo come esempio il circuito mostrato in figura (5.14).

La funzione di trasferimento, coem si può facilmente verificare, è:

$$G(s) \; = \; \frac{s}{(RC)s^2 + s + (R/L)}$$

Questa ha uno zero nell'origine, che fornisce un'andamento crescente con pendenza di 6 dB/ottava. Il polinomio di secondo grado a denominatore ha un discriminante dato da:

$$\Delta \; = \; \sqrt{1 - 4R^2C/L}$$

Vediamo da questa che le radici (e quindi i poli della funzione di trasferimento) saranno reali e distinte se:

$$R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Se ciò accade, indicando con s_1 ed s_2 le due radici (con $s_1 < s_2$) avremo un diagramma di Bode per il modulo, del tipo mostrato in figura (5.15). Vediamo che si tratta di un filtro passa-banda.

Se le radici sono reali e coincidenti ($\Delta = 0$ ed $s_1 = s_2$), avremo un diagrama di Bode per il modulo del tipo mostrato in figura (5.16).

Se infine il discriminante è negativo, i poli saranno complessi coniugati. Si può dimostrare che in questo caso gli asintoti sono uguali a quelli corrispondenti ad un polo doppio, in $|s_1| = |s_1^*| = |s_2|$. Il comportamento della curva che descrive l'andamento della $|G(\omega)|_{dB}$ in prossimità del polo doppio ha un andamento che dipende dal rapporto tra parte immaginaria e reale del polo. Tale comportamento sarà studiato nella prossima sezione.

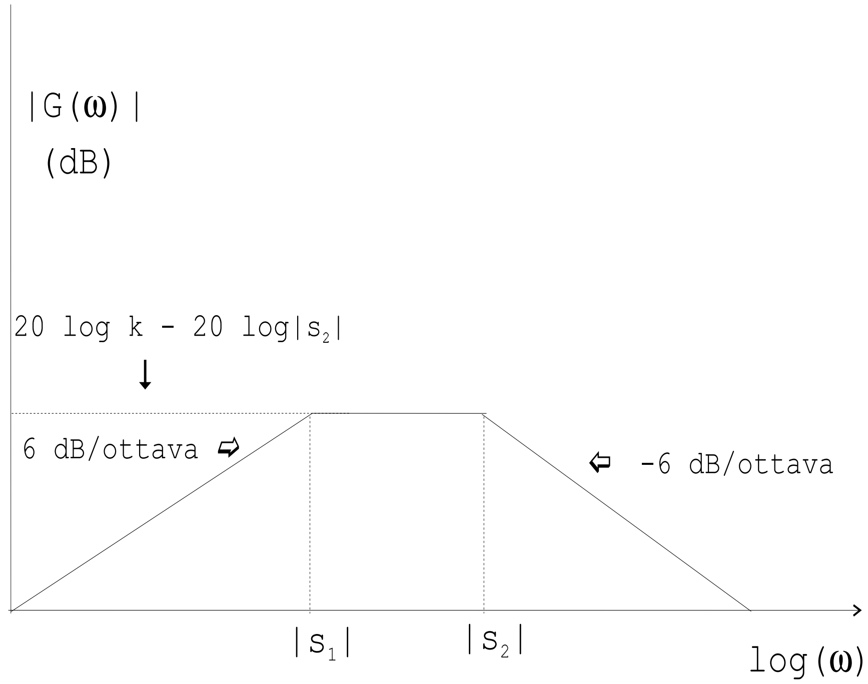

Figura 5.13:

Notiamo infine che, con riferimento al diagramma di Bode mostrato in figura (5.15), la *larghezza di banda* è definita come: $BW = |s_2| - |s_1|$.

Ad esempio, con la seguente scelta dei valori dei componenti:

$$R = 1k\Omega \ \ , \ \ L = 1mH \ \ , \ \ C = 50\,pF$$

Si ottengono per questo circuito, facendo uso del programma di simulazione Microcap VI, i plot di Bode per modulo del guadagno e fase, mostrati in figura (5.17).

5.4 Funzioni di trasferimento con due poli complessi coniugati

Riprendiamo ora l'analisi della funzione di trasferimento con due poli, già incontrata nella precedente sezione, nel caso in cui i due poli s_1 ed s_2 siano complessi coniugati. Analizzeremo in realtà nuovamente il caso generale di una funzione con due poli, introducendo una notazione che si rivela utile in molti casi, ad esempio nell'analisi dei filtri attivi.

Possiamo riscrivere in generale il denominatore di una funzione di trasferimento con due poli:

$$(s - s_1)(s - s_2) \tag{5.6}$$

nella forma:

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2 \tag{5.7}$$

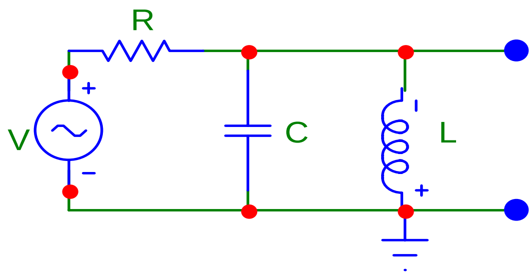

Figura 5.14:

Sviluppando la (5.6) ed uguagliando i coefficienti a quelli che figurano nella (5.7), otteniamo:

$$\frac{\omega_0}{Q_0} = -(s_1 + s_2) \tag{5.8}$$

$$\omega_0^2 = s_1 s_2 \tag{5.9}$$

Invertendo queste equazioni si ottiene:

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\omega_0}{Q_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2 - 4\omega_0^2}\right] \tag{5.10}$$

I poli saranno reali e coincidenti per $\Delta = 0$, cioè:

$$\omega_0^2(1 - 4Q_0^2) = 0$$

da cui:

$$Q_0 = 0.5$$

I poli saranno reali e distinti per $Q_0 < 0.5$ mentre saranno complessi coniugati per $Q_0 > 0.5$. In ques'ultimo caso la parte reale dei due poli sarà:

$$Re(s_1) = Re(s_2) = -\frac{\omega_0}{2Q_0}$$

Notiamo che in questo caso, con $s_2 = s_1^*$, l'equazione:

$$\omega_0^2 = s_1 s_2 = s_1 s_1^* = |s_1|^2 = |s_2|^2$$

ci dice che ω_0 rappresenta la distanza di ciascuno dei due poli dall'origine. Ciò è mostrato in figura (5.18).

Dalla figura si vede che:

$$\cos\gamma = \frac{1}{2Q_0}$$

con $Q_0 > 0.5$

Poniamo ora:

$$s_1 = -\alpha + j\beta$$

$$s_2 = -\alpha - j\beta$$

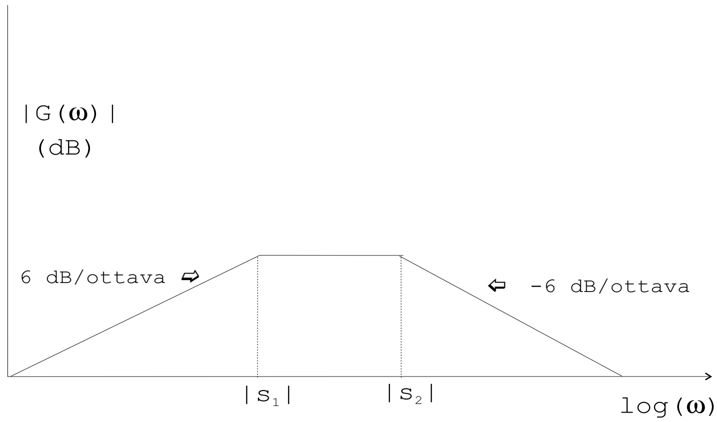

Figura 5.15:

e scriviamo la funzione G(s):

$$G(s) \;=\; \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \;=\; \frac{1}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

Sostituendo ad s l'espressione $j\omega$ otteniamo:

$$|G|^2 \;=\; \frac{1}{[\alpha^2+(\omega-\beta)^2]\,[\alpha^2+(\omega+\beta)^2]}$$

Calcoliamo ora il valore di ω in corrispondenza a cui $|G|$ è massimo. Essendo $|G|$ positivo, questo sarà anche il valore che rende massimo $|G|^2$, che sarà dato dalla soluzione dell'equazione:

$$\frac{d|G|^2}{dt} \;=\; 0$$

ovvero dell'equazione:

$$2(\omega-\beta)\left[\alpha^2+(\omega+\beta)^2\right] \;+\; 2(\omega+\beta)\left[\alpha^2+(\omega-\beta)^2\right] \;=\; 0$$

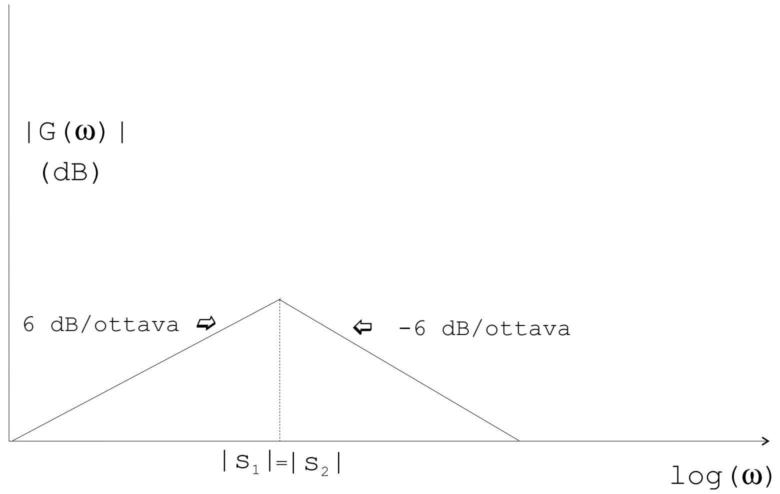

Figura 5.16:

Questa si riduce facilmente a:

$$4\omega\alpha^2 + 2(\omega^2 - \beta^2)\cdot 2\omega \;=\; 0$$

la cui soluzione è:

$$\omega^2 \;=\; \beta^2 - \alpha^2$$

Troviamo cioè che la frequenza ω in corrispondenza alla quale la $|G|$ ha un massimo è data da:

$$\omega_{max} \;=\; \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

Espressa in termini delle variabili ω_0 e Q_0, questa si scrive:

$$\omega_{max}^2 \;=\; \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right) \tag{5.11}$$

Il valore che la funzione $|G|$ acquista in tale punto può esser facilmente ottenuto come segue. Scriviamo la G(s) nella forma:

$$G(s) \;=\; \frac{A_0\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2} \tag{5.12}$$

dove A_0 è il valore di G(s) per s=0. Poniamo $s = j\omega$ e calcoliamo il modulo di G.

$$G(j\omega) \;=\; \frac{A_0\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q_0}\omega} \tag{5.13}$$

da cui:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_{max}} \;=\; \frac{A_0Q_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}} \tag{5.14}$$

L'andamento di questa funzione da Q_0 è mostrato nella figura (5.19).

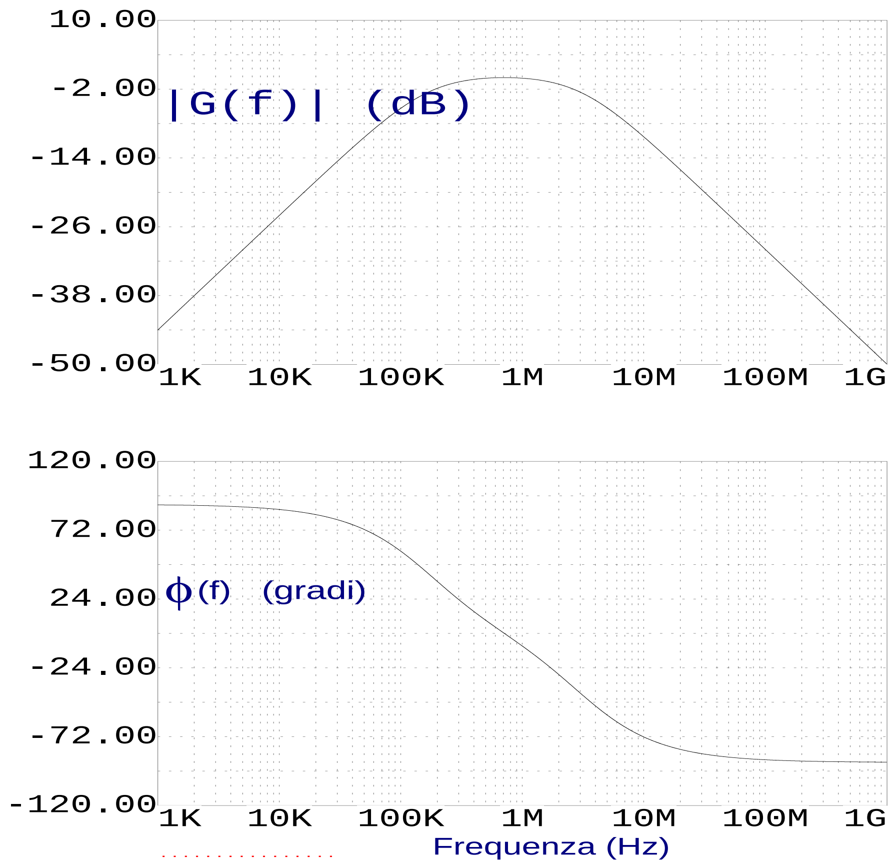

Figura 5.17:

Notiamo che, come si vede dall'equazione (5.11) un massimo nella risposta può aversi solo per:

$$\frac{1}{2Q_0^2} < 1$$

cioè per:

$$Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Per $Q_0 = 0.707$ troviamo:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_{max}} = A_0$$

Riportiamo nel grafico di figura (5.20) il diagramma di Bode per il modulo della G(s) dato dall'equazione (5.12).

Vediamo da questi risultati, ed in particolare dalle equazioni (5.11) e (5.12), che la curva di risposta $|G(j\omega)|$ ha un massimo tanto più accentuato quanto più è elevato il Q_0 del circuito. La posizione del massimo si sposta, come mostrato dalla (5.11), al variare di Q_0. ω_{max} aumenta all'aumentare di Q_0 e diviene uguale ad ω_0 per $Q_0 \to \infty$.

Poichè ω_0 è la distanza dei poli dall'origine e $-\frac{\omega_0}{2Q_0}$ è l'ascissa comune dei poli, vediamo che l'angolo che abbiamo indicato con γ aumenta all'aumentare di Q_0.

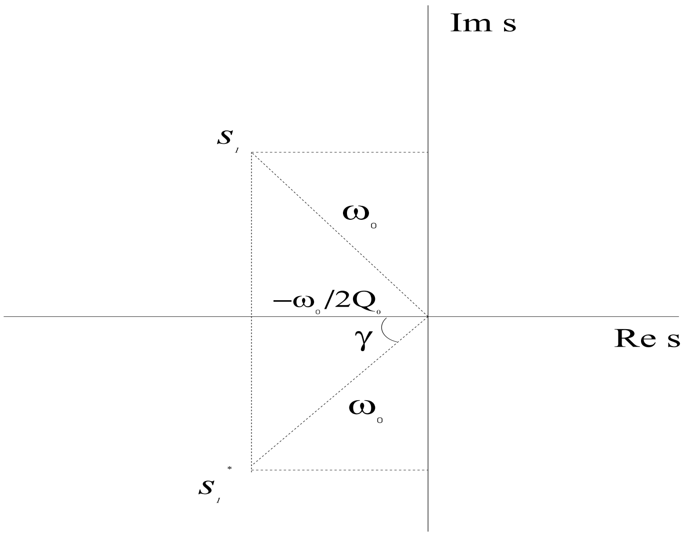

Figura 5.18:

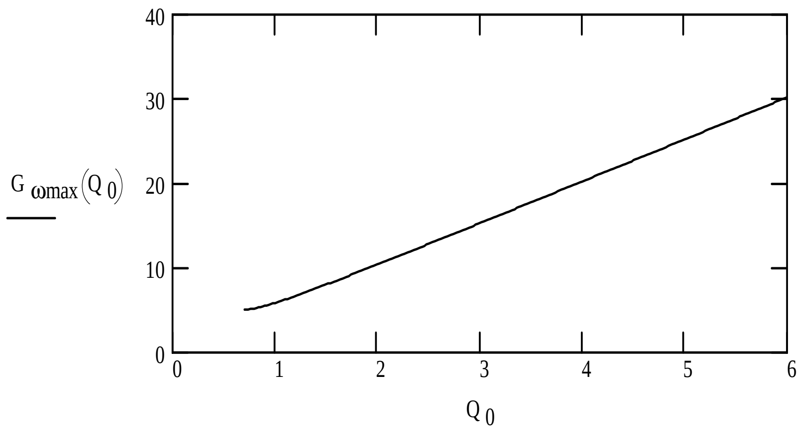

Figura 5.19:

Vediamo cioè che la curva che descrive la risposta del sistema acquista in prossimità di ω_0 un picco che è tanto più accentuato quanto più i poli sono vicini all'asse immaginario e lontani da quello reale.

5.5 Diagrammi di Nyquist

Se si riporta in un diagramma cartesiano, in ascissa la parte reale della funzione di trasferimento $G(j\omega)$ ed in ordinata la parte immaginaria, si ottiene quello che è noto come *diagramma di Nyquist* della $G(j\omega)$. Al variare di ω il punto rappresentativo del sistema si muove lungo una curva. Il vettore che unisce l'origine delle coordinate con il generico punto rappresenta la funzione di trasferimento in corrispondenza al valore di ω relativo al determinato punto. Ad esempio, la figura (5.21) mostra il diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento caratteristica di un circuito

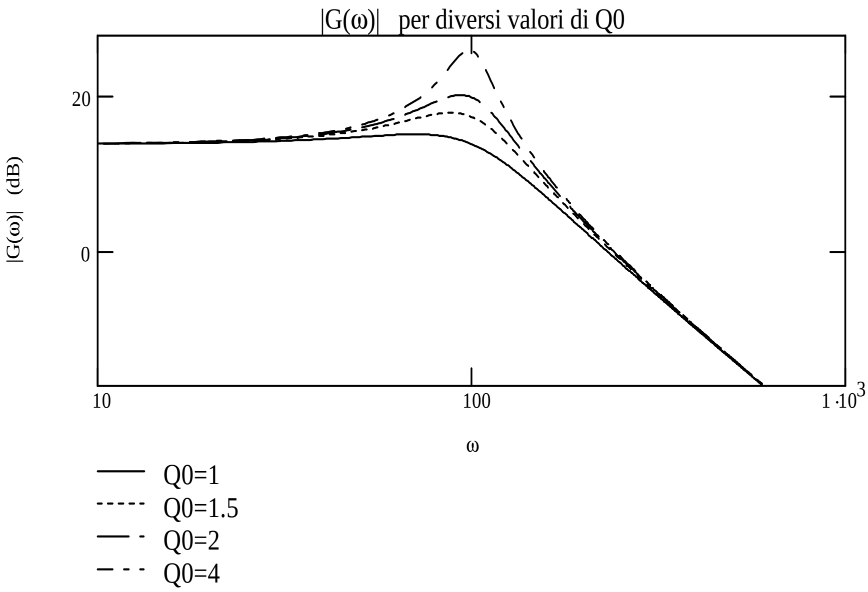

Figura 5.20:

passa-basso:

$$G(j\omega) \;=\; \frac{1/\tau}{j\omega - 1/\tau}$$

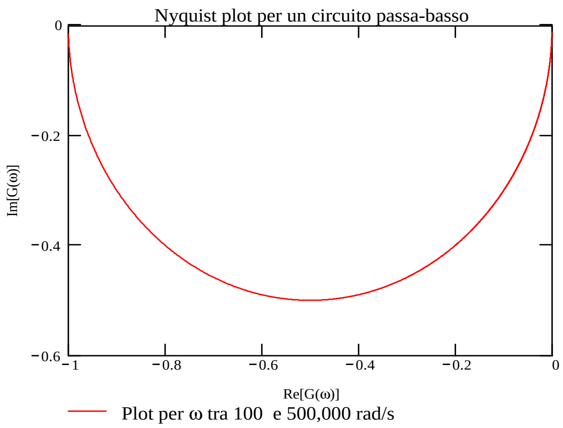

Figura 5.21:

Un'altro esempio è quello della funzione di trasferimento con un polo ed uno zero non nell'origine. Il relativo diagramma di Nyquist è mostrato in figura (5.22).

L'espressione analitica della funzione di trasferimento in quest'esempio è data da:

$$G(\omega) \;=\; \frac{1 + j\omega\tau_2}{1 + j\omega\tau_1}$$

dove $\tau_1 = 3.979 \cdot 10^{-6}$ e $\tau_2 = 1.592 \cdot 10^{-4}$ ed ω varia tra 100 e 400,000 rad/s.

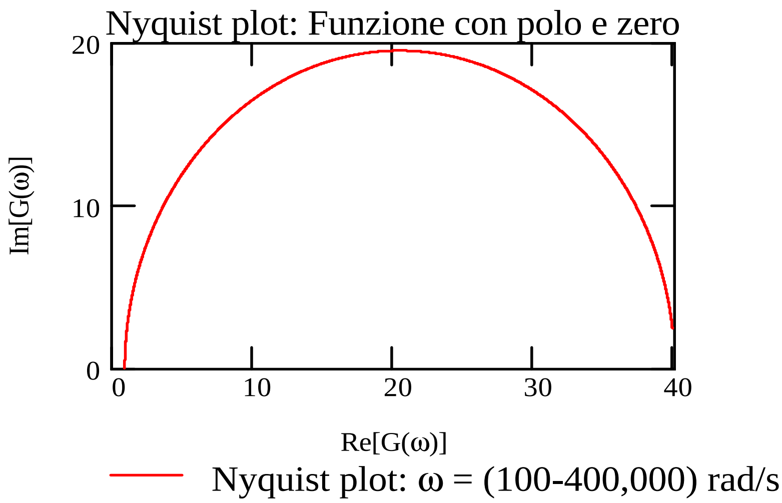

Figura 5.22:

Un ulteriore esempio è quello di una funzione di trasferimento con uno zero non nell'origine e due poli:

$$G(\omega) = \frac{0.001 - j\omega\tau_2}{\omega(0.001 - j\omega\tau_1)}$$

con τ_1 e τ_2 uguali a quelli dell'esempio precedente.

Il relativo diagramma di Nyquist è mostrato in figura (5.23).

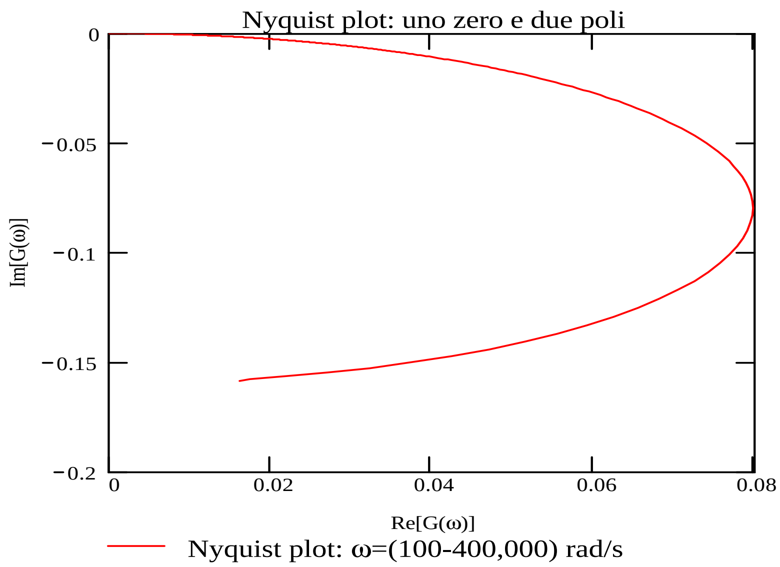

Figura 5.23: