

# Capitolo 8

## Il modello di Ebers-Moll per i transistor bipolari

### 8.1 Basi del modello

Il modello a parametri  $h$  del transistor, o equivalentemente il modello a  $\pi$ , sono utilizzabili per calcolare i parametri (guadagno in corrente, resistenza d'ingresso etc.) di amplificatori a transistor. Nella più gran parte dei casi, in tali applicazioni, i transistor lavorano in zona attiva. Un modello che schematizza il funzionamento del transistor in una qualsivoglia delle zone di funzionamento (zona attiva diretta, attiva inversa, saturazione, interdizione) è quello proposto da Ebers e Moll nel 1954, successivamente perfezionato da altri ed ampiamente adoperato per simulare al computer il comportamento del transistor <sup>1</sup>

Le equazioni di Ebers-Moll hanno inoltre il vantaggio di esser "costruite" a partire dai principi fisici su cui è basato il comportamento del transistor. Se infatti indichiamo le correnti e tensioni nel transistor, facendo uso della notazione di figura 8.1, e ricordiamo che la corrente di collettore  $I_C$  è una frazione  $\alpha$  della corrente di emettitore:  $I_C = \alpha_D I_E$  avremo reso conto, approssimativamente, del funzionamento del transistor in zona attiva. Si noti che abbiamo chiamato  $\alpha_D$  il parametro  $\alpha$ , per indicare che intendiamo riferirci al funzionamento "diretto" (cioè nella normale zona attiva, con  $V_{BE} > 0$  e  $V_{BC} < 0$ ).

Ricordiamo ora che, in zona attiva contribuisce alla corrente di collettore anche la corrente inversa di saturazione  $I_{CO}$ , dovuta alle cariche minoritarie (positive in un transistor npn) presenti nel collettore, accelerate verso la base (e poi l'emettitore) dalla polarizzazione inversa della giunzione base-collettore. A rigore dovremo quindi esprimere la corrente di collettore come:

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

Risulta più conveniente esprimere il secondo termine a secondo membro, nella forma completa che caratterizza un diodo (la giunzione base-collettore) polarizzato inversamente:

$$I_{CO} \rightarrow -I_{CO} \left( e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right)$$

che, nella zona di funzionamento attualmente in esame ( $V_{BC} < 0$  e  $|V_{BC}| \gg V_T$ ) coincide con  $+I_{CO}$ .

---

<sup>1</sup>Questo è adoperato ad esempio nel programma di simulazione "SPICE"; dove peraltro è possibile scegliere modelli più avanzati, quali quello di Gummel-Poon o altri.

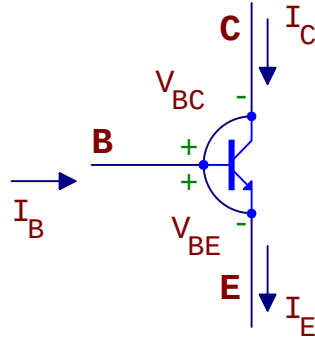


Figura 8.1:

Il vantaggio di esprimere in tal modo il secondo termine è nel fatto che tale espressione è più generale, renderà conto del funzionamento del transistor anche se la giunzione base-collettore è polarizzata direttamente. Scriveremo quindi:

$$I_C = \alpha_D I_E - I_{CO} \left( e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \quad (8.1)$$

Ammettiamo ora che sia la giunzione base-emittitore che quella base-collettore siano polarizzate inversamente. L'espressione precedente (scritta per  $V_{BC}$  negativo, e  $|V_{BC}| \gg V_T$ ):

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

deve fornire, essendo con tali polarizzazioni il transistor interdetto, valori pressochè nulli per le correnti  $I_C$  ed  $I_E$ . Ciò è possibile se, accanto all'equazione 8.1, introduciamo una seconda equazione che fornisca  $I_E$  in funzione di  $V_{BC}$ ,  $V_{BE}$  ed  $I_C$ . Il punto di partenza per costruire tale equazione è l'equazione che lega la corrente nel diodo base-emettitore alla differenza di potenziale  $V_{BE}$ :

$$I_E = I_{EO} \left( e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right)$$

Se il diodo è polarizzato direttamente ( $V_{BE} > V_\gamma$ ), questa fornirà correttamente il valore della corrente  $I_E$  da adoperare nella 8.1.

Se il diodo è polarizzato inversamente avremo:  $I_E = -I_{EO}$ , cioè un contributo molto piccolo alla corrente. Notiamo tuttavia che, con  $V_{BE}$  negativo, un ulteriore contributo alla corrente  $I_E$  può venire se la giunzione base-collettore è polarizzata *direttamente*. Infatti, in tali condizioni, il collettore immetterebbe elettroni nella base e questi, o meglio una frazione  $\alpha_R$  di questi, passerebbero poi nell'emettitore<sup>2</sup>.

In termini della corrente, potremo dire che una frazione  $\alpha_R$  della corrente di collettore, passa nell'emettitore:

$$I_E = \alpha_R I_C$$

---

<sup>2</sup>Il parametro  $\alpha_R$  è l'analogo del parametro  $\alpha_D$  che compare quando il transistor lavora in zona attiva diretta. Nelle condizioni ora in esame diremo che il transistor lavora in zona attiva inversa (la sottoscritta R sta per "reverse")

a questa va poi *sommata* la corrente ( $I_{EO}$ ) inversa di saturazione che, con  $V_{BE} < 0$ , fluisce tra emettitore a base:

$$I_E = \alpha_R I_C - I_{EO}$$

Infine, riscriviamo il secondo termine a secondo membro nel modo generale appropriato per un diodo, ottenendo:

$$I_E = \alpha_R I_C + I_{EO} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) \quad (8.2)$$

Le 8.1 e 8.2 sono le equazioni di Ebers-Moll. Il primo dei termini a secondo membro di ciascuna delle due equazioni rappresenta la "componente di transistor" della relativa corrente; il secondo la "componente di diodo". Le due equazioni rendono conto del funzionamento del transistor in una qualsivoglia delle zone di funzionamento.

È facile verificare come da queste equazioni sia possibile ricavare le correnti in funzione delle tensioni:

$$I_E = \frac{I_{EO}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) - \frac{\alpha_R I_{CO}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BC}/V_T} - 1) \quad (8.3)$$

$$I_C = \frac{\alpha_D I_{EO}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) - \frac{I_{CO}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BC}/V_T} - 1) \quad (8.4)$$

Possiamo anche ricavare le tensioni ai capi delle giunzioni in funzione delle correnti:

$$V_{BE} = V_T \ln \left[ 1 - \frac{I_E - \alpha_R I_C}{I_{EO}} \right] \quad (8.5)$$

$$V_{BC} = V_T \ln \left[ 1 - \frac{I_C - \alpha_D I_E}{I_{CO}} \right] \quad (8.6)$$

I parametri fisici  $\alpha_D$ ,  $\alpha_R$ ,  $I_{EO}$ ,  $I_{CO}$  non sono indipendenti; essi sono legati tra loro da:

$$\alpha_D I_{EO} = \alpha_R I_{CO}$$

Abbiamo già incontrato il parametro  $\beta$  del transistor, pari al rapporto tra  $I_C$  ed  $I_B$  in zona attiva. Anche ora possiamo definire  $\beta = h_{FE}$  come:

$$h_{FE} = \frac{I_C}{I_B}$$

e, per la componente variabile:

$$h_{fe} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$$

Entrambi questi parametri possono esser espressi in funzione dei coefficienti presenti nelle equazioni di Ebers-Moll. Infatti, in zona attiva, con  $V_{BC} < 0$  e  $|V_{BC}| \gg V_T$ , la 8.1 diventa:

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

e, poichè  $I_E = I_B + I_C$ :

$$I_C = \alpha_D I_B + \alpha_D I_C + I_{CO}$$

da cui:

$$I_C = \frac{\alpha_D}{1 - \alpha_D} I_B + \frac{I_{CO}}{1 - \alpha_D} = h_{FE} I_B + \frac{I_{CO}}{1 - \alpha_D}$$

e, per  $h_{fe}$ , essendo in genere  $I_{CO}$  piccolo:

$$h_{fe} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \approx h_{FE} \approx \frac{\alpha_D}{1 - \alpha_D}$$

Ad esempio, per  $\alpha_D = 0.98$  si ha  $h_{FE} \approx h_{fe} \approx 50$ .

Quando il transistor funziona in modo inverso, il ruolo dell'emettitore e del collettore vengono ad essere scambiati, ed  $I_C$  sostituisce  $I_E$  (e viceversa). Occorrerà ora far uso dell'equazione 8.2:

$$I_E = \alpha_R I_C - I_{E0}$$

dove  $I_C = I_E - I_B$ , per cui:

$$I_E = \alpha_R I_E - \alpha_R I_B - I_{E0}$$

e quindi:

$$I_E = -\frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R} I_B - \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_R}$$

per cui:

$$h_{FC} \equiv -\frac{I_E}{I_B} = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

Si noti che ora  $I_E$  è negativo, rispetto alla convenzione adottata in precedenza per i versi delle correnti.

In genere  $\alpha_R$  è molto diverso da  $\alpha_D$ . Valori tipici sono:

$$\alpha_R \approx 0.01 \div 0.2 \Rightarrow h_{FC} \approx 0.01 \div 0.25$$

Cioè il guadagno in corrente nel modo attivo-inverso è molto minore di quello relativo al modo attivo-diretto. Il transistor, a causa dei dettagli costruttivi (drogaggio di base, emettitore e collettore; dimensioni fisiche delle giunzioni) non è simmetrico per scambio emettitore-collettore.

## 8.2 Il transistor in interdizione

Se la tensione tra base ed emettitore non è sufficientemente elevata da polarizzare direttamente la relativa giunzione, la corrente di emettitore si riduce a zero. Se inoltre anche la giunzione di collettore è polarizzata inversamente, con  $V_{BC} \gg V_T$ , la  $I_E$  può esser ottenuta dall'equazione 8.3:

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_D \alpha_R} \left( e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) + \frac{\alpha_R I_{C0}}{1 - \alpha_D \alpha_R}$$

e, facendo uso della relazione:

$$\alpha_D I_{E0} = \alpha_R I_{C0}$$

come:

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_D \alpha_R} \left( e^{V_{BE}/V_T} + \alpha_D - 1 \right)$$

dove  $\alpha_D \approx 1$ , per cui:

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_R} e^{V_{BE}/V_T}$$

che, con  $\alpha_R$  nel range di valori (0.01 0.2), ci dà:

$$I_E \cong (1 \div 1.25) I_{E0} e^{V_{BE}/V_T}$$

Come nel caso di un diodo,  $I_E$  diverrà apprezzabile solo per  $V_{BE} \geq 0.6 \text{ V}$ .

### 8.3 Il transistor in saturazione

Consideriamo il montaggio di figura 8.2, con il transistor che lavora in zona attiva.

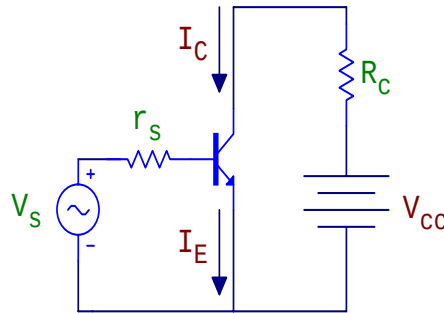


Figura 8.2:

In tali condizioni la corrente di base sarà tale che la corrispondente corrente di collettore  $I_C$  provoca in  $R_L$  una caduta di potenziale molto minore di  $V_{CC}$ . In tali condizioni, mentre la giunzione emettitore-base è polarizzata direttamente, quella base-collettore è polarizzata inversamente.

Se si aumenta ora la corrente di base, si avrà un conseguente aumento della corrente di collettore, un aumento della caduta di potenziale in  $R_L$  ed in definitiva un minor valore di  $V_C$ , e quindi di  $V_{CE}$ . Aumentando ulteriormente la corrente di base si potrà raggiungere un punto tale che la differenza di potenziale base-collettore cambia segno, cioè la giunzione viene ad essere polarizzata *direttamente* (cioè nel verso tale da sfavorire il flusso delle cariche di minoranza elettroni presenti nella base, verso il collettore).

Notiamo che la giunzione base-emettitore continua ad iniettare elettroni nella base (cioè corrente nell'emettitore), ma questi elettroni non possono più esser raccolti dal circuito di collettore, a causa della polarizzazione della giunzione base-collettore. In tali condizioni si dice che il transistor è entrato in *saturazione*. Avremo una elevata corrente di base, una elevata corrente di emettitore ma una piccola corrente

di collettore. Il rapporto  $I_C/I_B$  che è uguale ad una costante ( $h_{FE}$ ) in zona attiva, diviene ora molto minore di  $h_{FE}$ . Possiamo allora scegliere quale parametro che misura il "grado di saturazione", il rapporto:

$$\sigma = \frac{I_C}{h_{FE}I_B}$$

che deve essere uguale ad 1 in zona attiva diretta.

Poichè la saturazione implica una polarizzazione diretta (o comunque non inversa) della giunzione base-collettore, ci si deve aspettare un legame tra  $\sigma$  e  $V_{BC}$  e, di conseguenza, tra  $\sigma$  e  $V_{CE}$ .

Scriviamo la relazione tra  $V_{CE}$ ,  $V_{BE}$  e  $V_{BC}$ :

$$V_{CE} = V_{BE} - V_{BC}$$

Dalle equazioni 8.5 e 8.6, trascurando il termine costante (1) (poichè per entrambe le giunzioni è  $V_D \gg V_T$ ), si ottiene:

$$V_{BE} - V_{BC} = V_T \ln \left( \frac{I_E - \alpha_R I_C}{I_{E0}} \cdot \frac{I_{C0}}{I_C - \alpha_D I_E} \right)$$

Poichè inoltre è:

$$\frac{I_{C0}}{I_{E0}} = \frac{\alpha_D}{\alpha_R}$$

nonchè:  $I_C = I_E - I_B$ , l'equazione precedente, dopo alcuni semplici passaggi algebrici diventa:

$$V_{CE} = V_{BE} - V_{BC} = V_T \ln \frac{I_E/h_{FC} + I_B}{I_B - I_C/h_{FE}}$$

con:

$$h_{FC} = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

$$h_{FE} = \frac{\alpha_D}{1 - \alpha_D}$$

e, dividendo numeratore e denominatore per  $I_B$ :

$$\begin{aligned} V_{CE} &= V_T \ln \frac{1 + \frac{I_E}{h_{FC}I_B}}{1 - \frac{I_C}{h_{FE}I_B}} = V_T \ln \frac{1 + \frac{I_C}{h_{FC}I_B} + \frac{1}{h_{FC}}}{1 - \sigma} = \\ &= V_T \ln \frac{1 + \frac{I_C}{h_{FE}I_B} \cdot \frac{h_{FE}}{h_{FC}} + \frac{1}{h_{FC}}}{1 - \sigma} = V_T \ln \frac{\sigma \cdot \frac{h_{FE}}{h_{FC}} + \frac{1+h_{FC}}{h_{FC}}}{1 - \sigma} \end{aligned}$$

L'andamento di questa funzione della variabile  $\sigma$  è mostrato in figura 8.3.

Esaminiamo alcuni punti caratteristici di tale funzione.

(1)  $\sigma$  si annulla per:

$$V_{CE} = V_T \ln \left( \frac{1 + h_{FC}}{h_{FC}} \right)$$

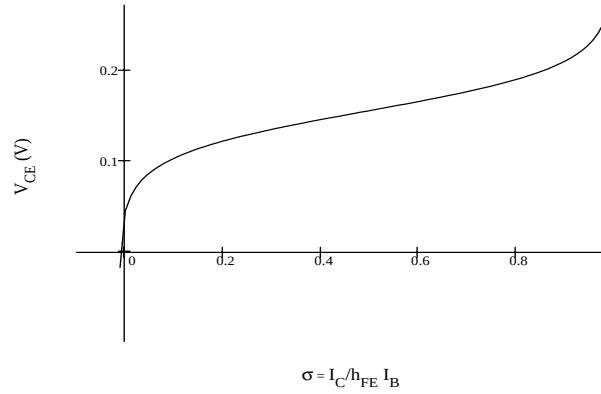


Figura 8.3:

con:

$$h_{FC} = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

per cui:  $V_{CE} = V_T \ln(1/\alpha_R)$  che, con valori tipici di

$$V_T = 25 \text{ mV} , \quad \alpha_R = 0.2$$

vale:

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1}{\alpha_R} \approx 25 \ln 5 \text{ mV} = 40 \text{ mV}$$

cioè la corrente di collettore è praticamente nulla per  $V_{CE} \approx 40 \text{ mV}$ .

(2)  $\sigma$  è uguale ad 1 per:

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1}{h_{FC}} \frac{1 + h_{FE} + h_{FC}}{1 - \sigma} \rightarrow \infty$$

In pratica  $\sigma$  sarà prossimo ad 1 per valori di  $V_{CE}$  di  $5 \div 10 \text{ V}$ .

(3) Esaminiamo infine la zona di saturazione; quella in cui  $V_{CE} \approx 0$ . Questa è molto importante nei circuiti digitali, dove un basso valore di  $V_{CE}$  è essenziale per una buona separazione del livello logico "basso" (transistor in saturazione) dal livello logico "alto" (transistor interdetti).

Vediamo che  $V_{CE}$  si annulla per:

$$\frac{1 + h_{FC}}{h_{FC}} + \frac{h_{FE}}{h_{FC}} \sigma = 1 - \sigma$$

cioè:

$$\sigma \left( 1 + \frac{h_{FE}}{h_{FC}} \right) = - \frac{1}{h_{FC}}$$

cioè:

$$\sigma \equiv \frac{I_C}{h_{FE} I_B} = -\frac{1}{h_{FE} + h_{FC}}$$

da cui:

$$\frac{I_C}{I_B} = -\frac{1}{1 + \frac{h_{FC}}{h_{FE}}}$$

che, per  $h_{FE} = 100$  ed  $h_{FC} = 0.25$ , ci dà:

$$\frac{I_C}{I_B} \approx -0.997$$

Il punto d'inizio della saturazione può essere considerato quello in cui  $\sigma \leq 0.9$ .  
A questo corrisponde un valore di  $V_{CE}^{sat}$  dato da:

$$V_{CE}^{sat} = V_T \ln \left[ 10 \left( \frac{1 + h_{FC}}{h_{FE}} + 0.9 \frac{h_{FE}}{h_{FC}} \right) \right]$$

dove è  $h_{FE} \gg 1 + h_{FC}$ , per cui questa è approssimativamente:

$$V_{CE}^{sat} = V_T \ln \left( 9 \frac{h_{FE}}{h_{FC}} \right) = 285 \text{ mV}$$

dove abbiamo ammesso che sia  $h_{FE} = 100$  ed  $h_{FC} = 0.01$ .

In pratica, se si vuole utilizzare un transistor che operi in saturazione con il minor valore possibile di  $V_{CE}$ , si mantiene fisso  $I_C$  (ad esempio, nel circuito di figura 8.4,  $I_C = V_{CC}/R_L$ ) e si cerca di ottenere il minimo valore possibile di  $V_{CE}$  con un aumento di  $I_B$ .

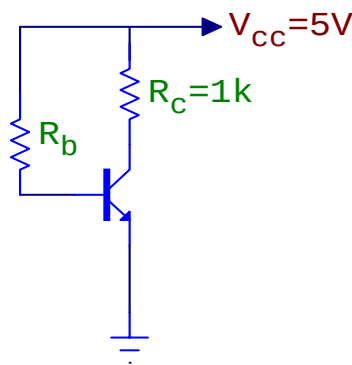


Figura 8.4:

Se ad esempio volessimo un valore di  $V_{CE} = 0.2 \text{ V}$  avremmo:

$$I_C = \frac{5 - 0.2}{1k} = 4.8 \text{ mA}$$



$I_B$  dovrà allora esser maggiore di  $4.8/h_{FE}$  che, con  $h_{FE} = 50$  è:

$$I_B > 0.096 \text{ mA}$$

Possiamo, per precauzione, scegliere un valore doppio di questo:  $I_B = 0.192 \text{ mA} \approx 0.2 \text{ mA}$ .  $R_b$  dovrà allora valere:

$$R_b = \frac{5 - V_{BE}^{sat}}{0.2} (k\Omega)$$

dove  $V_{BE}^{sat} \approx 0.8 \text{ V}$ . Ne segue:

$$R_b = \frac{5 - 0.8}{0.2} = 21 \text{ k}\Omega$$

Spesso le case costruttrici forniscono, per un dato transistor, un grafico di  $V_{CE}^{sat}$  in funzione di  $\sigma$  o di  $I_C/I_B$ .

