

Capitolo 19

Il rumore nei circuiti elettronici

19.1 Introduzione

Anche in assenza di segnale applicato in ingresso, una tensione o corrente di rumore è sempre presente all'uscita di un amplificatore. Tale segnale può aver origine nei componenti dell'amplificatore medesimo (transistori, FET, resistenze, diodi etc.) o può avere origini esterne (disturbi di natura elettromagnetica nell'ambiente, insufficiente filtraggio della tensione di alimentazione ottenuta dalla rete elettrica, rumore già presente all'ingresso dell'amplificatore).

Se si osserva il segnale all'uscita dell'amplificatore con un oscilloscopio, si vedrà una successione di impulsi di forma irregolare, positivi e negativi, come e' possibile vedere in figura (19.1).

L'altezza degli impulsi è spesso molto piccola e la loro distribuzione nel tempo è nella piu' gran parte dei casi, casuale (non lo sarà ovviamente se il rumore ha origine nella rete elettrica a 220 V, in emissioni elettromagnetiche da parte di motori elettrici nell'ambiente etc).

Ci limiteremo qui allo studio del rumore di tipo casuale, che ha prevalentemente origine nei componenti del circuito o negli elementi che lo precedono.

Lo studio del rumore è particolarmente importante in quelle applicazioni in cui è necessario amplificare dei segnali la cui ampiezza è molto piccola. In tali circostanze, l'ampiezza del rumore può divenire una frazione apprezzabile di quella del segnale e diviene importante adottare accorgimenti particolari per amplificare il segnale e non il rumore. È necessario, a tale scopo, conoscere le caratteristiche del rumore, quali ad esempio il suo spettro di frequenza.

I tre tipi principali di rumore sono:

- il rumore termico
- il rumore di tipo shot
- il rumore $1/f$

Nei paragrafi che seguono esamineremo le caratteristiche principali di tali tipi di rumore, cominciando con una breve descrizione dei metodi adoperati per caratterizzarlo.

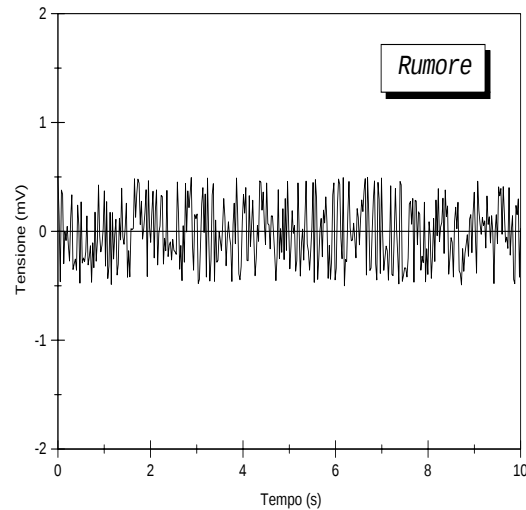


Figura 19.1:

19.2 Processi stocastici stazionari

Ci occuperemo qui dei processi stocastici che si ripetono nel tempo e che possono essere considerati, su lunghi intervalli di tempo, stazionari. Nella più gran parte dei casi essi hanno origine in fluttuazioni che hanno luogo a livello microscopico. In tal caso risulta opportuno affrontare il problema studiando la distribuzione di tali processi nel tempo. Dal punto di vista sperimentale é invece comodo effettuare misure nel dominio della frequenza. Ci occuperemo ora dei metodi adoperati per la caratterizzazione nel dominio temporale. Si vedrá successivamente come le due descrizioni siano legate l'una all'altra da utili relazioni matematiche.

19.2.1 Descrizione nel dominio del tempo

Distribuzioni

Consideriamo un sistema fisico soggetto a fluttuazioni statistiche casuali. Sia $x(t)$ la grandezza della variabile che fluttua, all'istante t , relativamente al sistema in esame. Tale variabile potrebbe essere una tensione, una corrente, una carica, un numero di fotoni etc. Per caratterizzare le proprietà del sistema si introducono delle opportune medie effettuate su di esso. Più dettagliatamente, si supponga di considerare un gran numero N di sistemi identici a quello sotto esame, ciascuno dei quali sia soggetto alle medesime fluttuazioni, ma *indipendentemente dagli altri*. Fissato un certo istante t_1 , sia $x_i(t_1)$ il valore che la variabile relativa all' i -mo sistema ha in tale istante. Sia ora ΔN il numero dei sistemi per i quali la variabile ha, nell'istante considerato, un valore compreso tra x e $x + \Delta x$. Per $N \rightarrow \infty$ si prenda ora il rapporto $\Delta N/N$. Tale rapporto esprime la probabilità che il sistema abbia il valore della variabile x compreso nell'intervallo suddetto, al tempo t_1 . Chiameremo tale probabilità ΔP . Il rapporto tra tale probabilità e l'ampiezza Δx dell'intervallo scelto per la variabile x

è, per $\Delta x \rightarrow 0$, la funzione *densità di probabilità*:

$$\frac{dP}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x, t_1)$$

La probabilità che il sistema abbia, all'istante t_1 , un valore della variabile compreso in un intervallino dx è esprimibile in funzione della $f(x, t)$:

$$dP = f(x, t)dx$$

Se la funzione $f(x, t)$ è indipendente da t , il sistema si dice *stazionario*. La più gran parte dei processi di rumore che si incontrano sono stazionari.

Nota la densità di probabilità, è facile calcolare valori medi di variabili che siano funzioni della variabile casuale x . Le medie che si ottengono sono *medie sull'insieme dei sistemi identici* considerati. Ad esempio, si possono calcolare i *momenti*:

$$\overline{x^m} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx$$

Data una generica funzione $g(x)$ della variabile casuale x , il suo valor medio sull'insieme è:

$$\overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Se $f(x)$ è simmetrica ($f(x)=f(-x)$) ed x può variare tra valori uguali ed opposti ($-x_0$, $+x_0$) allora il valor medio di tutte le potenze dispari di x sarà nullo. Se il valor medio di x (cioè il momento di ordine 1) è diverso da zero, si può introdurre la grandezza:

$$\Delta x = (x - \bar{x})$$

il cui valor medio è nullo.

Si definisce la *varianza* di x come:

$$\text{var}(x) \equiv \overline{\Delta x^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Abbiamo fatto implicitamente l'ipotesi che la funzione $f(x)$ fosse normalizzata ad 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Se questa condizione non fosse soddisfatta, sarebbe comunque possibile definire una nuova funzione, legata alla $f(x)$ da una semplice relazione di proporzionalità, normalizzata ad 1.

Abbiamo finora effettuato l'operazione di media ammettendo di disporre di un numero (teoricamente infinito) di sistemi *identici a quello che si sta studiando* e soggetti a fluttuazioni indipendenti. Questo è chiaramente un artificio di calcolo. Nella realtà disponiamo di un solo sistema soggetto a fluttuazioni che si ripetono nel tempo. Ammettiamo di studiare le fluttuazioni del sistema sull'intervallo di tempo $(0-T)$. Sia $x(t)$ la variabile che caratterizza le fluttuazioni del sistema e sia $g(x)$ una funzione della x . Possiamo definire il valor medio, sull'intervallo di tempo T , della $g(x)$:

$$\langle g(x) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(x(t)) dt$$

Se questa media temporale è uguale alla media effettuata sull'insieme, cioè a $\overline{g(x)}$, allora il processo di rumore in esame si dice *ergodico*. La più gran parte dei processi di rumore sono ergodici.

Le considerazioni precedenti sono facilmente estendibili al caso di più variabili. Se infatti $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono variabili stocastiche indipendenti possiamo, analogamente a quanto fatto nel caso di una singola variabile, definire la probabilità che la variabile x_1 abbia un valore compreso nell'intervallo $(x_1, x_1 + dx_1)$ e la variabile x_2 abbia un valore compreso nell'intervallo $(x_2, x_2 + dx_2)$:

$$dP = f(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2$$

Se tale funzione non dipende dal tempo, il sistema si dice *stazionario*. In modo analogo a quello seguito nel caso della funzione $f(x)$, possiamo definire i valori medi di funzioni delle variabili x_1, x_2 . Ad esempio, i momenti saranno:

$$\overline{x_1^n x_2^m} = \int \int x_1^n x_2^m f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Particolarmente importante è la *correlazione*:

$$\overline{x_1 x_2} = \int \int x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

che è uguale a zero se le due variabili non sono correlate. Si definisce poi il *coefficiente di correlazione*:

$$C = \frac{\overline{x_1 x_2}}{\sqrt{\overline{x_1^2} \overline{x_2^2}}}$$

Si può facilmente vedere che $-1 \leq C \leq 1$. Basta far uso del fatto che l'espressione:

$$\overline{(ax_1 + bx_2)^2} \geq 0$$

per tutti i valori di a e b.

Il coefficiente di correlazione vale 0 se le variabili sono non correlate e ± 1 se la correlazione è massima. Se il modulo di C è minore di 1 (ma non nullo) si dice che la correlazione è parziale.

Autocorrelazione

Se nel calcolo della correlazione definita sopra, facciamo uso di $x(t)$ al posto di x_1 e di $x(t+\tau)$ al posto di x_2 , otteniamo quella che è nota come *funzione di autocorrelazione*

$$\Phi(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} \quad (19.1)$$

La funzione di autocorrelazione fornisce una misura della durata temporale di una fluttuazione.

Essa ha le seguenti proprietà:

- $\Phi(\tau)$ è indipendente da t se $x(t)$ è stazionaria
- $\Phi(\tau)$ è o continua (anche se $x(t)$ è discontinua) o è una funzione δ di τ . Infatti, se $\Phi(\tau)$ non è una funzione $\delta(\tau)$, generiche discontinuità in $x(t)$ e in $x(t+\tau)$ avranno luogo ad istanti diversi nei diversi elementi dell'insieme. Ne segue che tali discontinuità daranno una media finale nulla

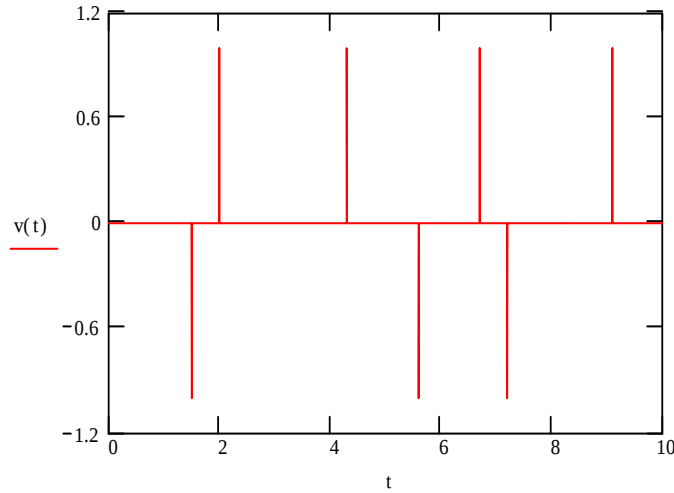


Figura 19.2:

- $\Phi(\tau) = \overline{x(t)^2}$ per $\tau = 0$, a meno che $\Phi(\tau)$ non sia una funzione δ
- $\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$ se $x(t)$ è stazionaria

L'ultima relazione scritta si può dimostrare come segue:

$$\Phi(\tau) \equiv \overline{x(t)x(t+\tau)} = \overline{x(u-\tau)x(u)} = \overline{(x(u)x(u-\tau))} = \overline{x(t)x(t-\tau)}$$

Dove il primo passaggio è ottenuto ponendo $u = (t + \tau)$, il secondo scambiando i due termini che figurano nella media ed il terzo sostituendo u con t , il che è consentito dal fatto che la $x(t)$ è stazionaria.

Ulteriori proprietà della funzione di autocorrelazione sono:

- Per $\tau \rightarrow \infty$, $\Phi(\tau)$ va a zero abbastanza rapidamente che l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) d\tau$$

esiste. Tale condizione può non esser verificata in alcuni casi.

- Dalla correlazione si può, se $\Phi(\tau)$ non è una funzione $\delta(\tau)$, ottenere il coefficiente di autocorrelazione normalizzato: $c(\tau) = \frac{\overline{x(t)x(t+\tau)}}{\overline{x^2}}$

Nel caso in cui $\Phi(\tau)$ è una funzione δ :

$$\Phi(\tau) = A \cdot \delta(\tau) \tag{19.2}$$

il rumore si dice *bianco*.

Consideriamo ora alcuni esempi di sorgenti di rumore. Consideriamo una sequenza di impulsi (funzioni δ) positivi e negativi, distribuiti in modo casuale nel tempo, come mostrato in figura (19.2); la probabilità che un impulso abbia luogo nell'intervallo di tempo $(t, t+dt)$ sia cioè costante ed indipendente da t . Sia inoltre A l'ampiezza degli impulsi, cioè l'integrale di ciascuna delle funzioni δ che li descrivono.

Sappiamo che in tal caso la distribuzione del numero n di impulsi in un tempo finito T è una Poissoniana. La funzione di autocorrelazione $\Phi(\tau)$ sarà allora nulla

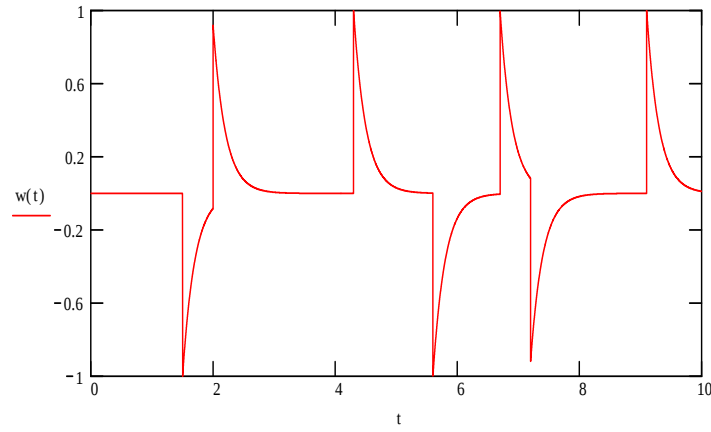


Figura 19.3:

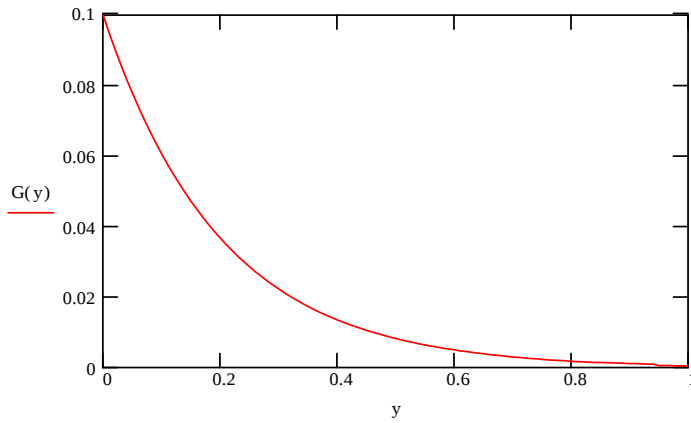


Figura 19.4:

per tutti i valori di τ , tranne che nel punto $\tau=0$. Più precisamente, essa sarà una funzione $\delta(0)$ di ampiezza pari ad A^2

Se ora tale sorgente di rumore viene applicata ad un filtro passa-basso avente una costante di tempo τ_1 , la funzione $w(t)$ all'uscita avrà la forma mostrata in figura (19.3) e la corrispondente funzione di autocorrelazione avrà la forma mostrata in figura (19.4).

Infatti la risposta di un circuito caratterizzato da una funzione di trasferimento $h(t)$ ad un segnale $v(t)$ è data dalla convoluzione:

$$v_o(t) = \int_0^t v(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (19.3)$$

la cui trasformata di Laplace è:

$$\tilde{v}_o(s) = \tilde{v}(s) \cdot \tilde{h}(s)$$

Per dimostrare tale relazione, L-trasformiamo entrambi i membri della (19.3):

$$\tilde{v}_o(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t v(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

Trasformiamo ora l'integrale interno, estendendo l'integrazione fino ad ∞ . Ciò può esser ottenuto moltiplicando l'integrando per la funzione gradino unitario $u(t - \tau)$, che è nulla per $\tau > t$:

$$\tilde{v}_o(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty v(t - \tau) h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty h(\tau) d\tau \int_0^\infty v(t - \tau) u(t - \tau) e^{-st} dt$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato l'ordine delle due integrazioni. L'integrale interno è nullo per $t < \tau$. Possiamo quindi limitare l'integrazione fra τ ed ∞ , dove è $u(t - \tau) = 1$. Ponendo $t' = t - \tau$ otteniamo:

$$\tilde{v}_o(s) = \int_0^\infty h(\tau) d\tau \int_0^\infty v(t') e^{-s(t'+\tau)} dt' = \int_0^\infty h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty v(t') e^{-st'} dt' = \tilde{h}(s) \cdot \tilde{v}(s)$$

che è quanto volevamo dimostrare. Nel nostro caso (circuitto passa-basso) la trasformata della funzione di trasferimento del circuito (cioè della $h(t)$) è:

$$\tilde{h}(s) = \frac{1}{s + a} \quad \text{con : } a = \frac{1}{\tau_1}$$

e la trasformata dell'eccitazione (funzione δ) è 1. Ne segue per la risposta:

$$v_o(t) = e^{-t/\tau_1}$$

Cioè la risposta è un esponenziale. Poichè gli impulsi hanno luogo ad istanti casuali, ed inoltre possono essere sia positivi che negativi, la correlazione tra impulsi diversi sarà nulla e l'unico contributo che rimane all'autocorrelazione è quella del generico impulso con se stesso, la cui forma è quella mostrata in figura (19.4).

Come si vede $\Phi(\tau)$ è diverso da zero per valori di $\tau \neq 0$.

Funzione di autocorrelazione all'uscita di un circuito

Il procedimento formale per trovare la funzione di autocorrelazione $\Phi_2(\tau)$ all'uscita di un circuito quando sia nota la funzione di autocorrelazione $\Phi_1(\tau)$ all'ingresso è il seguente. Sia $h(t)$ la funzione che esprime la risposta del circuito ad una funzione $\delta(t)$. Definiamo allora la funzione di autocorrelazione del circuito:

$$\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) * h(t + \lambda) dt \quad (19.4)$$

che esprime la 'memoria' del circuito al tempo λ . Si dimostra allora che $\Phi_2(\tau)$ è dato da:

$$\Phi_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) * \Phi_1(t - \lambda) d\lambda \quad (19.5)$$

19.2.2 Analisi nel dominio della frequenza

Lo sviluppo in serie di Fourier di una tensione di rumore $v(t)$ può essere effettuato su di un intervallo di tempo definito (0-T):

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(j\omega_n t) \quad (19.6)$$

dove:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot \exp(-j\omega_n t) dt \quad (19.7)$$

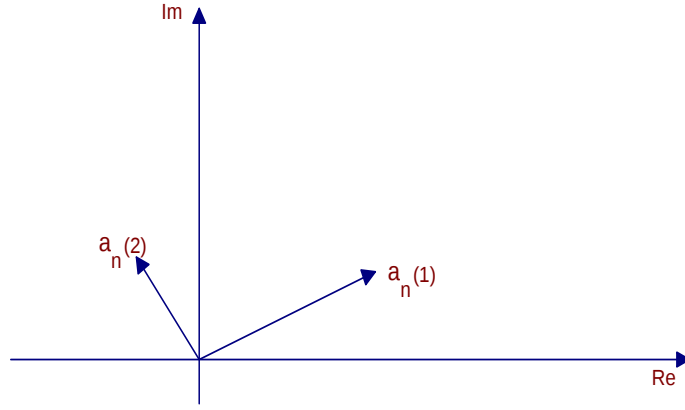


Figura 19.5:

ed:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm n$$

Notiamo che dalla (19.7), con $v(t)$ reale, segue che:

$$a_n^* = a_{-n}$$

I primi termini ($|n| \leq 2$) dello sviluppo (19.6) sono:

$$v(t) = a_{-2} \exp(-j4\pi \frac{t}{T}) + a_{-1} \exp(-j2\pi \frac{t}{T}) + a_0 + a_1 \exp(j2\pi \frac{t}{T}) + a_2 \exp(j4\pi \frac{t}{T})$$

Per un dato T , la componente di Fourier di pulsazione ω_n è:

$$v_n(t) = a_n \exp(j\omega_n t) + a_{-n} \exp(-j\omega_n t)$$

Applichiamo ora questo sviluppo separatamente a ciascun elemento di un insieme di sistemi identici, soggetti a fluttuazioni. Calcoliamo il valore quadratico medio di v_n sugli elementi dell'insieme:

$$\overline{v_n^2} = \overline{a_n^2} \exp(2j\omega_n t) + \overline{a_{-n}^2} \exp(-2j\omega_n t) + 2\overline{a_n a_n^*} \quad (19.8)$$

Notiamo che a_n è un vettore nel piano complesso:

$$a_n = |a_n| \exp(j\phi_n)$$

ed a_n^2 :

$$a_n^2 = |a_n|^2 \exp(2j\phi_n)$$

I vettori che rappresentano a_n^2 per due diversi elementi dell'insieme sono mostrati in figura (19.5).

I due vettori possono avere moduli e fasi diverse. Dato però il carattere casuale della fluttuazione, dato un elemento del sistema che ha, ad un dato istante, un certo modulo e fase, esisterà nell'insieme un elemento con uguale modulo e fase uguale a quella del primo, aumentata di π . Per tale coppia di elementi, la somma dei relativi

vettori (uguali ed opposti) è nulla. Poichè ciò è vero per qualunque valore di a_n , ne segue che:

$$\overline{a_n^2} = 0$$

Analogamente si vede che è:

$$\overline{a_{-n}^2} = 0$$

Invece non è nullo l'ultimo dei termini che compaiono nella (19.8). Ciò segue dal fatto che esso è reale:

$$a_n a_n^* = |a_n| \exp(j\phi_n) |a_n| \exp(-j\phi_n) = |a_n|^2$$

Di conseguenza, la cancellazione tra elementi diversi ora non ha luogo. Avremo in definitiva:

$$\overline{v_n^2} = 2\overline{a_n a_n^*} \quad (19.9)$$

Quanto detto finora si applica sia al caso $\bar{v} = 0$ che al caso $\bar{v} \neq 0$. Poichè siamo comunque liberi di ridefinire $v(t) - \bar{v}$ come la quantità che fluttua, potremo sempre assumere, senza perdere generalità, che sia $\bar{v} = 0$.

Densità spettrale

Nello sviluppo (19.6), alla componente di pulsazione $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ è associata una frequenza:

$$f_n = \frac{n}{T}$$

Considerando l'intervallo di frequenza:

$$\Delta f \equiv f_{n+1} - f_n = \frac{1}{T}$$

definiremo la *densità spettrale* come:

$$S_v(f_n) = \frac{\overline{v_n^2}}{\Delta f} \quad (19.10)$$

Questa rappresenta la potenza quadratica media di rumore per unità di intervallo di frequenza, in prossimità della frequenza f_n , sviluppata su di una resistenza di 1Ω cui sia applicato tale segnale di tensione.

Per $T \rightarrow \infty$ l'equazione (19.10) si può riscrivere, facendo uso della (19.9), come:

$$S_v(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \overline{a_n a_n^*}$$

Essa esprime l'importanza delle singole componenti nello sviluppo in serie di Fourier.

Il teorema di Wiener-Khintchine (vedi appendice A) lega la densità spettrale così definita alla funzione di autocorrelazione:

$$S_v(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(t) v(t+\tau)} \exp(j\omega\tau) d\tau = 4 \int_0^{+\infty} \overline{v(t) v(t+\tau)} \cos(\omega\tau) d\tau \quad (19.11)$$

Dove il termine $\overline{v(t) v(t+\tau)}$ è la funzione di autocorrelazione $\Phi(\tau)$. L'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\exp(j\omega\tau) = \cos(\omega\tau) + j \sin(\omega\tau)$, che $\cos(\omega\tau)$ è una

funzione pari e $\sin(\omega\tau)$ una funzione dispari di τ e che la funzione di autocorrelazione gode della proprietà che: $\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$. Quindi scriveremo:

$$S_v(f) = 4 \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (19.12)$$

Questa equazione può essere invertita, per esprimere la funzione di autocorrelazione in termini della densità spettrale:

$$\Phi(\tau) = \int_0^{+\infty} S_v(f) \cos(\omega\tau) df \quad (19.13)$$

Si vede da ciò che $S_v(f)$ e $\Phi(\tau)$ sono l'una la trasformata di Fourier dell'altra. Attraverso queste equazioni è possibile ricavare la densità spettrale dalla funzione di autocorrelazione e viceversa. Nelle misure si determina la densità spettrale, da cui si ricava poi la funzione di autocorrelazione. I calcoli forniscono invece la funzione di autocorrelazione, da cui si ricava poi la densità spettrale facendo uso della 19.12.

Notiamo subito che nel caso di una sorgente di rumore *bianco*, che ha una funzione di autocorrelazione $\Phi(\tau) = A \cdot \delta(\tau)$ (con A una costante), si trova $S_v(f) = 2 \cdot A$, cioè la densità spettrale è costante.

Ponendo $\tau = 0$ la 19.13 fornisce:

$$\Phi(0) = \int_0^{+\infty} S_v(f) df$$

e, poichè $\Phi(0) = \overline{v^2(t)}$, si trova:

$$\overline{v^2(t)} = \int_0^{+\infty} S_v(f) df \quad (19.14)$$

Cioè il valor medio del quadrato della tensione di rumore è dato da un'integrale sull'intero spettro di frequenze, della densità spettrale. La tensione quadratica media *per unità* di intervallo di frequenza è semplicemente $S_v(f)$.

Banda di rumore di un amplificatore

Ammettiamo ora che un segnale casuale $v(t)$ sia applicato all'ingresso di un generico sistema lineare, caratterizzato da una funzione di trasferimento $g(f)$. Sia $w(t)$ il segnale all'uscita del sistema. Siano $S_v(f)$ e $S_w(f)$ le corrispondenti densità spettrali ed a_n e b_n i relativi coefficienti di Fourier. La linearità del sistema porta a:

$$b_n = g(f) \cdot a_n$$

e quindi:

$$S_w(f) = S_v(f) \cdot |g(f)|^2$$

Per cui:

$$\overline{w^2(t)} = \int_0^{\infty} S_v(f) \cdot |g(f)|^2 df$$

Se il sistema lineare è un amplificatore con una banda passante molto stretta centrata sulla frequenza f_0 , avremo:

$$\overline{w^2(t)} = S_v(f_0) \cdot \int |g(f)|^2 df = S_v(f_0) \cdot g_0^2 \cdot B_N \quad (19.15)$$

dove $g_0 = g(f_0)$ è la risposta a metà banda del sistema lineare e B_N è la larghezza di banda effettiva (nota anche come *banda equivalente di rumore* o *equivalent noise bandwidth*), definita da:

$$B_N = \frac{1}{g_0^2} \int_0^\infty |g(f)|^2 df \quad (19.16)$$

In altre parole, la banda di rumore del nostro amplificatore è la larghezza di banda di un amplificatore ideale avente una risposta in frequenza rettangolare, che fornisce in uscita la medesima potenza di rumore dell'amplificatore reale.

Nel caso in cui il rumore sia *bianco*, potremo facilmente estendere tale risultato al caso di un amplificatore la cui banda passante non sia necessariamente stretta, essendo in tal caso la $S_v(f)$ una costante.

La definizione di banda equivalente di rumore è poi utile anche nel caso di un filtro. Consideriamo ad esempio un filtro passa-basso, la cui funzione di trasferimento sia:

$$|g(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_0)^2}$$

La banda equivalente di rumore sarà:

$$B_N = \int_0^\infty \frac{1}{1 + (f/f_0)^2} df = f_0 \int_0^\infty \frac{1}{1 + u^2} du$$

con $u = f/f_0$.

Si trova:

$$B_N = f_0 \arctan u \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} f_0 \approx 1.57 f_0$$

cioè la banda equivalente di rumore è circa 1.57 volte la banda passante f_0 del filtro.

19.2.3 Determinazione sperimentale della densità spettrale

La densità spettrale $S_v(f)$ può esser misurata ad una generica frequenza f_0 , facendo uso di un filtro di cui si conosca il guadagno a metà banda g_0 e B_N , nonché di un rivelatore quadratico (cioè di un rivelatore in grado di fornire $\overline{w(t)^2}$) all'uscita del filtro.

La densità spettrale sarà ottenibile invertendo l'equazione 19.15 :

$$S_v(f_0) = \frac{\overline{w(t)^2}}{g_0 \cdot B_N}$$

Variando la frequenza f_0 del filtro si potrà in tal modo ottenere una misura della densità spettrale su di un ampio campo di frequenze. Si noti che spesso, al posto della densità spettrale, espressa in V^2/Hz si fa uso della sua radice quadrata (in $V/\sqrt{Hz}$).

19.3 Rumore termico

Il rumore termico (noto anche come rumore Johnson) è quello misurabile ai capi di una resistenza. Se misuriamo la differenza di potenziale ai capi della resistenza, troveremo che essa fluttua attorno allo zero, ma ha un valore quadratico medio diverso da zero. Si può pensare al rumore termico come dovuto al moto di agitazione termica degli elettroni nel materiale di cui è fatta la resistenza. Esso è analogo al moto Browniano, le cui proprietà erano state ottenute da Einstein nel 1906.

Il rumore osservato agli estremi della resistenza può esser descritto come il risultato di una serie di impulsi casuali. Ciascun impulso è un *evento*, costituito dal transito di un elettrone tra collisioni successive con atomi del materiale. Tale evento produce una modifica nella distribuzione di carica all'interno del materiale, e causa quindi una fluttuazione nella differenza di potenziale alle estremità. A tale evento segue un *rilassamento*, che riporta il sistema in equilibrio.

Segue da questa descrizione che ciascun elettrone presente produce un treno casuale di impulsi di tensione alle estremità del materiale resistivo, via via che esso si muove nel materiale. La forma d'onda di rumore osservata è la somma delle successioni di impulsi associati al complesso degli elettroni nel dispositivo.

La distribuzione temporale degli eventi è casuale, nel senso che la probabilità che un evento (il moto di un elettrone) abbia luogo in un intervallino di tempo δt è indipendente dalla storia precedente ed è proporzionale a δt :

$$dP = \nu \delta t$$

dove ν (numero medio di eventi per unità di tempo) non dipende da t . Si può vedere (vedi appendice B) che la P è una distribuzione di Poisson e che quindi la probabilità di osservare m collisioni in un intervallo di tempo finito t è data da:

$$P(m) = \frac{(\nu t)^m}{m!} e^{-\nu t} \quad (19.17)$$

Per tale distribuzione si dimostra che è:

$$\overline{m} = \nu t$$

la quale mostra che il parametro ν ha il significato del numero medio di eventi per unità di tempo. Inoltre si dimostra che la varianza σ^2 è:

$$\sigma^2 = \overline{(m - \overline{m})^2} = \overline{m^2} - \overline{m}^2 = \overline{m}$$

Cioè la varianza è uguale al valor medio. Questa è una caratteristica importante della distribuzione di Poisson.

Si può dimostrare che lo spettro di potenza del rumore è bianco, e più precisamente che la potenza di rumore in un intervallo di frequenza df è:

$$W = \frac{h f df}{\exp(\frac{hf}{KT}) - 1} \quad (19.18)$$

dove h è la costante di Planck ($h = 6.6262 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$), K quella di Boltzmann ($K = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$) e T la temperatura assoluta.

A temperatura ambiente ($T = 300^\circ\text{K}$) l'esponente nel denominatore di questa espressione vale $\approx 1.6 \cdot 10^{-13} f \text{ (Hz)}$.

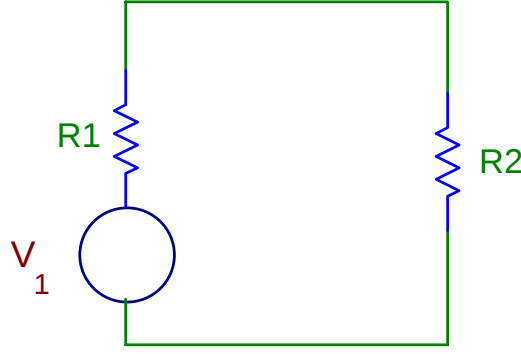


Figura 19.6:

Vediamo quindi che per frequenze f non troppo alte (e/o temperature non troppo basse), l'esponente $\frac{hf}{kT} \ll 1$ e quindi:

$$W = K T df \quad (19.19)$$

Che è l'espressione comunemente adoperata nella più gran parte delle applicazioni. Essa mostra che si tratta in effetti di rumore bianco: la potenza di rumore è proporzionale all'ampiezza della banda di frequenze scelta. Ciò almeno per frequenze $\leq 10^{12} \text{ Hz}$, quando le deviazioni previste dalla (19.18) da un andamento costante cominciano a farsi sentire.

Notiamo che l'andamento dato dalla (19.19) porterebbe ad una potenza di rumore totale (integrata su tutte le frequenze) infinitamente grande. La correzione quantistica contenuta nella (19.18) rende finito l'integrale della potenza sull'intero campo di frequenze.

Per calcolare il valor medio del quadrato della tensione di rumore, consideriamo ora il circuito di figura (19.6), dove la resistenza R_1 è quella che genera il rumore (schematizzato dalla sorgente di tensione di rumore v_1) mentre la resistenza R_2 assorbe la potenza W_1 che la prima fornisce.

Ammettiamo che le due resistenze siano uguali, ma che la seconda sia priva di rumore ¹. La tensione ai capi della resistenza R_2 sarà $\frac{1}{2}v_1$ e la potenza media sviluppata sarà $\frac{1}{4}\frac{v_1^2}{R}$. Poichè questa quantità deve uguagliare W_1 , si trova:

$$W_1 = \frac{1}{4} \frac{\overline{v_1^2}}{R} \quad (19.20)$$

dove si è posto:

$$R = R_1 = R_2$$

e quindi:

$$\overline{v_1^2} = 4RW_1 = 4KRTdf$$

¹Basta immaginare che la resistenza R_2 sia stata posta in un bagno termico ad una temperatura prossima allo zero assoluto

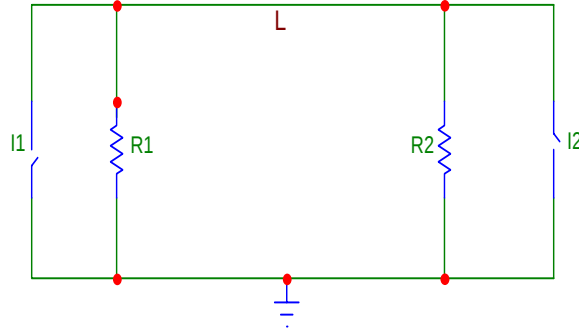


Figura 19.7:

Da questo risultato si vede che il valor medio del quadrato della tensione di rumore e quello della corrente di rumore sono dati da:

$$\overline{v^2} = 4KTRdf \quad (19.21)$$

$$\overline{i^2} = \frac{4KTRdf}{R} \quad (19.22)$$

Il rumore termico fù scoperto nel 1927-1928 da Johnson [13], il quale osservò che una tensione non periodica esisteva alle estremità di tutti i conduttori e che tale effetto dipendeva dalla temperatura. Successivamente Nyquist [14] ne dette una spiegazione teorica, basata su di un argomento termodinamico, che descriveremo brevemente nella prossima sezione.

Notiamo che le proprietà statistiche del rumore Johnson possono anche essere studiate seguendo un approccio basato sul comportamento del moto degli elettroni a livello microscopico e facendo uso della distribuzione di Poisson, che caratterizza il succedersi temporale degli eventi elementari. Tale metodo è analogo a quello seguito da Einstein e poi da Langevin [15] per lo studio del moto Browniano. Per una dimostrazione si veda la referenza ([16]).

19.3.1 Metodo di Nyquist

Ammettiamo di avere due resistenze identiche, alla medesima temperatura T , connesse fra di loro da una linea di trasmissione ideale avente impedenza caratteristica R , uguale a quella delle resistenze (vedi figura 19.7).

Sia L la lunghezza della linea. In condizioni di equilibrio, la prima delle due resistenze cede alla linea una potenza W nell'intervallo di frequenza df . Tale potenza è poi assorbita dall'altra resistenza. Nel medesimo tempo, la seconda resistenza cede alla linea una potenza W che è poi assorbita dalla prima. Nell'intervallo di tempo $\Delta t = L/v$ (dove v è la velocità di propagazione di un'onda e.m. lungo la linea) che il segnale impiega a propagarsi lungo la linea, quest'ultima ha ricevuto quindi una energia

$$2W\Delta t = 2WL/v \quad (19.23)$$

dalle resistenze, nell'intervallo di frequenza df .

Se ora, chiudendo simultaneamente i due interruttori I_1 ed I_2 , mettiamo in cortocircuito le estremità della linea, si formeranno onde stazionarie e l'energia rimarrà intrappolata nella linea stessa.

Le onde stazionarie presenti nella linea avranno frequenze:

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

$$f_2 = 2f_1$$

$$f_3 = 3f_1$$

etc.

La spaziatura tra frequenze consecutive è $\delta f = \frac{v}{2L}$. Se L è grande, la spaziatura sarà piccola ed il numero di modi di vibrazione in un intervallo di frequenza df sarà:

$$\frac{df}{\delta f} = df \cdot \frac{2L}{v}$$

Per il principio di equipartizione, a ciascun modo di vibrazione compete un'energia:

$$\overline{E} = \frac{hf}{\exp(\frac{hf}{KT}) - 1}$$

L'energia nell'intervallo di frequenza df sarà quindi:

$$\frac{2L}{v} \cdot df \cdot \overline{E} = \frac{2L}{v} \frac{hf}{\exp(\frac{hf}{KT}) - 1} \cdot df$$

Uguagliando questa espressione all'energia (19.23) ceduta dalle resistenze alla linea nell'intervallo di frequenza df , cioè a:

$$2W \frac{L}{v}$$

troviamo:

$$W = \frac{hf}{\exp(\frac{hf}{KT}) - 1}$$

che è quanto intendevamo dimostrare.

19.4 Il rumore di tipo *shot*

Questo rumore ha origine nelle fluttuazioni statistiche del numero di portatori di carica. È stato osservato da Schottky in valvole termoioniche e fu da lui attribuito al fatto che la corrente nei tubi a vuoto è costituita da un flusso discreto di cariche elettriche. Esso si osserva in numerosissimi dispositivi elettronici; ad esempio nella corrente in un diodo, nella corrente di gate in un FET, nei fotomoltiplicatori etc. In tutti questi casi, ed in molti altri analoghi, la distribuzione temporale del flusso delle cariche è, analogamente a quanto accade nel caso del rumore termico, una Poissoniana.

Il valore che si trova per la deviazione quadratica media della corrente dal suo valor medio, cioè per la quantità:

$$\overline{i^2} \equiv \overline{I^2} - \overline{I}^2$$

é

$$\overline{i^2} = 2 e \overline{I} df \quad (19.24)$$

dove $\overline{I}$ è la corrente media. La grandezza $2e\overline{I}$ è quindi la densità spettrale $S_i(f)$ relativa alla corrente. Vediamo che anche in questo caso abbiamo a che fare con un rumore bianco.

Che la fluttuazione quadratica media della corrente attorno al valor medio ($\overline{i^2}$) sia *proporzionale* al prodotto $\overline{I}e$ può esser compreso facilmente facendo uso della distribuzione di Poisson. Infatti la corrente media $\overline{I}$ è uguale al prodotto del numero di cariche elementari che attraversano nell'unità di tempo la sezione del conduttore, per la carica elementare:

$$\overline{I} = \overline{n}e$$

La fluttuazione quadratica media della corrente attorno al valor medio è:

$$\overline{(I - \overline{I})^2} = \overline{i^2} = \overline{(n - \overline{n})^2} e^2 = \sigma_n^2 e^2 = \overline{n}e^2$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che la distribuzione di n è una Poissoniana. Da questa segue poi:

$$\overline{i^2} = \frac{\overline{I}}{e} e^2 = \overline{I}e$$

Una dimostrazione completa della (19.24), che rende conto del fattore 2, è la seguente.

Ammettiamo che un certo fenomeno sia determinato dalla somma di un gran numero di eventi che avvengono in modo casuale, con un rate medio λ . Sia $F(t - t_i)$ la funzione che descrive l'evoluzione temporale di una certa variabile fisica, originata dal verificarsi di uno degli eventi al tempo t_i . La funzione $Y(t)$ che descrive l'andamento temporale macroscopico, risultante dal verificarsi di un numero N di eventi elementari in un certo tempo è allora data dalla somma:

$$Y(t) = \sum_i F(t - t_i)$$

dove $F(t - t_i) = 0$ per $t < t_i$ ed $F(t - t_i)$ rappresenta l'effetto di un evento che ha luogo nell'istante t_i . Definiamo la trasformata di Fourier di $F(u)$ come:

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot \exp(-j\omega u) du$$

Si dimostra allora (teorema di Carson-vedasi appendice C) che la densità spettrale $S_y(f)$ di $Y(t)$ è data da:

$$S_y(f) = 2 \lambda |\psi(f)|^2 \quad (19.25)$$

Applichiamo ora tale teorema al problema dell'emissione di elettroni da parte di un catodo riscaldato, dove il numero di elettroni emessi per unità di tempo è una variabile Poissoniana.

Se V_a è il potenziale dell'anodo (il catodo sia a potenziale nullo), d la distanza catodo-anodo, τ il tempo di transito dell'elettrone dal catodo all'anodo, si ha:

$$\tau = \frac{2d}{v_a} = \frac{2d}{\sqrt{2eV_a/m}}$$

dove m è la massa dell'elettrone, e la sua carica e v_a la velocità massima che esso raggiunge (all'anodo). La corrente $i(t)$ associata ad un singolo elettrone emesso all'istante t_i è:

$$i(t) = \frac{2e(t - t_i)}{\tau^2} \quad (t_i \leq t \leq t_i + \tau)$$

La correttezza di questa equazione è facilmente verificabile:

$$\int_0^\infty i(t)dt = \int_{t_i}^{t_i+\tau} \frac{2e(t - t_i)}{\tau^2} dt = \frac{2e}{\tau^2} \int_0^\tau t' dt' = e$$

Quindi:

$$\Psi_i(f) = \int_0^\tau \frac{2eu}{\tau^2} e^{j\omega u} du = e\Phi(j\omega\tau)$$

con:

$$\Phi(j\omega\tau) = \frac{2}{(j\omega\tau)^2} [1 - e^{-j\omega\tau} - j\omega\tau e^{-j\omega\tau}]$$

Ne segue che, essendo:

$$\bar{I} = \bar{n}e$$

dove $\bar{n}$ è il numero medio di elettroni emessi per unità di tempo:

$$S_I(f) = 2\bar{n} |\Psi_i(f)|^2 = \frac{2\bar{I}}{e} |\Psi_i(f)|^2 = \frac{2\bar{I}e^2}{e} |\Phi|^2$$

Poichè τ è dell'ordine di 10^{-9} s e $|\Phi|^2$ è dell'ordine di 1 per $\omega\tau < \pi$, ne segue che:

$$S_I(f) = 2e\bar{I}$$

per frequenze fino a qualche centinaio di Mhz (teorema di Schottky)

Lo shot noise si riscontra non soltanto nelle valvole termioniche, ma anche nei semiconduttori, quando la corrente è dovuta a portatori minoritari ed a condizione che l'intrappolamento e la ricombinazione siano trascurabili. Questo è ad esempio il caso di una giunzione pn con polarizzazione inversa. Ciò continua ad esser vero in polarizzazione diretta, ma a basse tensioni dirette comincia ad essere apprezzabile l'effetto delle ricombinazioni nella zona di svuotamento.

Lo shot-noise è ridotto quando un qualche meccanismo intervenga a ridurre le fluttuazioni nel numero dei portatori di carica. Ad esempio, in un tubo termoionico in cui si formi una zona di carica spaziale tra catodo ed anodo, questa agisce da *buffer*, smussando le fluttuazioni nel flusso delle cariche verso l'anodo e quindi riducendo lo shot-noise.

19.5 Rumore 1/f

Questo è un tipo di rumore che è presente in un'ampia varietà di sistemi (elettronici, biologici, musicali, geologici etc.) ed in particolare nei dispositivi a semiconduttore, dove è stato ampiamente studiato, ma solo parzialmente compreso. Nel caso dei transistor tale rumore è legato ad imperfezioni delle superfici delle giunzioni. Esso è noto sotto vari nomi: "rumore 1/f", "flicker-noise", "contact-noise", "excess-noise". La denominazione "1/f" è legata al fatto che la sua densità spettrale varia come $1/f^\alpha$ con α nel range (0.8-1.5).

Tale dipendenza è stata osservata fino a frequenze bassissime ($10^{-6} Hz$). Si noti che l'andamento 1/f non può continuare fino a frequenza zero, poichè in tal caso la potenza totale di rumore risulterebbe divergente.

A frequenze molto alte il suo effetto è mascherato dalla presenza di altre sorgenti di rumore, quali quello termico. Scriveremo in generale, per questo tipo di rumore:

$$\overline{v^2} = A_f \frac{df}{f^\alpha}$$

con A_f una costante, dipendente dal particolare dispositivo. Una immediata conseguenza dell'andamento come 1/f di questo tipo di rumore, è quella che la potenza di rumore in ciascuna decade di frequenza è la stessa. In altre parole, la potenza di rumore nella banda compresa tra 10 e 100 Hz è uguale a quella nella banda tra 0.01 e 0.1 Hz.

19.6 Circuiti equivalenti per il rumore

Agli effetti del rumore Johnson una resistenza reale alla temperatura T può essere sostituita da una ideale (cioè priva di rumore) in serie con un generatore di tensione di rumore la cui f.e.m. sia quella del rumore termico:

$$\overline{v^2} = 4KTR\Delta f$$

dove Δf è l'intervallo di frequenza su cui si effettua la misura.

Ne segue per la tensione di rumore:

$$v_n = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{4KTR\Delta f}$$

Come mostrato in figura 19.8.

Si può anche, facendo uso del teorema di Norton, assimilare tale resistenza ad una ideale in parallelo con un generatore di corrente i_n , con:

$$i_n = \frac{v_n}{R} = \sqrt{\frac{4KT\Delta f}{R}}$$

Un sistema di due resistenze in serie, R_1 ed R_2 potrà essere assimilata ad una resistenza di valore $R_1 + R_2$ in serie con un generatore di tensione di rumore pari a $v_n = v_{n1} + v_{n2}$. Il quadrato del valore efficace sarà:

$$\overline{v_n^2} = \overline{(v_{n1} + v_{n2})^2} = \overline{v_{n1}^2} + \overline{v_{n2}^2} = 2 \cdot \overline{v_{n1} \cdot v_{n2}}$$

Poichè v_{n1} e v_{n2} sono indipendenti, avremo:

$$\overline{v_{n1} \cdot v_{n2}} = \overline{v_{n1}} \cdot \overline{v_{n2}}$$

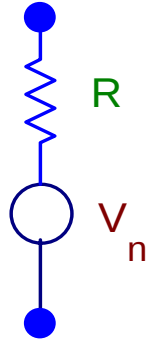


Figura 19.8:

che è nullo, poichè sono nulli i singoli valori medi. Quindi:

$$\overline{v_n^2} = \overline{v_{n1}^2} + \overline{v_{n2}^2} = 4KT\Delta f \cdot (R_1 + R_2)$$

Nel caso di due resistenze in parallelo si può analogamente verificare che la corrente quadratica media di rumore è data da:

$$\overline{i_n^2} = 4KT\Delta f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Il rumore presente ai capi di un diodo può, in modo analogo, esser descritto introducendo un generatore di corrente di rumore (shot) in parallelo al diodo (supposto privo di rumore) tale che la corrente quadratica media di rumore sia:

$$\overline{i_n^2} = 2eI\Delta f$$

dove I è la corrente nel diodo, e la carica dell'elettrone e Δf l'intervallo di frequenza.

Più in generale, dato un generico dispositivo a due terminali alla temperatura T , il rumore (qualunque la sua origine) può esser descritto introducendo una f.e.m. ai suoi capi, in serie con la sua impedenza $Z=R+jX$, di valore:

$$\overline{v_n^2} = 4KTR_n\Delta f \quad (19.26)$$

Ad R_n si dà il nome di "resistenza equivalente di rumore" (equivalent noise resistance) del dispositivo. Se abbiamo a che fare con un circuito passivo in cui le sorgenti di rumore siano esclusivamente termiche a temperature T , allora:

$$R_n = R$$

Se sono presenti altre sorgenti di rumore, R_n può differire da R .

Alternativamente possiamo descrivere il rumore ai capi di un dispositivo a due terminali, di ammettenza $Y = 1/Z = g + jb$, introducendo un generatore di corrente di rumore in parallelo ad Y :

$$\overline{i_n^2} = 4KTg_n\Delta f \quad (19.27)$$

dove g_n è la *conduttanza equivalente di rumore* (equivalent noise conductance) del dispositivo.

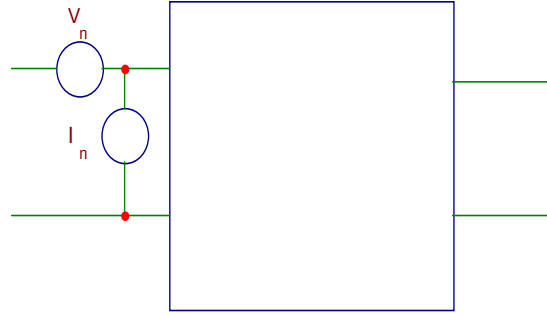


Figura 19.9:

Se il rumore ha origine esclusivamente termica, allora $g_n = g$, mentre se altre sorgenti di rumore sono presenti, g_n può differire da g .

Un concetto che appare comunemente nella letteratura è quello di "temperatura di rumore equivalente" (equivalent noise temperature).

Questa esprime il rumore come se esso fosse puramente termico e fosse generato da una resistenza pari a quella del dispositivo, ma ad una temperatura $T_n \neq T$. Il rumore risulta espresso in termini di tale temperatura come:

$$\overline{v_n^2} = 4KT_n R \Delta f \quad (19.28)$$

Si può alternativamente esprimere il rumore come una corrente in parallelo al dispositivo, di valore pari alla corrente di rumore generata da una resistenza pari alla resistenza del dispositivo, alla temperatura T_n :

$$\overline{i_n^2} = 4KT_n g \Delta f \quad (19.29)$$

confrontando la (19.26) con la (19.28) e la (19.27) con la (19.29) si ottiene nei due casi, rispettivamente:

$$T_n = \frac{R_n}{R} T$$

$$T_n = \frac{g_n}{g} T$$

Sul concetto di temperatura di rumore e di resistenza equivalente di rumore torneremo quando discuteremo del rumore negli amplificatori.

19.7 Rumore in un quadripolo

Il rumore prodotto in un quadripolo è convenzionalmente descritto tramite un generatore di tensione di rumore v_n in serie alla maglia d'ingresso e da un generatore di corrente di rumore i_n in parallelo alla medesima maglia.

Il primo renderà conto del rumore presente in uscita quando l'ingresso è in cortocircuito, il secondo del rumore presente ad ingresso aperto. La configurazione è illustrata in figura (19.9).

Poichè il rumore nell'amplificatore è determinato prevalentemente da processi di un determinato tipo, le due sorgenti i_n e v_n non sono del tutto indipendenti.

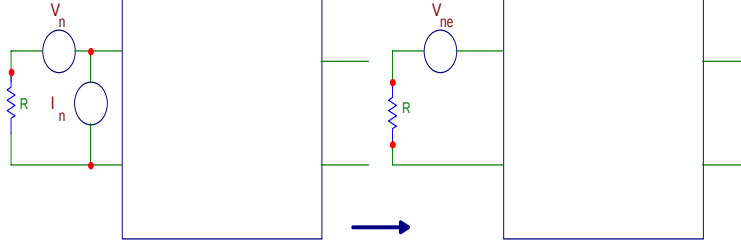


Figura 19.10:

Per tener conto di questo fatto si introduce un coefficiente di correlazione γ . Un valore zero per questo parametro vuol dire che le due sorgenti sono totalmente non correlate; $\gamma = 1$ vuol dire che esse sono massimamente correlate.

Ammettiamo ora che l'ingresso del quadripolo sia chiuso su di una resistenza R come mostrato in figura (19.10).

Se tale resistenza non genera rumore, la tensione di rumore complessiva all'ingresso del quadripolo sarà: $v_{ne} = v_n + R i_n$. Tale tensione va sotto il nome di *tensione di rumore in eccesso* poichè rappresenta la tensione di rumore che occorre sommare a quella v_{ns} della sorgente (di resistenza R) per ottenere il rumore totale:

$$v_{nt} = v_{ns} + v_{ne} = v_{ns} + v_n + i_n R$$

Il valore quadratico medio di v_{ne} vale:

$$\overline{v_{ne}^2} = \overline{v_n^2} + R^2 \overline{i_n^2} + 2R \overline{v_n i_n}$$

L'ultimo termine in questa espressione dipende da γ e si annulla per $\gamma = 0$. Per $\gamma \neq 0$ esso vale:

$$2R\gamma\sqrt{\overline{v_n^2}}\sqrt{\overline{i_n^2}} = 2R\gamma I_n V_n$$

Con ovvio significato dei nuovi simboli I_n e V_n . Quindi:

$$\overline{v_{ne}^2} = V_n^2 + R^2 I_n^2 + 2R\gamma V_n I_n$$

Vediamo che se $R=0$, $\overline{v_{ne}^2} = \overline{v_n^2}$. Se R è grande dominerà invece l'effetto di I_n ed avremo:

$$\overline{v_{ne}^2} = R^2 I_n^2$$

In definitiva avremo per il rumore totale:

$$\overline{v_{nt}^2} = \overline{v_{ns}^2} + \overline{v_n^2} + R^2 \overline{i_n^2} + 2R\gamma \overline{v_n i_n}$$

19.8 Dipendenza del rapporto segnale/rumore in un quadripolo dalla resistenza della sorgente

Consideriamo dapprima il caso di una sorgente costituita da un generatore di tensione v_s in serie con la propria resistenza R_s . Ammettiamo che un generatore in

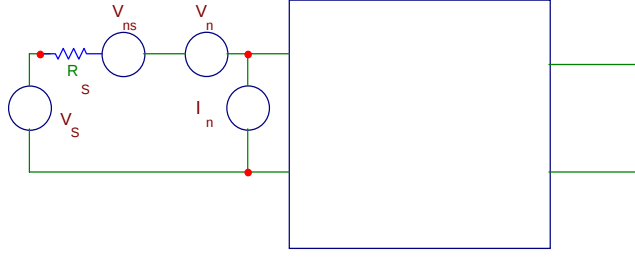


Figura 19.11:

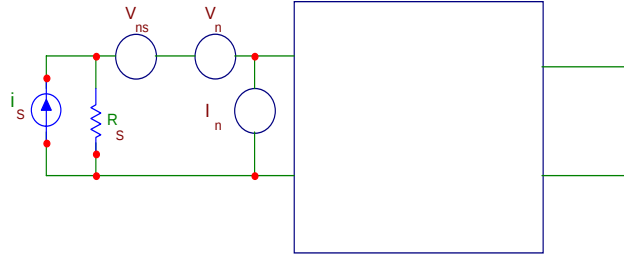


Figura 19.12:

serie v_{ns} renda conto del rumore introdotto dalla sorgente. Lo schema è quello di figura (19.11).

Il rapporto segnale-rumore (riferito all'ingresso) sarà:

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{v_s^2}}{\overline{v_{nt}^2}} = \frac{\overline{v_s^2}}{\overline{v_{ns}^2} + \overline{v_n^2} + \overline{i_n^2} R_s^2}$$

avendo trascurato i termini di correlazione.

Vediamo che il rapporto $\frac{S}{N}$ diminuisce all'aumentare di R_s , poichè aumenta il termine $\overline{i_n^2} R_s^2$.

Consideriamo ora il caso di un generatore di corrente i_s in parallelo con R_s . Anche in questo caso continueremo a parametrizzare il rumore introdotto dalla sorgente mediante un generatore di tensione di rumore v_{ns} in serie, come mostrato in figura (19.12).

In questo caso avremo:

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{i_s^2} R_s^2}{\overline{v_{nt}^2}} = \frac{\overline{i_s^2}}{\frac{\overline{v_{ns}^2} + \overline{v_n^2}}{R_s^2} + \overline{i_n^2}}$$

Vediamo che ora, all'aumentare di R_s il rapporto $\frac{S}{N}$ aumenta. Al limite di $R_s \rightarrow \infty$ esso tende a:

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{i_s^2}}{\overline{i_n^2}}$$

che dipende solo dalla sorgente di corrente di rumore.

19.9 Cifra di rumore

Se indichiamo con G_P il guadagno in potenza di un amplificatore, con S_0 la potenza del segnale presente in uscita, in una stretta banda di frequenza df , con S_i quella presente in ingresso nella medesima banda di frequenza, avremo:

$$S_0 = G_P S_i \quad (19.30)$$

Se ora applichiamo in ingresso, al posto di S_i , un segnale di rumore di potenza N_i (nella medesima banda di frequenza), il segnale di rumore N_o all'uscita sarà ottenibile da una relazione analoga:

$$N_0 = G'_P N_i$$

dove però $G'_P > G_P$, poichè l'amplificatore introduce di suo un ulteriore contributo al rumore in uscita.

Si scrive in generale:

$$N_o = F G_P N_i \quad (19.31)$$

dove F è un fattore sicuramente maggiore di 1. Ad F si dà il nome di *figura di rumore puntiforme* alla frequenza f (spot-noise figure). Tenendo conto delle relazioni scritte possiamo definire F come:

$$F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} \quad (19.32)$$

F è in generale funzione, oltre che della frequenza, della resistenza d'uscita del generatore.

Dalla (19.31) segue anche che:

$$F = \frac{N_o}{G_P N_i}$$

Sia ora:

$$N_o = G_P(N_i + N_d)$$

dove N_i è la potenza di rumore in ingresso nell'intervallo df ed N_d è la potenza di rumore introdotta dall'amplificatore, nella medesima banda di frequenza df , *riportata in ingresso*.

Si ha quindi:

$$F = \frac{G_P(N_i + N_d)}{G_P N_i} = 1 + \frac{N_d}{N_i}$$

e quindi:

$$N_d = N_i(F - 1)$$

La grandezza $F_e = F - 1$ è detta *cifra di rumore in eccesso*. Dall'ultima relazione scritta si vede che il rumore N_d introdotto dall'amplificatore è uguale a quello presente in ingresso, moltiplicato per la cifra di rumore in eccesso.

La cifra di rumore (NF) espressa in dB è poi:

$$NF = 10 \log F = 10 \log \frac{N_o}{G_P N_i}$$

Dalla (19.32) si ha poi:

$$NF = 10 \log \frac{N_o/S_o}{N_i/S_i} \quad (19.33)$$

Come si vede, la cifra di rumore esprime l'aumento del rapporto rumore/segnale ($\frac{N}{S}$) passando dall'ingresso all'uscita del quadripolo, cioè fornisce una misura del contributo che al rumore ha aggiunto il quadripolo.

19.10 Rumore nel caso di una catena di più amplificatori in cascata

Se più amplificatori sono collegati in serie, allo scopo di ottenere un maggior guadagno, si può facilmente vedere che il contributo al rumore portato dai diversi elementi della catena può essere molto diverso. Infatti, il rumore introdotto dal primo amplificatore della catena sarà amplificato dai successivi elementi; quello introdotto dall'ultimo elemento della catena avrà un'importanza decisamente inferiore. È quindi critico scegliere per i primi amplificatori della catena degli elementi a basso rumore.

Calcoliamo la cifra di rumore relativa ad una catena di più amplificatori. Ammetteremo che l'impedenza d'uscita di ciascun amplificatore sia uguale all'impedenza d'ingresso del successivo; ciò assicura il massimo trasferimento di potenza tra elementi consecutivi.

Abbiamo definito la cifra di rumore F nel caso di un amplificatore come il rapporto tra la potenza di rumore presente in uscita (per unità di intervallo di frequenza, come sarà sempre sottinteso nel seguito), divisa per il guadagno G_P dell'amplificatore, e quella (N_i) presente in ingresso:

$$F = \left(\frac{N_o}{G_P}\right)/N_i \quad (19.34)$$

Il numeratore di questa espressione (il rumore totale presente in uscita, "traslato" all'ingresso) è la somma del rumore N_i presente in ingresso e di quello introdotto dall'amplificatore, che chiameremo N_o^e/G_P (rumore in eccesso, traslato all'ingresso dell'amplificatore):

$$\frac{N_o}{G_P} = N_i + \frac{N_o^e}{G_P}$$

Possiamo quindi riscrivere la (19.34) nella forma:

$$F = 1 + \frac{N_o^e}{G_P}/N_i = 1 + F_e \quad (19.35)$$

dove compare la *cifra di rumore in eccesso* F_e già introdotta:

$$F_e = \frac{N_o^e}{G_P}/N_i$$

Se immaginiamo che N_i sia unitario (1 W/Hz) le equazioni (19.34) e (19.35) si scrivono rispettivamente:

$$F = \frac{N_o}{G_P} = 1 + F_e$$

$$F_e = \frac{N_o^e}{G_P}$$

La prima di queste ci dice che la cifra di rumore è pari alla potenza di rumore totale presente in uscita, divisa per il guadagno dell'amplificatore, per unità di rumore in ingresso. La seconda ci dice che la cifra di rumore in eccesso è il rumore introdotto dall'amplificatore diviso per il guadagno del medesimo.

Esaminiamo ora il caso di due amplificatori collegati in serie. Siano F_1 ed F_2 le rispettive cifre di rumore; siano analogamente F_{e1} ed F_{e2} le corrispondenti cifre di rumore in eccesso. Il rumore all'ingresso del primo amplificatore, dovuto a questo soltanto, è F_{e1} . Il rumore totale all'ingresso del medesimo è: $F_{e1} + 1 = F_1$. Il rumore introdotto dal secondo stadio *riportato all'ingresso di questo* è $F_{e2} = F_2 - 1$. Questo stesso rumore, traslato all'ingresso del primo stadio è:

$$\frac{F_{e2}}{G_{P1}} = \frac{F_2 - 1}{G_{P1}}$$

Abbiamo quindi per il rumore totale (sempre riportato all'ingresso del primo stadio):

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{P1}}$$

Questa è quindi la cifra di rumore relativa al caso considerato.

È facile estendere le considerazioni svolte al caso di un numero generico di amplificatori. Ad esempio, nel caso di una catena di tre amplificatori, avremo:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{P1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{P1}G_{P2}}$$

Questa è nota come *formula di Friiss*

19.11 Espressione analitica della cifra di rumore

Possiamo far uso dei generatori v_n ed i_n che descrivono il rumore introdotto dal quadripolo, per calcolare la cifra di rumore F .

Calcoliamo N_i , potenza di rumore in ingresso, ammettendo che siano:

- R_s resistenza d'uscita della sorgente di rumore
- v_{ns} tensione efficace di rumore della sorgente
- R_i resistenza d'ingresso del quadripolo

Con riferimento alla figura (19.13) avremo:

$$v_{in} = v_{ns} \frac{R_i}{(R_s + R_i)}$$

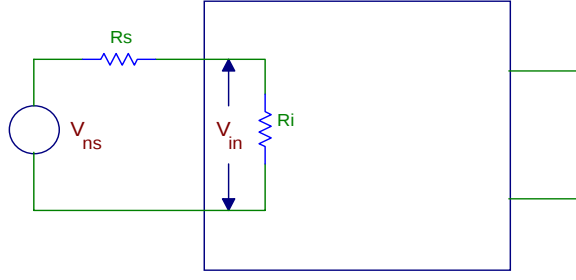


Figura 19.13:

per cui la potenza di rumore in ingresso N_i è:

$$N_i = \frac{\overline{v_{in}^2}}{R_i} = \frac{\overline{v_{ns}^2}}{R_i} \frac{R_i^2}{(R_s + R_i)^2} = \overline{v_{ns}^2} \frac{R_i}{(R_s + R_i)^2}$$

Calcoliamo ora la potenza di rumore complessiva facendo uso dell'espressione già ricavata per $\overline{v_{nt}^2}$ (tensione quadratica media di rumore all'ingresso):

$$\overline{v_{nt}^2} = \overline{v_{ns}^2} + \overline{v_n^2} + R_s^2 \overline{i_n^2} + 2R_s \overline{v_n i_n}$$

Troviamo in tal modo:

$$N_o = \overline{v_{nt}^2} \frac{R_i}{(R_s + R_i)^2} G_P$$

Sostituendo in questa espressione quella di $\overline{v_{nt}^2}$ e dividendo poi N_o per $G_P N_i$, troviamo:

$$F = \frac{N_o}{G_P N_i} = \frac{\overline{v_{nt}^2}}{\overline{v_{ns}^2}} = 1 + \frac{\overline{v_n^2} + R_s^2 \overline{i_n^2} + 2R_s \overline{v_n i_n}}{\overline{v_{ns}^2}} \quad (19.36)$$

Il secondo termine nell'ultima espressione scritta è il rapporto tra la potenza di rumore dovuta al solo quadripolo e quella in ingresso. Esso è quindi la *cifra di rumore in eccesso* F_e :

$$F_e = F - 1$$

Ammettendo che la tensione di rumore all'ingresso sia quella dovuta alla resistenza R_s (data da $\sqrt{4KTR_s \Delta f}$, avremo:

$$F = 1 + \frac{1}{4KT \Delta f} \left(\frac{V_n^2}{R_s} + R_s I_n^2 + 2\gamma V_n I_n \right) \quad (19.37)$$

Il valore fornito da tale equazione per una frequenza determinata è la *cifra di rumore puntiforme*. Esso dipende dalla frequenza se non si tratta di rumore bianco.

La cifra di rumore espressa in decibel è poi:

$$NF = 10 \log F$$

L'andamento (qualitativo) del NF in funzione di R_s descritto dalla (19.37) è mostrato in figura (19.14).

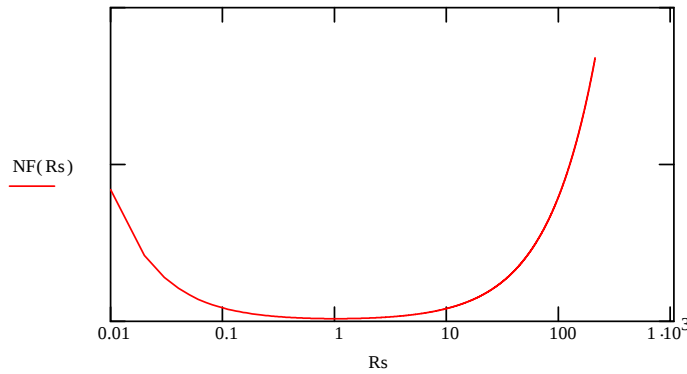


Figura 19.14:

Per bassi valori di R_s domina il termine V_n^2/R_s e quindi la sorgente di tensione di rumore. Per grandi valori di R_s domina invece l'effetto del generatore di corrente. Si può facilmente vedere, derivando la (19.37) rispetto ad R_s che il NF è minimo quando ciascun generatore contribuisce in ugual misura al rumore complessivo. Ciò avviene per:

$$R_s = \frac{V_n}{I_n}$$

che fornisce il valore ottimale della resistenza R_s . Il corrispondente valore della cifra di rumore F è:

$$F_{min} = 1 + (1 + \gamma) \frac{V_n I_n}{2KT\Delta f}$$

L'equazione: $NF = 10 \log F$ ci dice che per un valore di 5 del parametro NF il contributo del rumore all'uscita del quadripolo è 3.2 volte quello della sorgente. All'altro estremo, un NF di 0.4 ci dice che il contributo della tensione di rumore all'uscita è 1.05 volte quello della sorgente, che ha quindi aggiunto un modesto 5% (in tensione efficace).

19.12 Temperatura di rumore

Sappiamo che una resistenza ad una temperatura assoluta T_s è sorgente di rumore Johnson (termico) con densità spettrale data da:

$$S_v(f) = 4KT_s R$$

cioè:

$$\overline{v^2} = 4KT_s R \Delta f$$

nell'intervallo di frequenza Δf .

Se una resistenza R è collegata all'ingresso di un amplificatore avente cifra di rumore in eccesso F_e e quindi cifra di rumore $F = F_e + 1$, il rumore effettivo all'ingresso dell'amplificatore (privo di rumore, essendosi traslato il rumore all'ingresso) sarà:

$$\overline{w^2} = F \overline{v^2}$$

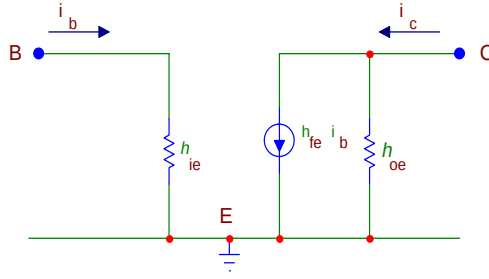


Figura 19.15:

Spesso conviene, per motivi pratici, ragionare come se l'amplificatore fosse del tutto esente da rumore e l'intero rumore fosse attribuibile alla medesima resistenza R , ora però ad una temperatura T_n , tale che:

$$4KT_n R \Delta f = \overline{w^2}$$

Dalle equazioni scritte segue:

$$\begin{aligned} \overline{w^2} &= (F_e + 1) \overline{v^2} = F_e \overline{v^2} + \overline{v^2} = \\ &= 4F_e K T_s R \Delta f + 4K T_s R \Delta f = 4K R (F_e T_s) \Delta f + 4K R T_s \Delta f = \\ &= 4K R T_n \Delta f + 4K R T_s \Delta f \end{aligned}$$

Alla quantità $T_n = F_e T_s$ si dà il nome di *temperatura di rumore* dell'amplificatore. L'equazione:

$$T_n = F_e T_s = (F - 1) T_s$$

ci dà poi:

$$F = 1 + \frac{T_n}{T_s}$$

Da questa, nota la temperatura della sorgente e la temperatura di rumore, si può facilmente ricavare la cifra di rumore.

19.13 Esempio: Transistor bipolare

Ricordiamo il modello a parametri h in cui si trascuri h_{re} . Questo è mostrato in figura (19.15).

Esso può essere trasformato nello schema di figura (19.16).

Basta infatti scrivere:

$$i_c = h_{fe} i_b = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} (h_{ie} i_b) = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} v \equiv g_m v$$

con:

$$g_m \equiv \frac{h_{fe}}{h_{ie}}$$

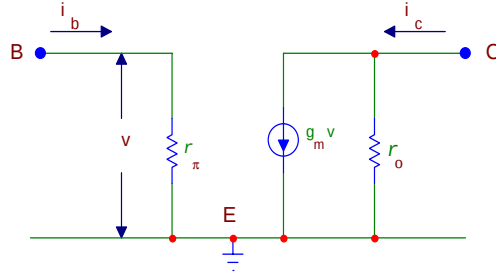


Figura 19.16:

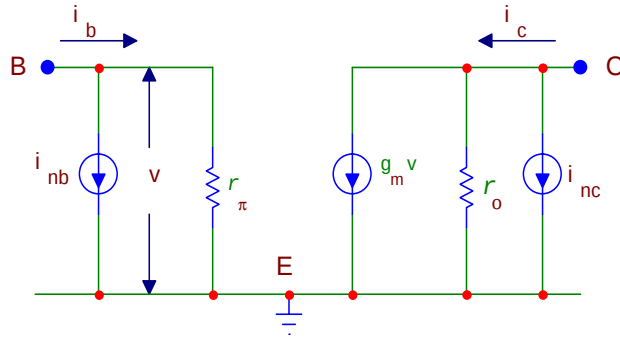


Figura 19.17:

Il generatore di corrente $h_{fe}i_b$ viene così sostituito da un generatore a transconduttanza $g_m v$.
Si ha:

$$h_{ie} \equiv r_\pi \equiv \frac{h_{fe}}{g_m}$$

Introduciamo in tale circuito la sorgente di corrente di rumore i_{nb} nella maglia d'ingresso e quella i_{nc} nella maglia d'uscita, come mostrato in figura (19.17).

Queste sorgenti di rumore hanno origine nelle fluttuazioni nel numero di portatori di carica attraverso la giunzione base-emettitore (i_{nb}) e collettore-emettitore (i_{nc}). Esse sono attribuibili in larga misura al rumore shot, per cui:

$$\overline{i_{nb}^2} = 2eI_b\Delta f$$

$$\overline{i_{nc}^2} = 2eI_c\Delta f$$

dove I_b ed I_c sono rispettivamente le correnti (quiescenti) di base e di collettore.

Determiniamo ora i parametri del quadripolo equivalente, cioè v_n e i_n . Cominciamo con il determinare il generatore di tensione v_n . Ricordiamo che questo è l'unico ad avere un effetto sulla tensione di rumore in uscita, quando l'ingresso sia in cortocircuito.

Se ammettiamo quindi di aver cortocircuitato l'ingresso e supponendo che l'uscita sia chiusa su di un carico R_p , avremo per la tensione di uscita:

$$v_o' = (g_m v + i_{nc}) R_{eq}$$

con:

$$R_{eq} = R_p // r_o$$

dove $v = 0$ (i morsetti d'ingresso nel circuito di figura (19.17) sono in cortocircuito).

Quindi:

$$v_o' = i_{nc} R_{eq}$$

Nel corrispondente quadripolo con terminali d'ingresso in cortocircuito avremmo:

$$v_o' = A_v v_n$$

Quindi:

$$v_n = \frac{R_{eq}}{A_v} i_{nc}$$

Rimane da determinare A_v nel nostro amplificatore a parametri h. Abbiamo:

$$v_o = g_m R_{eq} v$$

da cui:

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v} = g_m R_{eq}$$

Ne segue:

$$v_n = \frac{R_{eq} i_{nc}}{g_m R_{eq}} = \frac{i_{nc}}{g_m}$$

Determiniamo ora i_n . A tale scopo supponiamo che i terminali d'ingresso siano aperti. In tal modo il generatore di tensione di rumore nel quadripolo non potrà dare alcun contributo. Avremo:

$$v_o'' = (g_m v + i_{nc}) R_{eq}$$

con:

$$v = i_{nb} r_\pi$$

Da cui:

$$v_o'' = (g_m i_{nb} r_\pi + i_{nc}) R_{eq} = (h_{fe} i_{nb} + i_{nc}) R_{eq}$$

Nel caso del quadripolo con gli ingressi aperti, avremmo:

$$v_o'' = A_i i_n R_{eq}$$

Dove A_i é l'amplificazione in corrente che nel nostro caso vale h_{fe} . Quindi:

$$v_o'' = h_{fe} i_n R_{eq} = (h_{fe} i_{nb} + i_{nc}) R_{eq}$$

da cui:

$$i_n = i_{nb} + \frac{i_{nc}}{h_{fe}}$$

Sostituendo ora ai due generatori di rumore (i_n, v_n) presenti all'ingresso del quadripolo un unico generatore in serie con la resistenza R_s del generatore (facendo uso del teorema di Thevenin):

$$v_{ne} = v_n + R_s i_n$$

troviamo:

$$v_{ne} = \frac{i_{nc}}{g_m} + R_s (i_{nb} + \frac{i_{nc}}{h_{fe}}) = \frac{i_{nc}}{g_m} + R_s (i_{nb} + \frac{i_{nc}}{g_m r_\pi}) = \frac{i_{nc}}{g_m} (1 + \frac{R_s}{r_\pi}) + R_s i_{nb}$$

da cui:

$$\overline{v_{ne}^2} = \overline{i_{nc}^2} \frac{1}{g_m^2} (1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 + R_s^2 \overline{i_{nb}^2}$$

dove $\overline{i_{nb}^2}$ ed $\overline{i_{nc}^2}$ sono date dal rumore shot:

$$\overline{i_n^2} = 2eI\Delta f$$

dove e è la carica dell'elettrone, I la corrente nel circuito (di base o di collettore) e Δf la banda di frequenza. Quindi:

$$\overline{v_{ne}^2} = (1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \cdot \frac{1}{g_m^2} \cdot 2eI_C \Delta f + R_s^2 \cdot 2e \cdot I_b \cdot \Delta f$$

Poichè inoltre è $I_c = h_{FE} I_b$, segue:

$$\overline{v_{ne}^2} = [(1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \frac{1}{g_m^2} + \frac{R_s^2}{h_{FE}}] \cdot 2eI_C \Delta f$$

Utilizziamo ora le relazioni²:

$$I_c = g_m V_T = g_m \frac{KT}{e}$$

ed otteniamo:

$$\overline{v_{ne}^2} = [(1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \frac{1}{g_m} + \frac{R_s^2}{h_{FE}} g_m] \cdot 2KT \Delta f \quad (19.38)$$

Determiniamo ora il valore ottimale di R_s , cioè quello che rende minimo il rumore. Questo, come già visto è dato da:

$$(R_s^{opt})^2 = \frac{\overline{v_n^2}}{\overline{i_n^2}}$$

²La transconduttanza g_m è definita come

$$g_m = dI_c / dV_{BE}$$

dove, per il diodo base-emettitore in zona attiva è:

$$I_c = I_0 [\exp(e V_{BE} / KT) - 1]$$

Ne segue:

$$g_m = dI_c / dV_{BE} = I_c e / KT$$

Sostituendo in questa i valori trovati per $\overline{v_n^2}$ ed $\overline{i_n^2}$, si trova:

$$(R_s^{opt})^2 = \frac{\frac{\overline{i_{nc}^2}}{g_m^2}}{\frac{\overline{i_{nb}^2}}{I_c} + \frac{\overline{i_{nc}^2}}{h_{fe}^2}} = \frac{\frac{1}{g_m^2}}{\frac{\overline{i_{nb}^2}}{I_c} + \frac{1}{h_{fe}^2}} = \frac{\frac{1}{g_m^2}}{\frac{I_b}{I_c} + \frac{1}{h_{fe}^2}} = \frac{1}{g_m^2} \frac{1}{\frac{1}{h_{FE}} + \frac{1}{h_{fe}^2}} \approx \frac{h_{FE}}{g_m^2}$$

dove si è fatto uso delle relazioni:

$$\overline{i_{nb}^2} = 2eI_b\Delta f$$

$$\overline{i_{nc}^2} = 2eI_c\Delta f$$

Vediamo che il valore ottimale della resistenza R_s dipende da h_{FE} e da g_m .

Utilizziamo ora il risultato ottenuto (19.38) per la tensione quadratica media in eccesso ($\overline{v_{ne}^2}$) per il transistor bipolare, per ottenere la corrispondente temperatura di rumore:

$$T_n = F_e T_s$$

dove:

$$F_e = \frac{\overline{v_{ne}^2}}{\overline{v_{ns}^2}} = \frac{[(1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \frac{1}{g_m} + \frac{R_s^2}{h_{FE}} g_m]}{2R_s}$$

Otteniamo:

$$\frac{T_n}{T_s} = \frac{[(1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \frac{1}{g_m} + \frac{R_s^2}{h_{FE}} g_m]}{2R_s}$$

cioè:

$$\frac{T_n}{T_s} = \frac{1}{2g_m R_s} + \frac{1}{h_{fe}} + \frac{R_s}{2} \left(\frac{g_m}{h_{FE}} + \frac{g_m}{h_{fe}^2} \right)$$

Trascurando l'ultimo termine in parentesi:

$$\frac{T_n}{T_s} = \frac{1}{2g_m R_s} + \frac{1}{h_{fe}} + \frac{R_s g_m}{2h_{FE}}$$

Per $R_s = R_s^{opt} = \frac{\sqrt{h_{FE}}}{g_m}$ si trova:

$$\frac{T_n^{min}}{T_s} = \frac{1}{\sqrt{h_{FE}}} + \frac{1}{h_{fe}} \approx \frac{1}{\sqrt{h_{FE}}}$$

Per $h_{FE} = 100$ questa fornisce:

$$T_n^{min} = \frac{T_s}{10}$$

che, alla temperatura ambiente ($27^\circ C = 300^\circ K$) vuol dire una temperatura di rumore di $30^\circ K$.

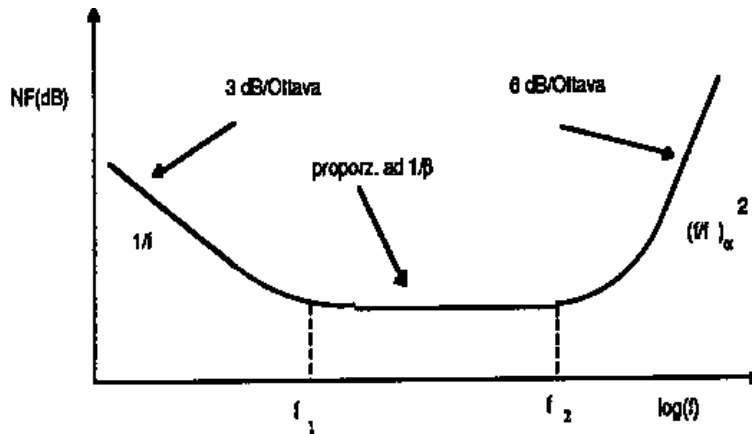


Figura 19.18:

19.14 Il rumore nei componenti elettronici

19.14.1 Introduzione

Ci siamo già occupati del rumore termico nelle resistenze. Questa è la principale sorgente di rumore nei componenti passivi. Condensatori ed induttanze non sono sorgente di rumore se non per quel che concerne la loro componente resistiva.

Un'altra componente di rumore è dovuta ai contatti tra componenti ed alle giunzioni interne dei diodi e/o transistor. Si tratta di un rumore $1/f$. La corrente di rumore per unità di radice quadrata di larghezza di banda è:

$$\frac{I_f}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{kI}{\sqrt{f}}$$

dove I è la corrente media, f la frequenza, Δf la larghezza di banda centrata sulla frequenza f e k una costante che dipende dai materiali e dalla geometria.

Ricordiamo che il rumore $1/f$ continua fino a frequenze bassissime, dell'ordine di pochi cicli/giorno.

In aggiunta al rumore termico, a quello shot ed a quello $1/f$, una ulteriore varietà, chiamato popcorn noise è stato osservato nei diodi a semiconduttore e nei circuiti integrati. Se esso è amplificato ed inviato ad un altoparlante si sente un rumore simile al caratteristico scoppiettare del granturco, da cui il nome. Questo tipo di rumore è dovuto a difetti di fabbricazione e può essere eliminato con opportuni accorgimenti nel processo di produzione.

Anche questo tipo di rumore ha uno spettro del tipo $1/f^n$ con n tipicamente uguale a 2. L'ampiezza è compresa tra 2 e 10 volte quella del rumore termico nel medesimo dispositivo.

Ci occuperemo ora del rumore nei transistor a giunzione e successivamente in quello nei FET.

19.14.2 Il rumore nel transistor bipolare

La figura di rumore per un tipico transistor bipolare è mostrata in figura (19.18).

Si ha una regione di basse frequenze, in cui il rumore dominante è quello $1/f$. Tale regione si estende fino a frequenze f_1 che variano, a seconda del tipo di transistor, tra 1 e 50 KHz. Si ha poi una regione di rumore bianco, costituito da rumore termico nella resistenza della base e rumore shot nelle giunzioni, che si estende fino a frequenze di circa 1 MHz. Si ha infine una regione di frequenze più elevate (superiori ad un certo valore f_2) in cui il rumore aumenta come f^2 . Questo aumento del NF è legato alla diminuzione del guadagno del transistor alle alte frequenze ed al fatto che il rumore prodotto alla giunzione di collettore rimane costante. Alcuni speciali transistor, prodotti per essere adoperati ad alte frequenze, hanno un valore di f_2 molto più elevato.

Sono stati sviluppati modelli che, partendo dal circuito a parametri h o da altri analoghi, ed aggiungendo sorgenti di rumore nei rami del circuito, consentono di calcolare con ragionevole accuratezza il rumore nel transistor bipolare nel campo di frequenze di interesse [17]. Le caratteristiche di rumore dei transistor sono fornite generalmente dalle case costruttrici.

Ricordiamo che il noise-factor F è definito come:

$$F = \frac{\text{Potenza di rumore in uscita}}{\text{Guadagno in potenza} \times \text{Potenza di rumore dovuto alla resistenza della sorgente}}$$

Se indichiamo con R_s la resistenza della sorgente, con i_n ed e_n i generatori di rumore nel quadripolo equivalente già incontrato e con Δf la banda passante, avremo:

$$F = \frac{\overline{i_t^2}}{\overline{i_{R_s}^2}}$$

dove i_t è la corrente totale di rumore ai terminali d'ingresso ed i_{R_s} quella dovuta alla sola resistenza R_s . Quest'ultima vale:

$$\overline{i_{R_s}^2} = \frac{4KT\Delta f}{R_s}$$

Quindi avremo, come già visto in precedenza:

$$\overline{i_t^2} = \frac{4KT\Delta f}{R_s} + \frac{\overline{e_n^2}}{R_s} + \overline{i_n^2}$$

da cui:

$$F = 1 + \frac{\overline{e_n^2}}{4KT\Delta f R_s} + \frac{\overline{i_n^2} R_s}{4KT\Delta f}$$

Ponendo ora:

$$R_{eq} = \frac{\overline{e_n^2}}{4KT\Delta f}$$

$$I_{eq} = \frac{\overline{i_n^2}}{2e\Delta f}$$

dove e è la carica dell'elettrone, l'ultima equazione scritta diventa:

$$F = 1 + \frac{R_{eq}}{R_s} + \frac{2eI_{eq}}{4KT} R_s$$

e, poichè $\frac{e}{2KT} = 20 \text{ V}^{-1}$ alla temperatura di $290^\circ K$ avremo:

$$F = 1 + \frac{R_{eq}}{R_s} + 20I_{eq}R_s \quad (19.39)$$

Il valore ottimale di R_s , cioè quello per cui la cifra di rumore è minima, si ottiene derivando quest'espressione rispetto ad R_s . Si trova:

$$R_{s(opt)}^2 = \frac{R_{eq}}{20I_{eq}} = \frac{\overline{e_n^2}}{i_n^2} \quad (19.40)$$

da cui:

$$F_{opt} = 1 + 2\sqrt{20R_{eq}I_{eq}}$$

Facciamo ora uso delle ultime due equazioni per esprimere R_{eq} ed I_{eq} in funzione di F_{opt} ed $R_{s(opt)}$. Si trova:

$$R_{eq} = \frac{1}{2}(F_{opt} - 1) R_{s(opt)}$$

$$I_{eq} = \frac{1}{2} \frac{(F_{opt} - 1)}{20R_{s(opt)}}$$

Sostituendo questa nella 19.39, si trova:

$$F = 1 + \frac{1}{2}(F_{opt} - 1) \left[\frac{R_{s(opt)}}{R_s} + \frac{R_s}{R_{s(opt)}} \right]$$

Si vede da questa espressione che, noti F_{opt} ed $R_{s(opt)}$, si può ottenere il NF per una generica resistenza R_s .

Definendo un fattore K:

$$K = \frac{1}{2} \left[\frac{R_{s(opt)}}{R_s} + \frac{R_s}{R_{s(opt)}} \right] \quad (19.41)$$

L'ultima equazione si può riscrivere come:

$$F = 1 + K [F_{opt} - 1]$$

Ammettiamo ora di sapere che $F_{opt} = 1.4$ e che $R_{s(opt)} = 1k\Omega$. Ci chiediamo quale sarà F in un circuito in cui la resistenza R_s valga $8k\Omega$. Vediamo che $\frac{R_s}{R_{s(opt)}} = 8$ e quindi, dalla 19.41 si vede che $K \cong 4$. Quindi F sarà:

$$F = 1 + 4(1.4 - 1) = 2.6$$

ed il noise factor NF varrà:

$$NF = 4.1dB$$

I valori di $\overline{e_n^2}$ ed $\overline{i_n^2}$ sono poi entrambi funzioni della corrente di collettore e crescono al crescere di questa. Tuttavia $\overline{i_n^2}$ cresce più rapidamente di $\overline{e_n^2}$. Di conseguenza $R_{s(opt)}$ diminuisce al crescere della corrente di collettore. Ne segue che, come si può vedere in figura (19.19), la curva che descrive l'andamento della cifra di rumore al variare di R_s cambia, spostandosi verso sinistra (cioè verso valori decrescenti di R_s) all'aumentare di I_c .

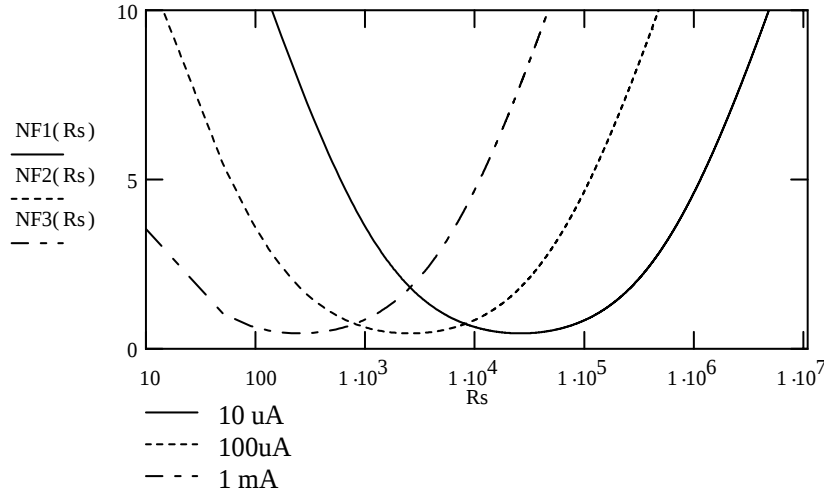


Figura 19.19:

19.14.3 Il rumore nei FET

L'andamento complessivo della cifra di rumore in un FET in funzione della frequenza è qualitativamente simile a quello dei transistor bipolari. Si ha cioè una regione di rumore $1/f$ alle basse frequenze, seguita da una regione di rumore bianco a frequenze intermedie ed infine da una zona di alta frequenza in cui il rumore cresce al crescere di f .

Il rumore $1/f$ è molto più elevato nei MOSFET che nei FET.

Ci occuperemo ora del rumore in questi ultimi. Le principali sorgenti di rumore in essi sono:

- rumore termico nella resistenza di polarizzazione del gate R_g
- rumore shot associato alla corrente di gate I_g (diodo Gate-Source con polarizzazione inversa)
- rumore termico nel canale
- rumore shot nel canale
- rumore $1/f$ nel canale

Tra questi contributi, il penultimo è fortemente soppresso a causa della elevata densità di cariche nel canale. Discutiamo ora in dettaglio gli altri contributi.

Rumore termico nella resistenza di gate

La corrente quadratica media di rumore nell'intervallo di frequenza df in R_g è:

$$\overline{i_R^2} = \frac{4KTdf}{R_g}$$

Se indichiamo con C_{in} la capacità d'ingresso del FET, la tensione quadratica media ai capi di questa sarà:

$$\overline{v_R^2} = \overline{i_{R_s}^2} Z_c^2 = \frac{4KTdf}{R_g} \frac{1}{\omega^2 C_{in}^2} = \frac{2KT}{\pi R_g C_{in}^2} \frac{d\omega}{\omega^2}$$

Vediamo che la tensione di rumore è tanto più piccola quanto più è grande R_g .

Rumore di tipo shot associato alla corrente di gate

Esso è dato da:

$$\overline{i^2} = 2eI_g df$$

con ovvio significato dei simboli. Tale corrente scorre in C_{in} se R_g è molto grande. La tensione quadratica media ai capi di C_{in} sarà:

$$\overline{v_g^2} = \frac{2eI_g df}{\omega^2 C_{in}^2} = \frac{eI_g d\omega}{\pi \omega^2 C_{in}^2}$$

Rumore termico nel canale

La corrente di rumore associata a questo è:

$$\overline{i_c^2} = \frac{4KTdf}{R_0}$$

dove R_0 è la resistenza del canale nella parte iniziale delle caratteristiche (cioè nella zona ohmica). La corrispondente tensione $\overline{v_c^2}$ al gate (l'ingresso, cui riferiamo tutte le sorgenti di rumore) è:

$$\overline{v_c^2} = \frac{\overline{i_c^2}}{g_m^2}$$

dove g_m è la transconduttanza del FET.

Si trova quindi:

$$\overline{v_c^2} = \frac{2KT}{\pi R_0 g_m^2} d\omega$$

Ponendo:

$$R_{eq} = \frac{1}{R_0 g_m^2}$$

questa si scrive:

$$\overline{v_c^2} = 2KTR_{eq} \frac{d\omega}{\pi}$$

dove si può dimostrare che $g_m = \frac{1}{R_0}$, con che:

$$R_{eq} = \frac{1}{g_m}$$

Rumore 1/f nel canale

Questo è dato da:

$$\overline{v_F^2} = A_f \frac{d\omega}{\omega}$$

Rumore complessivo

Questo sarà la somma dei contributi elencati sopra, cioè:

$$\overline{v_i^2} = \frac{2KT}{\pi R_g C_{in}^2} \frac{d\omega}{\omega^2} + \frac{eI_g d\omega}{\pi \omega^2 C_{in}^2} + 2KTR_{eq} \frac{d\omega}{\pi} + A_f \frac{d\omega}{\omega} \quad (19.42)$$

Il rumore totale nell'amplificatore a FET può ora esser calcolato, moltiplicando ciascuno dei precedenti contributi per la funzione $f(\omega)$ che descrive la risposta in frequenza dell'amplificatore, integrando su ω da 0 ad ∞ e sommando infine tutti i contributi. La funzione $f(\omega)$ rappresenta il guadagno *in potenza* dell'amplificatore, legato al guadagno in tensione A_v da: $f(\omega) = |A_v|^2$.

19.15 Appendice A

Dimostriamo ora il teorema di Wiener-Khintchine. A tale scopo premettiamo alcuni semplici teoremi, che trovano ampia applicazione nello studio del rumore. Siano $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ due funzioni del tempo, ed indichiamo con $F_1(\omega)$ ed $F_2(\omega)$ le rispettive trasformate di Fourier. Si dimostra allora che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega \quad (19.43)$$

(teorema di Parseval)

Per dimostrarlo, sostituiamo a primo membro di questa equazione, ad $x_2^*(t)$ la sua antitrasformata, ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega x_1(t)X_2^*(\omega)e^{-j\omega t}$$

scambiamo ora l'ordine di integrazione sulle variabili t ed ω a secondo membro:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_2^*(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt x_1(t)e^{-j\omega t}$$

che è uguale a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$$

Questo è appunto il secondo membro della (19.43).

Applichiamo ora questo teorema alla funzione di correlazione $\Phi(\tau)$:

$$\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v(t+\tau)dt$$

dove $v(t)$ è la tensione di rumore. Troviamo in tal modo:

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (19.44)$$

che per $\tau = 0$ ci da:

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\omega)|^2 d\omega$$

che è noto come teorema di Plancherel o teorema dell'energia. Il termine a destra di questa equazione rappresenta l'energia totale sviluppata, sull'intero spettro di frequenze. Ne segue che $|V(\omega)|^2$ può essere interpretato come la densità di energia per unità di intervallo di frequenza. La potenza media è l'energia totale divisa per T , o meglio il limite di tale rapporto per $T \rightarrow \infty$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2|V(\omega)|^2}{T} d\omega$$

dove si è modificato il limite inferiore d'integrazione nel membro destro dell'equazione (da $-\infty$ a 0) e si è moltiplicato per 2, poichè si ammette che $|V(\omega)|^2$ sia una funzione pari di ω . Abbiamo così per la densità spettrale di potenza:

$$S_v(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|V(\omega)|^2}{T}$$

Notiamo la differenza tra l'ultima equazione scritta e la (19.10). Questa aveva un T a fattore moltiplicativo, mentre l'ultima equazione scritta ha T a denominatore. Ciò deriva dal fatto che nella (19.10) avevamo fatto uso della serie di Fourier, dove i coefficienti a_n hanno un T a denominatore, mentre nella trasformata di Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

il T a denominatore è assente.

Dalla (19.44), dividendo entrambi i membri per T , effettuando una media su di un insieme (infinito) di sistemi identici e prendendo poi il limite per $T \rightarrow \infty$, si ottiene:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v(t)v(t+\tau)} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2 \frac{\overline{|V(\omega)|^2}}{T} \cos(\omega\tau) d\omega$$

dove abbiamo fatto uso della simmetria della $|V(\omega)|^2$.

Il termine a sinistra di questa equazione è la funzione di autocorrelazione $\Phi(\tau)$. Invertendo nel termine a destra il limite con l'integrazione, otteniamo:

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_v(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega = \int_0^{\infty} S_v(f) \cos(\omega\tau) df$$

Questa è una trasformata di Fourier, la cui inversa è:

$$S_v(f) = 4 \int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

Le ultime equazioni scritte costituiscono il teorema di Wiener-Khintchine.

19.16 Appendice B

Ci proponiamo in questa appendice di studiare la funzione di distribuzione temporale relativa ad eventi elementari che avvengano in modo casuale ed indipendente. Un esempio è quello di un elettrone che si muove in un materiale conduttore, subendo urti con gli atomi che incontra. Ciascun urto è un *evento* casuale, intendendosi con ciò il fatto che la probabilità che un evento abbia luogo in un piccolo intervallo di tempo compreso tra t e $t + \delta t$ è piccola ed indipendente da t . Quando diciamo "piccola" intendiamo che la probabilità di osservare due eventi nell'intervallo di tempo considerato è trascurabile. Chiamando $\nu \delta t$ la probabilità che un evento abbia luogo nell'intervallo di tempo suddetto, ci proponiamo di calcolare la probabilità $p(m, t)$ che esattamente m eventi abbiano luogo in un intervallo di tempo finito t .

Per calcolare tale probabilità, partiamo dalla considerazione che vi sono solo due modi per ottenere esattamente m eventi nell'intervallo di tempo $(0, t)$. Potremo cioè avere $(m-1)$ eventi nell'intervallo di tempo $(0, t - \delta t)$ ed uno nell'intervallo δt o m eventi nell'intervallo di tempo $(0, t - \delta t)$ e nessuno nell'intervallo δt . In formule:

$$p(m, t) = p(m-1, t - \delta t) \nu \delta t + p(m, t - \delta t) (1 - \nu \delta t)$$

Sviluppando i termini a secondo membro di questa espressione in serie di Taylor, otteniamo:

$$p(m-1, t - \delta t) \nu \delta t = p(m-1, t) \nu \delta t - \frac{\partial p(m-1, t)}{\partial t} \nu (\delta t)^2$$

$$p(m, t - \delta t) \cdot (1 - \nu \delta t) = p(m-1, t) \nu \delta t + p(m, t) - \frac{\partial p(m, t)}{\partial t} \delta t - p(m, t) \nu \delta t + \dots (\delta t)^2$$

Per cui l'ultima espressione scritta si può scrivere:

$$p(m, t) = p(m-1, t) \nu \delta t + p(m, t) - \frac{\partial p(m, t)}{\partial t} \delta t - p(m, t) \nu \delta t$$

da cui segue:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{dp(m, t)}{\delta t} = \frac{dp(m, t)}{dt} = \nu [p(m-1, t) + p(m, t)] \quad (19.45)$$

Per $m=0$ questa è (essendo $p(-m, t)=0$):

$$\frac{dp(0, t)}{dt} = \nu p(0, t)$$

che ha come soluzione:

$$p(0, t) = e^{-\nu t}$$

Per m generico possiamo riscrivere la (19.45) come:

$$e^{-\nu t} \frac{d}{dt} [e^{\nu t} p(m, t)] = \nu p(m-1, t)$$

che, integrata tra i limiti $(0, t)$ (con $p(0, 0)=1$), ci da:

$$e^{\nu t} p(m, t) = \nu \int_0^t e^{\nu t} p(m-1, t) dt$$

Questa è una formula di ricorrenza che ci consente di calcolare $p(m,t)$ a partire da $p(m-1,t)$. Conoscendo $p(0,t)$ otteniamo così:

$$e^{\nu t} p(1, t) = \nu \int_0^t e^{\nu t} e^{-\nu t} dt = \nu t$$

da cui:

$$p(1, t) = \nu t e^{-\nu t}$$

Si trova in generale:

$$p(m, t) = \frac{(\nu t)^m e^{-\nu t}}{m!}$$

Possiamo da questa calcolare la distribuzione della distanza temporale tra due eventi successivi. La probabilità che due eventi abbiano luogo separati da un tempo t è pari alla probabilità che, dato un evento, nessun evento abbia luogo per un tempo pari a t ed un evento abbia luogo nel successivo intervallino temporale δt . Cioè:

$$f(t) = p(0, t) \nu \delta t$$

dove:

$$p(0, t) = e^{-\nu t}$$

e quindi:

$$f(t) = \nu e^{-\nu t} \delta t$$

Il valor medio di m (cioè il momento di ordine 1 della distribuzione) è:

$$\overline{m} = \sum_{m=0}^{\infty} m p(m, t) = e^{-\nu t} \nu t \left[1 + \frac{\nu t}{1} + \frac{(\nu t)^2}{2!} + \frac{(\nu t)^3}{3!} + \dots \right] = e^{-\nu t} \nu t e^{\nu t} = \nu t$$

Analogamente si può dimostrare che il momento di ordine 2 (la varianza) è:

$$\sigma^2 = \overline{(m - \overline{m})^2} = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 p(m, t) - \overline{m}^2 = \overline{m}$$

19.17 Appendice C

Teoremi di Campbell e di Carson

Consideriamo un rumore casuale, originato da un gran numero di eventi indipendenti. Ciasun evento produca un impulso di una certa forma, descritta da una funzione (uguale per tutti) $f(t - t_i)$, dove t_i è l'istante in cui si è verificato l'evento ie-mo. L'evento potrà essere generico: un elettrone che urta con un atomo, una goccia di pioggia che cade, un soffio di vento durante un temporale, la ricombinazione di una coppia elettrone-lacuna in un semiconduttore, etc. La $f(t)$ è la funzione che descrive la conseguenza percettibile dell'evento, funzione del tempo. Ciò che in realtà percepiamo è la risultante di un gran numero di eventi indipendenti. Essa può esser descritta facendo uso del principio di sovrapposizione:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k f(t - t_k)$$

dove a_k rappresenta l'ampiezza dell'ie-mo evento, t_k è l'istante in cui tale evento ha avuto luogo, N è il numero totale di eventi nel tempo di osservazione T e la funzione $f(t)$ è nulla per $t < 0$. Faremo l'ipotesi che la funzione $f(t)$ sia diversa da zero solo per tempi molto minori del tempo di osservazione T .

Poichè gli eventi sono indipendenti, la distribuzione dei tempi t_k soddisfa alla statistica di Poisson, con un numero medio di eventi al secondo dato da:

$$\nu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N}{T}$$

Il valore medio aspettato per la variabile $x(t)$ è allora:

$$\overline{x(t)} = \nu \bar{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

dove $\bar{a}$ è il valor medio dell'ampiezza a_k . Il risultato espresso dalla (19.17) è noto come *teorema di Campbell del valor medio*.

La trasformata di Fourier della $x(t)$ è:

$$X(j\omega) = \sum_{k=1}^N [a_k e^{-j\omega t_k} F(j\omega)] = F(j\omega) \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega t_k}$$

La densità spettrale della potenza è:

$$\overline{S_x(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|X(j\omega)|^2}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|F(j\omega)|^2}{T} \sum_{k,m=1}^N \overline{a_k a_m e^{-j\omega(t_k - t_m)}}$$

La sommatoria a secondo membro di questa espressione può essere riscritta, separandola nella parte con $k = m$ e in quella con $k \neq m$. Quest'ultima, essendo gli a_k indipendenti tra loro ed indipendenti da t_k , può esser riscritta come:

$$\sum_{k \neq m=1}^N \overline{a_k a_m} e^{-j\omega(t_k - t_m)} = \bar{a}^2 \sum_{k \neq m=1}^N e^{-j\omega(t_k - t_m)}$$

avendo posto:

$$\overline{a_k a_m} = \bar{a}^2$$

Se la distribuzione delle ampiezze a_k è simmetrica attorno a zero, il termine in questione si annulla, poichè $\bar{a} = 0$. Ne segue che in tal caso è:

$$\overline{S_x(\omega)} = 2\nu\overline{a^2} |F(j\omega)|^2$$

dove $\overline{a^2}$ è il valore quadratico medio delle a_k . Questo è il teorema di Carson.

Se i coefficienti a_k non sono distribuiti simmetricamente attorno allo zero, il termine prima ignorato sarà presente. In tal caso si può dimostrare che è:

$$\overline{x^2(t)} - \overline{x(t)}^2 = \nu\overline{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$$

Questo è il teorema di Campbell del valor quadratico medio.

