Introduzione all'Elettronica

V. Flaminio

Maggio 2002

Capitolo 3

Uso delle trasformate di Fourier e di Laplace nella soluzione di problemi relativi a sistemi elettronici

3.1 Introduzione

Per risolvere le equazioni integro-differenziali che compaiono nel calcolo della risposta di una rete elettrica a determinati segnali applicati, é utile far uso del metodo delle trasformate. Queste infatti trasformano le equazioni integro-differenziali in equazioni algebriche, la cui soluzione é in genere molto piú agevole.

Ci limiteremo in questa sezione a fornire gli elementi minimi essenziali per affrontare e risolvere i problemi che comunemente si incontrano in elettronica.

Alcuni semplici esempi saranno anche discussi, per rendere piú esplicito l'uso del metodo.

Per approfondimenti si rimanda alla bibliografia elencata in fondo a questa sezione, in particolare alle referenze [1] ed [3].

3.2 La trasformata di Fourier

Sia data una funzione del tempo f(t). La sua trasformata di Fourier é definita come:

$$F(\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}\, dt \tag{3.1}$$

Fisicamente possiamo pensare che la f(t) sia costituita da una somma infinita di oscillazioni sinusoidali, ciascuna caratterizzata da una pulsazione ω ed un'ampiezza. La grandezza:

$$F(\omega)d\omega/2\pi$$

rappresenta l'ampiezza con cui compare in tale somma infinita l'oscillazione di frequenza compresa nell'intervallo che va da f ad $f + df$, dove $f = \omega/2\pi$.

Se la $F(\omega)$ é nota, é possibile ricavare la f(t), antitrasformando:

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}\, d\omega \tag{3.2}$$

Dalle definizioni (3.1) ed (3.2), sviluppando il termine:

$$e^{j\omega t} = cos\omega t + j sin\omega t$$

si vede facilmente che la $F(\omega)$ é reale se f(t) é una funzione pari di t, cioé se f(t)=f(-t), mentre é immaginaria se f(t) é una funzione dispari: f(t)=-f(-t).

Le seguenti proprietá della trasformata di Fourier sono spesso utili:

- *Linearitá*: se $F_1(\omega) = F[f_1(t)]$ ed $F_2(\omega) = F[f_2(t)]$ ed a_1, a_2 sono delle costanti, allora:

$$F[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

- *proprietá di scaling*: se $F(\omega) = F[f(t)]$ ed a é una costante reale, allora:

$$F[f(at)] = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$$

- *proprietá di traslazione temporale*: se $F(\omega) = F[f(t)]$ allora:

$$F[f(t-t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

- *proprietá di traslazione in frequenza*: se ω_0 é una costante reale e $F(\omega) = F[f(t)]$ allora:

$$F\left[f(t) e^{j\omega_0 t}\right] = F(\omega - \omega_0)$$

Calcoliamo ad esempio la trasformata della f(t) mostrata nel grafico superiore della figura (3.1), che rappresenta un impulso rettangolare di altezza h e durata t_1.

Facendo uso della (3.1) troviamo:

$$F(\omega) = h \int_0^{t_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{h}{j\omega}(1 - e^{-j\omega t_1}) = h t_1 \frac{sin(\omega t_1/2)}{\omega t_1/2} e^{-j\omega t_1/2}$$

L'andamento in funzione di ω della $F(\omega)$ é mostrato nel grafico inferiore della figura (3.1). Vediamo che $F(\omega)$ diminuisce all'aumentare di ω. Per ω molto grandi possiamo considerare $F(\omega) = 0$, senza commettere un errore apprezzabile. Notiamo anche che se t_1 diminuisce, il range dei valori di ω in cui $F(\omega)$ é apprezzabile si allarga.

Ad esempio, vediamo in figura (3.2) come cambia la $F(\omega)$ se dimezziamo t_1 rispetto al valore che esso aveva in figura (3.1). In questa figura la curva tratteggiata é quella relativa ad un valore di $t_1 = 1.2$ mentre quella a tratto continuo éottenuta con un valore di $t_1 = 0.6$. Le componenti di alta frequenza sono tanto piú importanti quanto piú stretto é l'impulso.

Quando si fa uso della f(t) per descrivere un'eccitazione (o una risposta) si dice che si lavora *nel dominio del tempo*. Quando si fa invece uso della sua trasformata di Fourier $F(\omega)$ si dice che si lavora *nel dominio della frequenza*.

Alle proprietá della trasformata di Fourier elencate sopra, dobbiamo aggiungerne due che riguardano la trasformata della derivata e dell'integrale di una funzione f(t). Se $f(t) \to 0$ per $t \to \infty$, allora la trasformata della derivata della f(t) é:

$$F\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = j\omega F(\omega) \tag{3.3}$$

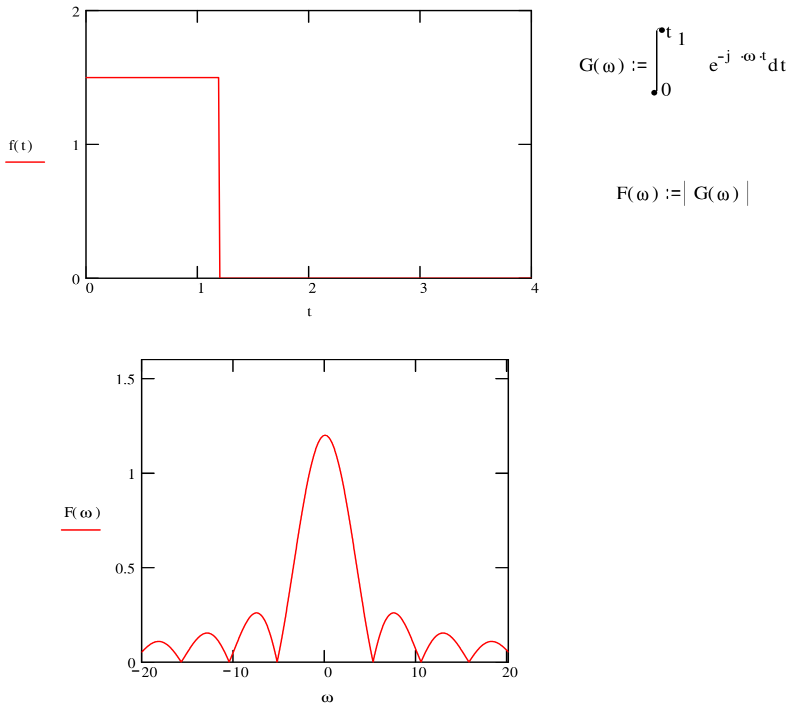

Figura 3.1:

cioé, la derivazione rispetto a t corrisponde alla moltiplicazione della trasformata della funzione iniziale per $j\omega$. Analogamente, per l'integrale troviamo:

$$F\left[\int f(t)dt\right] \;=\; \frac{F(\omega)}{j\omega} \tag{3.4}$$

cioé, l'integrazione rispetto a t corrisponde alla divisione della trasformata iniziale per $j\omega$.

Esaminiamo l'applicazione della tecnica della trasformata di Fourier al calcolo della risposta di un semplice circuito RL come quello mostrato in figura (3.3), cui sia applicato in ingresso un gradino di tensione $V(t) = V_0 u(t)$ (dove u(t) é la funzione *gradino unitario*, che é uguale a 0 per $t < 0$ e ad 1 per $t > 0$).

L'equazione di Kirckhoff per la maglia fornisce:

$$v(t) \;=\; L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

dove i(t) é la corrente nella maglia. Prendendo la trasformata di entrambi i membri di questa equazione, otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)e^{-j\omega t}dt \;=\; j\omega L\int_{-\infty}^{+\infty} i(t)e^{-j\omega t}dt + R\int_{-\infty}^{+\infty} i(t)e^{-j\omega t}dt$$

cioé, in simboli:

$$V(\omega) \;=\; (R + j\omega L)I(\omega) \equiv Z(\omega)I(\omega)$$

dove $Z(\omega)$ é la *trasformata di Fourier dell'impedenza del circuito.*

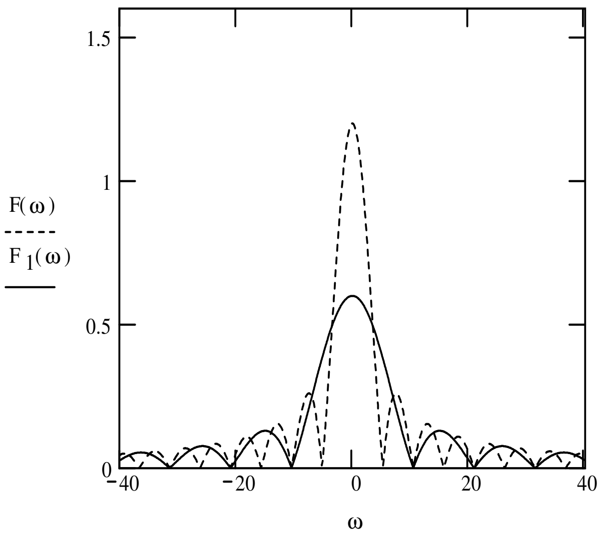

Figura 3.2:

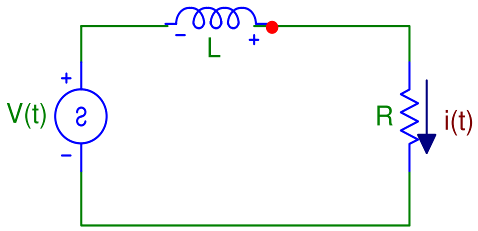

Figura 3.3:

L'incognita del nostro problema, cioé la corrente i(t) nella maglia, puó esser facilmente calcolata a partire dalla trasformata $I(\omega)$:

$$I(\omega) \;=\; \frac{V(\omega)}{R + j\omega L} \;=\; \frac{V(\omega)}{Z(\omega)} \;=\; V(\omega)Y(\omega)$$

dove $Y(\omega)$ é la trasformata di Fourier dell'ammettenza ($Y(\omega) = 1/Z(\omega)$). La $Y(\omega)$ é anche detta, nel caso generale la *funzione di Green* del problema.

Come visto, il termine induttivo dá un contributo alla tensione $V(\omega)$ pari a $(j\omega L)I(\omega)$. Ció si esprime dicendo che *la trasformata dell'impedenza associata all'induttanza é* $Z_L = j\omega L$. Tale terminologia é analoga a quella che si ha nel metodo simbolico applicato a segnali sinusoidali.

Analogamente si puó verificare che la trasformata di un'impedenza capacitiva é data da $1/(j\omega C)$, dove C é la capacitá. Infatti, per un condensatore inizialmente scarico, caricato da una corrente i(t), la differenza di potenziale ai suoi capi é data da:

$$v(t) \;=\; \frac{\int_0^t i(t')dt'}{C}$$

Prendendo la trasformata di entrambi i membri, e facendo uso della relazione:

$$F\left[\int_0^t f(t')dt'\right] \;=\; \frac{1}{j\omega}F(\omega)$$

si trova:

$$V(\omega) \;=\; \frac{1}{j\omega C}I(\omega) \;=\; Z(\omega)I(\omega)$$

che é quanto asserito. Il risultato trovato é nuovamente simile a quello noto nel caso del metodo simbolico applicato a segnali sinusoidali. Potremo quindi, in un generico problema, sostituire direttamente alle impedenza le loro trasformate ed ottenere cosí direttamente la funzione di Green del sistema.

Consideriamo ad esempio il circuito di figura (3.4):

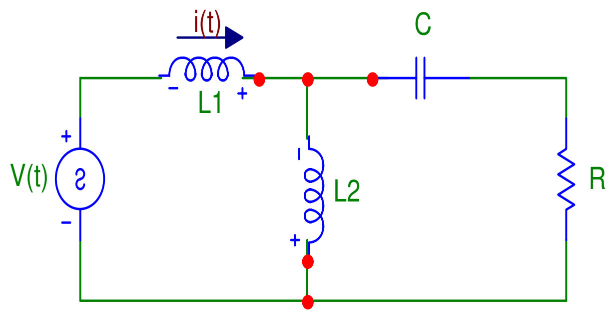

Figura 3.4:

dove:

$$Z_1 = j\omega L_1\;,\; Z_2 = j\omega L_2\;,\; Z_C = \frac{1}{j\omega C}\;,\; Z_R = R$$

Si ottiene:

$$V(\omega) \;=\; Z(\omega)\,I(\omega)$$

con:

$$Z(\omega) \;=\; (Z_C + Z_R)\|Z_2 \;+\; Z_1 \;=\; \frac{(R + 1/(j\omega C))j\omega L_2}{R + 1/(j\omega C) + j\omega L_2} + j\omega L_1$$

La $Z(\omega)$ descrive completamente le proprietá fisiche del circuito in esame. Essa é in generale una funzione complessa di ω, caratterizzata quindi da un modulo ed una fase, entrambi funzioni di ω.

3.3 Trasformata di Laplace

Se f(t) é una funzione di t, la sua trasformata di Laplace é una funzione della variabile complessa σ definita da:

$$L(s) \;=\; L\left[f(t)\right] \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{3.5}$$

dove la variabile complessa $s = \sigma + j\omega$.

L'antitrasformata é ottenuta tramite un'integrazione nel piano s complesso:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{3.6}$$

dove l'integrazione é effettuata lungo la retta indicata in figura (3.5) dalla linea tratteggiata.

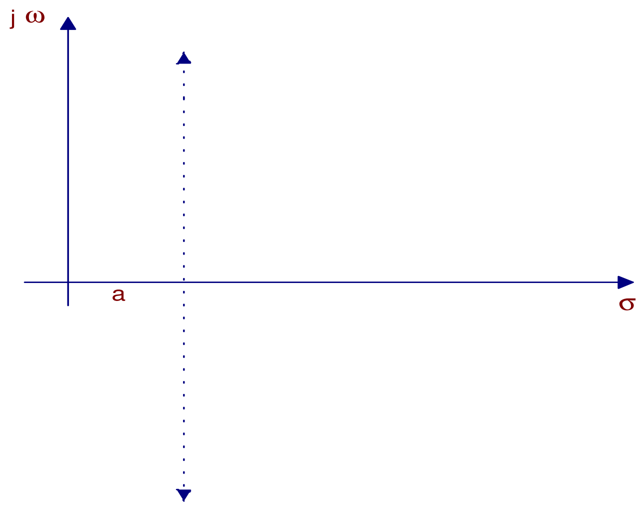

Figura 3.5:

Analogamente al caso della trasformata di Fourier, anche ora esistono alcune relazioni che é utile ricordare.

- proprietá di *scaling*:

$$L\left[f(at)\right] = \frac{1}{a}L(\frac{s}{a})$$

- proprietá di *traslazione temporale*:

$$L\left[f(t-\tau)\right] = L(s)e^{-s\tau}$$

- proprietá di *traslazione in frequenza*:

$$L\left[f(t)e^{-\alpha t}\right] = L(s+\alpha)$$

Va infine ricordata la trasformata della derivata e dell'integrale della funzione f(t). Per quel che concerne la derivata prima, abbiamo una relazione analoga a quella incontrata nel caso della trasformata di Fourier:

$$L\left[f'(s)\right] = sL(s) - f(0^+) \tag{3.7}$$

dove $f(0^+)$ é il limite destro di f(t) per t tendente a 0. Piú in generale, per la derivata n^{ma} di f(t), abbiamo:

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = s^nL(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df(0)}{dt} - .... - \frac{df^{n-1}(0)}{dt^{n-1}}$$

Per ció che concerne la trasformata dell'integrale della f(t), abbiamo:

$$L\left[\int_0^t f(t')dt'\right] = \frac{1}{s}L(s) \tag{3.8}$$

Dobbiamo notare che l'integrale (3.5) non esiste per una qualsivoglia funzione, per valori generici della parte reale σ di s. Se infatti σ é negativo, il termine $exp(-\sigma t)$ fará si che l'integrando diverga. Se invece σ é positivo il termine $exp(-st)$ tenderá a zero per t tendente ad infinito e l'integrale sará in genere finito. Piú in generale, per una generica funzione f(t) il seguente test consente di determinare quali siano i valori di σ che rendono convergente l'integrale. Si calcoli:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt$$

Se tale integrale esiste per $\sigma > \sigma_0$, dove σ_0 é una costante, allora esisterá la trasformata di Laplace della f(t) per $\sigma > \sigma_0$.

La classe delle funzioni che possono essere trasformate in tal modo é nota come *classe delle funzioni di ordine esponenziale*. Esempi di funzioni appartenenti a tale classe sono:

- $f(t) = t^n$, per la quale é: $\lim_{t\to\infty} t^n e^{-\sigma t} = 0$ per n generico, se $\sigma > 0$
- $f(t) = e^{5t}$, per la quale é: $\lim_{t\to\infty} e^{5t}e^{-\sigma t} = 0$ per $\sigma > 5$

Una funzione che non é di ordine esponenziale é: $f(t) = exp(t^2)$.

Tutte le funzioni che normalmente incontreremo nella applicazioni elettroniche saranno di ordine esponenziale. Per ulteriori dettagli vedasi la referenza [1].

Avremo spesso bisogno delle L-trasformate di alcune funzioni elementari, che riassumiamo qui di seguito:

f(t)	*L(s)*
u(t) *(funzione gradino)*	1/s
t *(rampa)*	$1/s^2$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$u(t-a)$*(gradino unitario ritardato)*	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$\delta(t)$ (funzione δ di Dirac)	1

Ricordando che una funzione di variabile complessa s che sia espressa come rapporto tra due polinomi a coefficienti reali nella variabile s é completamente individuata, a meno di una costante moltiplicativa, dai suoi poli e zeri nel piano complesso s, potremo rappresentare le F(s) appena scritte, come mostrato nelle figure (3.6, 3.7), dove un cerchietto indica uno zero ed una X un polo.

Dall'esame delle figure (3.6) e (3.7) possiamo fare le seguenti considerazioni generali:

- i poli sono o reali o complessi coniugati

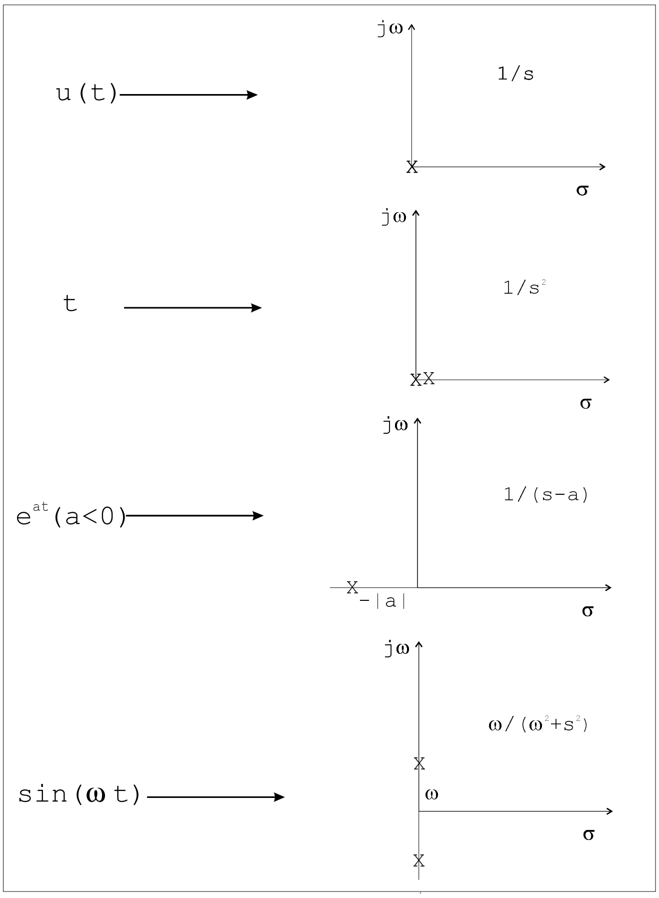

Figura 3.6:

- ad un polo reale singolo é associata una funzione f(t) di tipo esponenziale
- a due poli complessi coniugati sono associate funzioni di tipo sinusoidale
- se i poli si trovano nel semipiano destro, la f(t) diverge
- quanto piú un polo reale negativo é lontano dall'origine, tanto piú velocemente l'esponenziale tende a zero
- quanto maggiore é la distanza dall'origine di una coppia di poli complessi coniugati, tanto piú elevata é la frequenza d'oscillazione della corrispondente f(t)

Se l'equazione trasformata é del tipo:

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

dove X(s) é la trasformata dell'eccitazione, Y(s) quella della risposta e G(s) é la funzione di Green del sistema, la risposta y(t) puó essere ottenuta antitrasformando la Y(s). Per far ció si cerca di esprimere la Y(s) come somma di frazioni parziali, di ciascuna delle quali si conosca l'antitrasformata. Data la linearitá della tasformata, la risposta sará la somma delle singole antitrasformate.

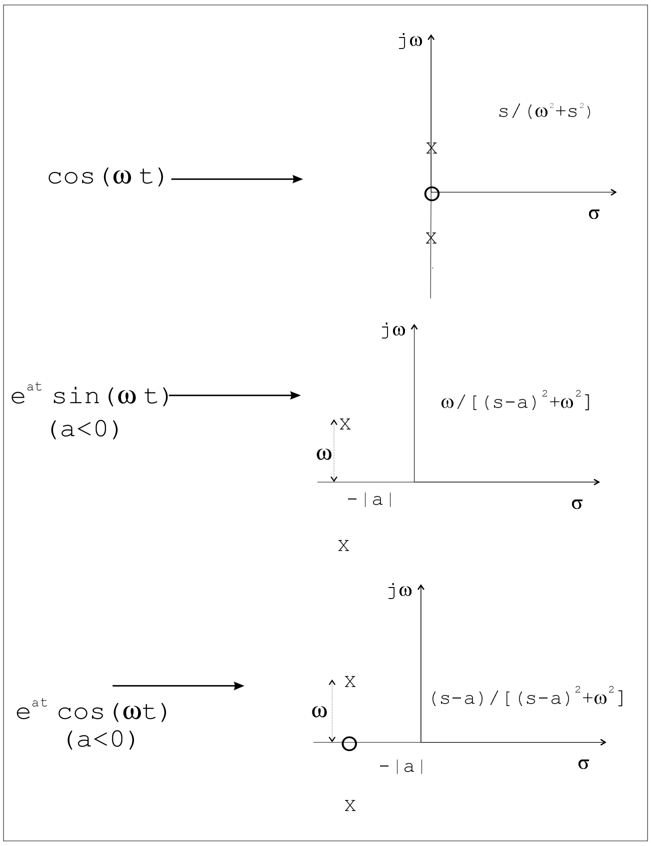

Figura 3.7:

In tale tipo di calcoli sono utili i cosiddetti teoremi *del valore iniziale* e *del valore finale*:

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s) \tag{3.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \tag{3.10}$$

Le trasformate di Laplace vengono normalmente definite per funzioni che sono nulle per $t < 0$. Ció copre la piú gran parte delle funzioni d'interesse in elettronica.

É possibile estendere il metodo delle trasformate di Laplace al caso di funzioni non nulle per $t < 0$, ma esiste allora un'ambiguitá nella trasformata inversa.

Da un punto di vista pratico esiste poca differenza tra i metodi di Fourier e di Laplace. Tutavia, poiché la trasformata di Laplace esiste per una piú ampia classe di funzioni, é normalmente piú conveniente usare quest'ultimo metodo. Ad esempio, le funzioni che crescono indefinitamente nel tempo non posseggono una trasformata di Fourier e quindi esse (che compaiono quando si debba analizzare il comportamento di sistemi instabili) debbono essere trattate con il metodo delle trasformate di Laplace.

Nelle applicazioni elettroniche si incontrano spesso trasformate di Laplace della forma:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-\nu_1)(s-\nu_2)(s-\nu_3)\cdots(s-\nu_n)} \tag{3.11}$$

dove $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ sono i le radici della funzione $D(s)$, cioé i poli della funzione $N(s)/D(s)$.

Esaminiamo ora alcuni esempi, per poi analizzare metodi generali per il calcolo dell'antitrasformata.

3.4 Esempi di calcolo di antitrasformate di Laplace

Equazione differenziale lineare del secondo ordine

Si debba risolvere la seguente equazione lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \ = \ 4e^{-3t}u(t)$$

con le condizioni inziali:

$$x(0) = 2$$
$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} \ = \ -1$$

Si prenda la trasformata di Laplace di entrambi i membri dell'equazione:

$$s^2X(s) \ - \ sx(0) - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} + 3\left[sX(s) - x(0)\right] + 2X(s) \ = \ \frac{4}{s+3}$$

Sostituendo i valori iniziali, questa fornisce:

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) \ = \ \frac{4}{s+3} + 2s + 5$$

da cui:

$$X(s) \ = \ \frac{2s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Questa puó esser riscritta come:

$$X(s) \ = \ \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

L'antitrasformata di questa si scrive in modo diretto come somma delle antitrasformate delle singole frazioni:

$$x(t) \ = \ (5e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$$

Questa é quindi la soluzione dell'equazione differenziale, con le condizioni al contorno imposte.

Esempi relativi a circuiti elettrici

In modo analogo a quanto visto nel caso delle trasformate di Fourier possiamo, anche nel caso delle trasformate di Laplace, evitare di scrivere l'equazione differenziale associata ad un dato circuito, scrivendo direttamente l'equazione algebrica che si ottiene sostituendo a ciascun componente (induttanza, capacitá, resistenza) nonché a ciascun generatore di tensione o di corrente, i rispettivi L-trasformati. Ció segue ovviamente dalla linearitá delle equazioni.

Per una resistenza R sappiamo che é:

$$v(t) \;=\; Ri(t)$$

per cui, in termini delle L-trasformate:

$$V(s) \;=\; RI(s)$$

la L-trasformata dell'impedenza associata alla resistenza R é quindi:

$$Z_R = R$$

Nel caso di un'induttanza abbiamo invece:

$$v(t) \;=\; L\frac{di(t)}{dt}$$

la cui L-trasformata é:

$$V(s) \;=\; L\left[sI(s) - i(0)\right] \;=\; LsI(s) - Li(0)$$

dove i(0) é la corrente nell'induttanza per $t = 0$.

Da questa otteniamo poi:

$$I(s) \;=\; \frac{1}{Ls}V(s) + \frac{i(0)}{s}$$

Se poi le condizioni iniziali sono tali che $i(0) = 0$ otteniamo:

$$V(s) \;=\; LsI(s)$$

per cui l'impedenza trasformata é:

$$Z_L(s) = Ls$$

Un risultato analogo a quello del metodo simbolico, con la sola sostituzione di s a $j\omega$.

Nel caso di un condensatore troviamo in modo analogo:

$$i(t) \;=\; C\frac{dv(t)}{dt}$$

da cui:

$$I(s) \;=\; C\left[sV(s) - v(0)\right] \;=\; CsV(s) - Cv(0)$$

e poi:

$$V(s) \;=\; \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{v(0)}{s}$$

Se la tensione ai capi del condensatore é inizialmente nulla: $v(0) = 0$, avremo:

$$Z_C(s) \;=\; \frac{V(s)}{I(s)} \;=\; \frac{1}{sC}$$

Ancora una volta un risultato analogo a quello del caso simbolico, con la sola sostituzione della variabile complessa s a quella immaginaria $j\omega$.

Risposta di un circuito RC passa-basso ad un gradino unitario

Consideriamo lo schema del circuito passa-basso mostrato in figura (3.8).

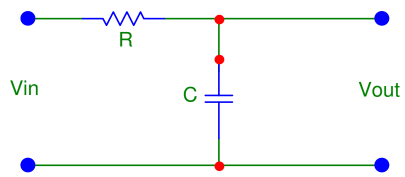

Figura 3.8:

Applicando il metodo delineato nella sezione precedente, troviamo la seguente relazione tra le trasformate dell'input e dell'output:

$$V_{out}(s) \;=\; V_{in}(s)\frac{1}{1+sRC} \;=\; V_{in}(s)\frac{1/\tau}{s+1/\tau}$$

dove $\tau = RC$. Poiché la trasformata dell'input (gradino unitario) é uguale ad 1/s, avremo quindi:

$$V_{out}(s) \;=\; \frac{1}{s\tau}\frac{1}{s+1/\tau}$$

Scriviamo il secondo membro di questa espressione nella forma:

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{s+1/\tau}$$

con a e b costanti da determinare. Uguagliando le due espressioni di $V_{out}(s)$, troviamo $a = 1$ e $b = -1$. La trasformata della risposta sará quindi:

$$V_{out}(s) \;=\; \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/\tau}$$

la cui antitrasformata é:

$$v_{out} \;=\; 1-e^{-t/\tau}$$

che é il risultato noto per tale circuito, da analisi elementari.

Risposta di un circuito RC passa-basso ad una rampa

Ammettiamo ora che al medesimo circuito RC sia applicata in ingresso una rampa di pendenza unitaria: $f(t) = t$. La funzione di trasferimento, é la stessa del caso precedente. La differenza é nel fatto che ora la trasformata dell'input é $1/s^2$. Avremo quindi:

$$V_{out}(s) \;=\; \frac{1}{\tau s^2}\frac{1}{s+1/\tau} \;=\; \frac{1}{\tau s}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{s+1/\tau}\right) \;=\; \frac{1}{s}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/\tau}\right]$$

ed in definitiva:

$$V_{out}(s) \;=\; \frac{1}{s^2}-\frac{\tau}{s}+\frac{\tau}{s+1/\tau}$$

L'antitrasformata di questa é:

$$v_{out} \;=\; t-\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

Risposta ad un gradino unitario di un circuito RL

Analogamente al caso del circuito RC, anche in quello del circuito RL di figura (3.9), cui sia applicato in ingresso un gradino unitario di tensione, possiamo scrivere in modo ovvio la relazione tra le L-trasformate dell'input e dell'output:

$$V_{out}(s) = V_{in}(s)\frac{sL}{R+sL} = V_{in}(s)\frac{s}{s+R/L} = V_{in}(s)\frac{s}{s+1/\tau}$$

con $\tau = R/L$. Da questa segue:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s}\frac{s}{s+1/\tau} = \frac{1}{s+1/\tau}$$

e quindi:

$$v_{out}(t) = e^{-t/\tau}$$

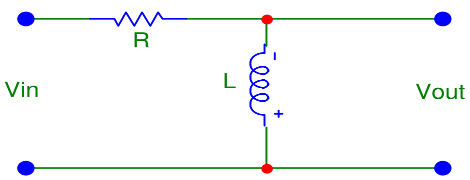

Figura 3.9:

Risposta ad una rampa del circuito RL

Questa volta la trasformata dell'eccitazione é $1/s^2$, per cui avremo:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s^2}\frac{s}{s+1/\tau} = \frac{1}{s}\frac{1}{s+1/\tau}$$

che puó esser messa nella forma:

$$V_{out}(s) = \tau\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}\right)$$

la cui antitrasformata é:

$$v_{out}(t) = \tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Notiamo che negli ultimi esempi abbiamo implicitamente ammesso che le condizioni iniziali fossero: $i(0) = 0$ nel caso del gradino applicato al circuito RL e $v_{out}(0) = 0$ nel caso della rampa.

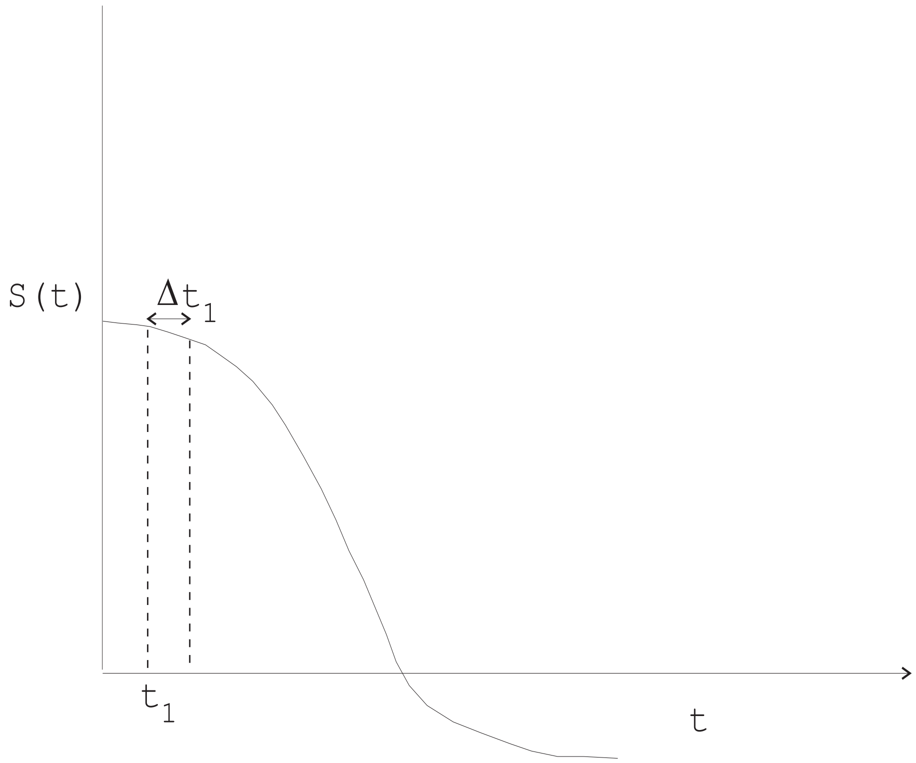

Figura 3.10:

3.5 Risposta di un circuito ad un'eccitazione di forma generica

Ngli esempi esaminati abbiamo sempre considerato eccitazioni di forma particolarmente semplice: gradini unitari o rampe. Ci proponiamo ora di esaminare il caso in cui il segnale applicato abbia una forma generica, descritta da una funzione S(t) quale ad esempio quella mostrata in figura (3.10).

Possiamo calcolare la risposta del circuito facendo uso del principio di sovrapposizione. Consideriamo cioé il segnale S(t) in un piccolo intervallo di tempo $(t_1, t_1 + \Delta t_1)$. Se Δt_1 é molto piccolo, potemo schematizzare tale segnale con una funzione δ: $A\delta(t_1)$, dove A é la grandezza $S(t_1)\Delta t_1$ (per $\Delta t_1 \to 0$). La risposta $R_1(t)$ del circuito a tale segnale sará quindi approssimabile, per $\Delta t \to 0$ con la risposta a tale funzione δ:

$$R_1(t) \;=\; A\delta(t_1)y(t - t_1)$$

dove $y(t - t_1)$ rappresenta la risposta del circuito al tempo t ad una δ applicata al tempo t_1.

Sostituendo in quest'espressione alla grandezza $A\delta(t_1)$ il termine $S(t_1)\Delta t_1$, otteniamo:

$$R_1(t) \;=\; S(t_1)y(t - t_1)\Delta t_1$$

che, per $\Delta t_1 \to 0$ si scrive:

$$R_1(t) \;=\; S(t_1)y(t - t_1)dt_1$$

Per il principio di sovrapposizione e la linearitá del sistema, la risposta del circuito al tempo t sará la somma (cioé l'integrale) della risposta a tutti gli impulsi elementari che hanno avuto luogo negli istanti t_i, con $t_i < t$. In altri termini:

$$R(t) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} R_i(t) \rightarrow \int_0^t S(t_1)y(t-t_1)dt_1$$

Ponendo in questa $\tau = t - t_1$, otteniamo:

$$R(t) \;=\; \int_0^t S(t-\tau)y(\tau)d\tau \tag{3.12}$$

Questo é noto come l'*integrale di convoluzione* delle funzioni S(t) e y(t).

Si puó facilmente dimostrare che:

$$L\left[R(t)\right] \;=\; L\left[S(t)\right] \cdot L\left[y(t)\right]$$

ovvero:

$$\int_0^\infty R(t)e^{-st}dt \;=\; \int_0^\infty S(t)e^{-st}dt \cdot \int_0^\infty y(t')e^{-st'}dt'$$

Per dimostrare tale relazione, calcoliamo la trasformata di Laplace del membro di destra della (3.12):

$$\int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t S(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

e trasformiamo l'integrale interno estendendolo fino a $+\infty$. Possiamo far ció moltiplicandolo per la funzione $u(t-\tau)$, che é nulla per $t < \tau$. L'espressione precedente diventa:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^\infty S(t-\tau)y(\tau)u(t-\tau)d\tau \;=\; \int_0^\infty y(\tau)d\tau \int_0^\infty S(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt$$

L'integrale interno é nullo per $t < \tau$. Integriamo quindi tra τ ed ∞:

$$\int_0^\infty y(\tau)d\tau \int_\tau^\infty S(t-\tau)e^{-st}dt$$

Poniamo ora $t' = t - \tau$. L'espressione precedente diviene:

$$\int_0^\infty y(\tau)d\tau \int_0^\infty S(t')e^{-s(t'+\tau)}dt' \;=\; \int_0^\infty y(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_0^\infty S(t')e^{-st'}dt'$$

che é appunto il prodotto delle trasformate:

$$Y(s) \cdot S(s)$$

3.6 Calcolo dell'antitrasformata di Laplace per una funzione esprimibile come rapporto di polinomi

Negli esempi esaminati abbiamo incontrato funzioni esprimibili come rapporti tra polinomi nella variabile complessa s, di cui abbiamo, con metodi relativamente semplici, calcolato l'antitrasformata.

Abbiamo raggiunto lo scopo esprimendo la funzione come somma di frazioni elementari, aventi ciascuna un'antitrasformata nota, e sommando poi le antitrasformate dei singoli termini. Tale decomposizione é nota come *sviluppo in frazioni parziali.*

Ammetteremo sempre che, nella funzione data, il grado del polinomio a numeratore sia minore di quello a denominatore ed analizzeremo il metodo di decomposizione distinguendo tre casi diversi.

a) *Poli reali semplici*

Supponiamo cioé che la funzione da antitrasformare, F(s) possa essere scritta come:

$$F(s) \ = \ \frac{N(s)}{(s+\alpha)D_1(s)}$$

dove il numero reale α non é una radice di $D_1(s)$. Possiamo allora scrivere F(s) nella forma:

$$F(s) \ = \ \frac{k}{s+\alpha} + F_1(s)$$

Per determinare la costante k, moltiplichiamo entrambi e membri di quest'equazione per $s+\alpha$:

$$(s+\alpha)F(s) \ = \ k + (s+\alpha)F_1(s)$$

cioé:

$$\frac{N(s)}{D_1(s)} \ = \ k + (s+\alpha)F_1(s)$$

Ponendo ora $s = -\alpha$, otteniamo:

$$k \ = \ (s+\alpha)\ F(s)|_{s=-\alpha} \ = \ \left.\frac{N(s)}{D_1(s)}\right|_{s=-\alpha} \ = \ \frac{N(-\alpha)}{D_1(-\alpha)}$$

Trovato in tal modo k, il problema dello sviluppo in frazioni parziali di F(s) é ricondotto a quello dello sviluppo di $F_1(s)$. Se questa ha un polo semplice β, il processo puó esser ripetuto relativamente ad F_1. Notiamo che:

$$F_1(s) \ = \ F(s) - \frac{k}{s+\alpha}$$

Consideriamo ad esempio la funzione:

$$X(s) \ = \ \frac{2s^2+11s+9}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Poiché questa funzione ha solo poli semplici ed inoltre il grado del polinomio a numeratore é inferiore di quello del polinomio a denominatore, lo sviluppo in frazioni parziali é:

$$X(s) \ = \ \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

dove:

$$k_1 = (s+1)\ X(s)|_{s=-1} \ = \ \left.\frac{2s^2+11s+9}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1} \ = \ 5$$

$$k_2 = (s+2)\,X(s)|_{s=-2} \;=\; \left.\frac{2s^2+11s+9}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-2} \;=\; -5$$

$$k_3 = (s+3)\,X(s)|_{s=-3} \;=\; \left.\frac{2s^2+11s+9}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-3} \;=\; 2$$

Ne segue che:

$$X(s) \;=\; \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

e quindi:

$$x(t) \;=\; \left(5e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}\right) u(t)$$

b) *Poli semplici complessi*

Poiché le radici complesse di un polinomio a coefficienti reali compaiono sempre insieme alle complesse coniugate, scriveremo F(s) nella forma:

$$F(s) \;=\; \frac{N(s)}{(s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)D_1(s)}$$

dove $\alpha \pm j\beta$ non sono radici di $D_1(s)$.

F(s) puó ora esser messa nella forma:

$$F(s) \;=\; \frac{k}{(s+\alpha+j\beta)} + \frac{k^*}{(s+\alpha-j\beta)} + F_1(s)$$

Ora determineremo k (e quindi k^*) seguendo la stessa procedura adottata nel caso di radici reali semplici.

$$k \;=\; (s+\alpha+j\beta)F(s)|_{s=-\alpha-j\beta} \;=\; \left.\frac{N(s)}{(s+\alpha-j\beta)D_1(s)}\right|_{s=-\alpha-j\beta} \;=$$

$$=\; \frac{N(-\alpha-j\beta}{(-2j\beta)D_1(-\alpha-j\beta)}$$

Una volta che k e k^* siano stati cosí determinati, i due termini complessi ottenuti possono essere combinati ponendo $k = a + jb$:

$$\frac{k}{(s+\alpha+j\beta)} + \frac{k^*}{(s+\alpha-j\beta)} \;=\; \frac{(a+jb)(s+\alpha-j\beta)+(a-jb)(s\alpha+j\beta)}{(s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)}$$

cioé:

$$\cdots \frac{2a(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{2b\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

Consideriamo il seguente esempio:

$$Y(s) \;=\; \frac{10s^2+15s-5}{s(s^2+2s+5)} \;=\; \frac{10s^2+15s-5}{s(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

la cui decomposizione in frazioni parziali é:

$$Y(s) \ = \ \frac{k_0}{s} + \frac{k}{s+1+2j} + \frac{k^*}{s+1-2j}$$

dove:

$$k_0 = sY(s)|_{s=0} = \left.\frac{10s^2+15s-5}{s^2+2s+5}\right|_{s=0} = -1$$

$$k = (s+1+2j)Y(s)|_{s=-1-2j} = \left.\frac{10s^2+15s-5}{s(s+1-2j)}\right|_{s=-1-2j} = \frac{11}{2} + j\frac{3}{2}$$

Ne segue che:

$$Y(s) \ = \ -\frac{1}{s} + \frac{11/2+j3/2}{s+1+2j} + \frac{11/2-j3/2}{s+1-2j} \ = \ -\frac{1}{s} + \frac{11(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{3\cdot 2}{(s+1)^2+2^2}$$

L'antitrasformata é allora:

$$y(t) \ = \ \left(-1+11e^{-t}cos(2t)+3e^{-t}sin(2t)\right)u(t)$$

c) *Poli multipli*
Supponiamo che F(s) abbia la forma:

$$F(s) \ = \ \frac{N(s)}{(s-s_0)^n D_1(s)}$$

dove $-s_0$ *non* é una radice di $D_1(s)$ e, nel caso generale, complesso. In tal caso scriveremo F(s) come:

$$F(s) \ = \ \frac{k_1}{s+s_0} + \frac{k_2}{(s+s_0)^2} + \cdots + \frac{k_{n-1}}{(s+s_0)^{n-1}} + \frac{k_n}{(s+s_0)^n} + F_1(s)$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa equazione per $(s+s_0)^n$ troviamo:

$$(s+s_0)^n F(s) \ = \ k_1(s+s_0)^{n-1} + k_2(s+s_0)^{n-2} + \cdots + k_{n-1}(s+s_0) +$$

$$+k_n + (s+s_0)^n F_1(s)$$

Ponendo in questa $s=-s_0$, otteniamo:

$$k_n \ = \ (s+s_0)^n \ F(s)|_{s=-s_0}$$

Per trovare ora k_{n-1}, dopo aver moltiplicato per $(s+s_0)^n$, prendiamo la derivata rispetto ad s di entrambi i membri dell'equazione:

$$\frac{d}{ds}\left[(s+s_0)^n F(s)\right] =$$

$$= \ (n-1)k_1(s+s_0)^{n-2} + (n-2)k_2(s+s_0)^{n-3} + \cdots$$

$$+2k_{n-2}(s+s_0) + k_{n-1} + 0 + (s+s_0)^n \frac{dF_1(s)}{ds} + n(s+s_0)^{n-1}F_1(s)$$

Ponendo ora $s = -s_0$, otteniamo:

$$k_{n-1} \; = \; \frac{d}{ds}\left[(s+s_0)^n F(s)\right]_{s=-s_0}$$

Prendendo invece la derivata seconda, troviamo:

$$2k_{n-2} \; = \; \frac{d^2}{ds^2}\left[(s+s_0)^n F(s)\right]_{s=-s_0}$$

In generale, per $r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$:

$$k_{n-r} \; = \; \frac{1}{r!}\frac{d^r}{ds^r}\left[(s+s_0)^n F(s)\right]_{s=-s_0}$$

Consideriamo il seguente esempio:

$$F(s) \; = \; \frac{s-2}{s(s+1)^3}$$

Questa puó essere espressa come:

$$F(s) \; = \; \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{(s+1)^2} + \frac{k_3}{(s+1)^3}$$

Applicando il metodo indicato sopra troviamo:

$$k_0 \; = \; sF(s)|_{s=0} \; = \; \left.\frac{s-2}{(s+1)^3}\right|_{s=0} \; = \; -2$$

$$k_3 \; = \; (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} \; = \; \left.\frac{s-2}{s}\right|_{s=-1} \; = \; 3$$

$$k_2 \; = \; \frac{d}{ds}\Big[(s+1)^3 F(s)\Big]_{s=-1} \; = \; \frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s}\right]_{s=-1} \; = \; \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} \; = \; 2$$

$$k_1 \; = \; \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\Big[(s+1)^3 F(s)\Big]_{s=-1} \; = \; \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left.\left(\frac{2}{s^2}\right)\right|_{s=-1} \; = \; 2$$

Si ha quindi:

$$F(s) \; = \; -\frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)^3}$$

la cui antitrasformata é:

$$f(t) \; = \; \left(-2 + 2e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{3}{2}t^2 e^{-t}\right) u(t)$$

I risultati ottenuti ci consentono di scrivere in modo immediato la risposta di un circuito quando se ne conosca la trasformata di Laplace, almeno nel caso che si presenta piú di frequente, in cui i poli sono singoli o doppi (reali o complessi).

Se la trasformata é scritta nella forma:

$$\frac{N(s)}{D(s)} \; = \; \frac{N(s)}{(s-\nu_1)(s-\nu_2)\cdots(s-\nu_n)} \tag{3.13}$$

ed i poli sono tutti singoli, la f(t) é data da:

$$f(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N(s)(s-\nu_i)e^{st}}{D(s)}\right)_{s=\nu_i} \tag{3.14}$$

Se alcuni dei poli sono doppi, l'ultima espressione scritta continua a valere per il contributo dei poli singoli, mentre un polo doppio dará un contributo aggiuntivo:

$$\left(\frac{N(s)(s-\nu_k)^2}{D(s)}\right)_{s=\nu_k} te^{\nu_k t} \;+\; \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{N(s)(s-\nu_k)^2}{D(s)}\right)\right]_{s=\nu_k} e^{\nu_k t} \tag{3.15}$$

Ulteriori dettagli possono esser trovati nelle referenze [2] , [3] e [4]. Nelle prossime sezioni analizzeremo alcuni circuiti facendo uso della tecnica delle trasformate.

3.7 Circuito LCR eccitato da un gradino unitario di tensione

Il circuito di figura (3.11) sará ora analizzato con la tecnica delle trasformate di Laplace, ammettendo che la sorgente di tensione fornisca un gradino unitario e che le condizioni iniziali siano:

$$i_L(0) = 0$$

$$v_C(0) = 0$$

Possiamo ora sostituire a ciascun componente la sua L-trasformata, con che l'equazione della maglia si scrive:

$$V(s) \;=\; \left(sL + \frac{R/sC}{R+1/sC}\right) I(s) \;=\; \left(sL + \frac{R}{1+sRC}\right) I(s) \;=$$

$$=\; \frac{L(\tau s^2 + s + R/L)}{1+\tau s} I(s)$$

dove I(s) é la trasformata della corrente $i_L(t)$ nell'induttanza, V(s) la trasformata dell'eccitazione e dove si é posto $\tau = RC$.

Da questa otteniamo:

$$I(s) \;=\; \frac{1+\tau s}{sL(\alpha + s + \tau s^2)}$$

dove abbiamo sostituito a V(s) la sua espressione (1/s) e posto $\alpha = R/L$. La trasformata della differenza di potenziale ai capi dell'induttanza é allora:

$$V_{AB}(s) \;=\; sLI(s) \;=\; \frac{1+\tau s}{\alpha + s + \tau s^2}$$

Ora potremo avere soluzioni molto diverse a seconda che le radici del polinomio a denominatore siano:

1. reali e coincidenti

2. reali e distinte

3. complesse coniugate

Le radici in questione sono date da:

$$s_i \;=\; \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\tau\alpha}}{2\tau}$$

Il discriminante é:

$$\Delta = 1 - 4\alpha\tau \;=\; 1 - 4R^2C/L$$

Le radici saranno reali e coincidenti se $\Delta = 0$ cioé se:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

saranno reali e distinte se il discriminante é positivo:

$$R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Saranno infine complesse coniugate se:

$$R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Consideriamo il caso di radici distinte (reali o complesse).

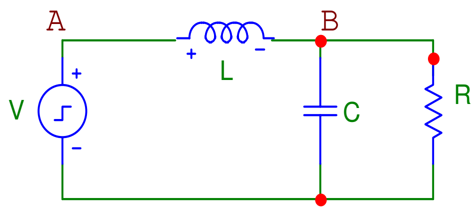

Figura 3.11:

In tal caso la trasformata della risposta puó essere scritta come:

$$V_{AB}(s) \;=\; \frac{1+\tau s}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

Usiamo ora le equazioni (3.14) e (3.15) per trovare l'antitrasformata. Troviamo:

$$v_{AB} \;=\; \frac{1+\tau s_1}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \frac{1+\tau s_2}{s_2-s_1}e^{s_2 t}$$

Se s_1 ed s_2 sono complessi, con $s_1 = s_2^* = \lambda$, allora:

$$v_{AB} \;=\; \frac{(1+\lambda\tau)e^{\lambda t} - (1+\lambda^*\tau)e^{\lambda^* t}}{\lambda - \lambda^*}$$

Poniamo ora:

$$Re\lambda = a \quad , \quad Im\lambda = b$$

Avremo allora, dopo qualche passaggio:

$$v_{AB} \;=\; \frac{e^{at}}{b}\left[(1+a\tau)sin(bt) + b\tau cos(bt)\right]$$

Notiamo che $a = -1/(2RC)$. Vediamo allora che l'oscillazione si smorza con una costante di tempo pari a 2RC. La tensione nel punto B sará:

$$v_B \;=\; v_{in} - v_{AB} \;=\; 1 - v_{AB}$$

. La figura (3.12) mostra la risposta del circuito nel caso in cui si sia scelto:

$$C = 1nF \;\;,\;\; L = 10\mu H$$

e per valori di R compresi tra 200 Ω e 500 Ω, che forniscono valori complessi per s_1 ed s_2.

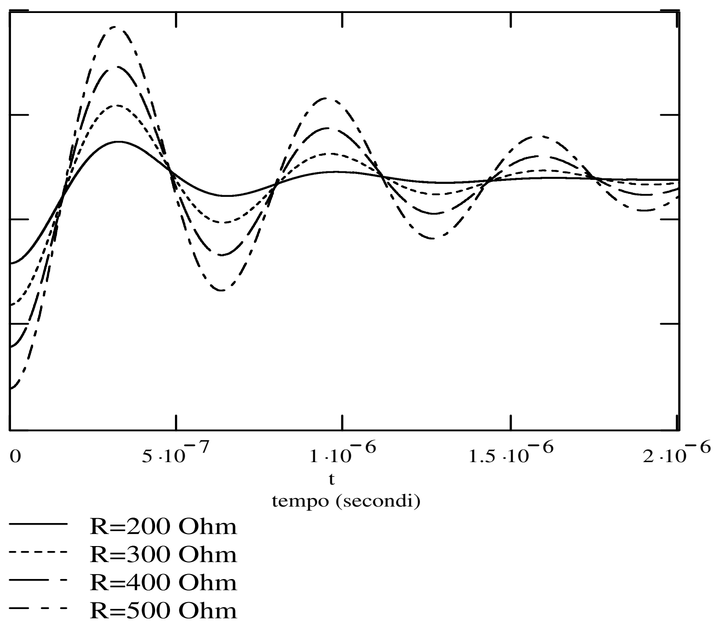

Figura 3.12:

Se i poli sono reali e distinti avremo, indicandoli con s_1 ed s_2:

$$v_{AB} \;=\; \frac{\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right) + \tau\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right)}{s_1 - s_2}$$

Notiamo che é:

$$s_1 - s_2 = \frac{\delta}{\tau} \;=\; \frac{\sqrt{\Delta}}{\tau} \;=\; \frac{\sqrt{1 - 4R^2C/L}}{RC} \;=\; \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{LC}}$$

dove si é posto: $\delta = \sqrt{\Delta}$. Abbiamo ovviamente:

$$s_1 = \frac{-1+\delta}{2\tau}$$

$$s_2 = \frac{-1-\delta}{2\tau}$$

$$s_1 - s_2 = \frac{\delta}{\tau}$$

Si ottiene infine dopo alcuni passaggi:

$$v_{AB} = \frac{\tau}{2\delta} e^{-t/2\tau} \left[\left(e^{\frac{\delta t}{2\tau}} - e^{-\frac{\delta t}{2\tau}} \right) + \delta \left(e^{\frac{\delta t}{2\tau}} + e^{-\frac{\delta t}{2\tau}} \right) \right]$$

La figura (3.13) mostra l'andamento della tensione in B nel caso in cui C ed L abbiano i medesimi valori del caso precedente e per valori di R compresi tra ($10\,\Omega$) e ($50\,\Omega$). Come si vede, la tensione nel punto B sale tanto piú lentamente quanto minore é il valore di R.

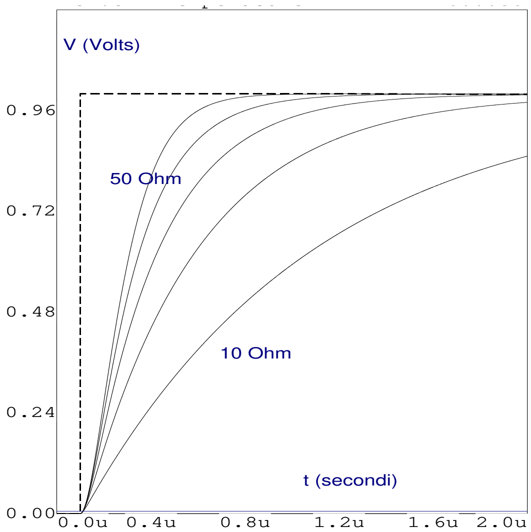

Figura 3.13:

Consideriamo ancora un circuito LRC, ora con i tre componenti messi in serie tra di loro ed in serie al generatore (vedasi la figura (3.14). Quest'ultimo fornisce anche in questo caso un gradino unitario di tensione.

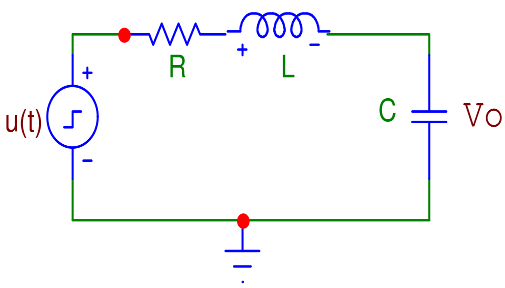

Figura 3.14:

Ammettiamo che i valori dei componenti siano:

$$R = 12\Omega \ , \ L = 2H \ , \ C = 0.02F$$

e le condizioni inziali:

$$i_L(0) = 0 \ , \ v_C(0) = 0$$

Le trasformate dei componenti e dell'eccitazione sono allora:

$$Z_R = 12 \ , \ Z_L = 2s \ , \ Z_C = 50/s \ , \ U(s) = 1/s$$

La trasformata della tensione d'uscita V_o sará allora:

$$V_o(s) \ = \ \frac{Z_C}{Z_C + Z_R + Z_L} U(s) \ = \ \frac{50/s}{50/s + 2s + 12}\left(\frac{1}{s}\right) \ =$$

$$= \ \frac{25}{(25 + 6s + s^2)\, s} \ = \ \frac{k_0}{s} + F(s)$$

dove:

$$k_0 \ = \ s\, V_o(s)|_{s=0} \ = \ 1$$

Ne segue:

$$F(s) \ = \ V_o(s) - \frac{k_0}{s} \ = \ \frac{25}{s\,(s^2 + 6s + 25)} - \frac{1}{s} \ = \ -\frac{6+s}{s^2 + 6s + 25}$$

Otteniamo infine per $V_o(s)$:

$$V_o(s) \ = \ \frac{1}{s} - \frac{6+s}{(s+3)^2 + 4^2} \ = \ \frac{1}{s} - \frac{3+s}{(s+3)^2 + 4^2} - \frac{4 \cdot 3/4}{(s+3)^2 + 4^2}$$

Si ottiene allora per l'antitrasformata:

$$v_o(t) \ = \ 1 - e^{-3t}\left(cos(4t) + \frac{3}{4} sin(4t)\right) u(t)$$

3.8 Risposta di un circuito CR ad un segnale sinusoidale

La tecnica delle trasformate di Laplace si rivela di grande utilitá anche nei casi in cui il segnale applicato sia sinusoidale. Esaminiamo il caso particolare di un circuito CR come quello di figura (3.15), in cui il segnale applicato é:

$$v_{in} \ = \ v_o sin(\omega t)$$

La funzione di trasferimento di questo circuito é:

$$G(s) \ = \ \frac{1}{1 + \frac{1}{s\tau}} \ = \ \frac{s}{s+a}$$

dove: $\tau = RC$ e $a = 1/\tau$.

la trasformata di Laplace di v_{in} é:

$$V_{in}(s) \ = \ \frac{v_o \omega}{s^2 + \omega^2}$$

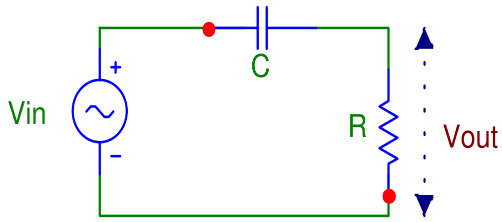

Figura 3.15:

la trasformata del segnale in uscita sará:

$$V_{out} = \frac{v_o \omega s}{(s^2+\omega^2)(s+a)} \tag{3.16}$$

che puó esser riscritta come:

$$V_{out} = \frac{v_o \omega s}{(s+j\omega)(s-j\omega)(s+a)} \tag{3.17}$$

Questa puó esser scritta come la somma di termini di cui si conosce l'antitrasformata, con i metodi descritti in precedenza. Si ottiene:

$$V_{out} = \frac{A}{s+j\omega} + \frac{B}{s-j\omega} + \frac{C}{s+a}$$

dove:

$$A = \frac{v_o \omega}{2(\omega^2+a^2)}(a+j\omega)$$

$$B = \frac{v_o \omega}{2(\omega^2+a^2)}(a-j\omega)$$

$$C = -\frac{a v_o \omega}{\omega^2+a^2}$$

Ne segue per l'antitrasformata:

$$v_{out}(t) = Ae^{-j\omega t} + Be^{j\omega t} + Ce^{-at}$$

Questa, facendo uso delle espressioni trovate per i coefficienti A, B, C, puó esser riscritta come:

$$v_{out}(t) = \frac{v_o \omega}{\omega^2+a^2}\left[\frac{1}{2}(a+j\omega)\,e^{-j\omega t} + \frac{1}{2}(a-j\omega)\,e^{j\omega t} - ae^{-at}\right]$$

Sviluppando i termini $exp(\pm j\omega t)$ e semplificando, questa diventa:

$$v_{out}(t) = \frac{v_o \omega}{\omega^2+a^2}\left[a\,cos(\omega t) + \omega\,sin(\omega t) - ae^{-at}\right] =$$

$$= \frac{v_o \omega}{\omega^2+a^2}\left[\sqrt{a^2+\omega^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}cos(\omega t) + \frac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}sin(\omega t)\right) - ae^{-at}\right]$$

Ponendo infine:

$$cos\delta = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$sin\delta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

e quindi:

$$tan\delta \; = \; \frac{a}{\omega}$$

La risposta puó esser messa nella forma:

$$v_{out}(t) \; = \; \frac{v_o \omega}{\omega^2 + a^2} \left[\sqrt{a^2 + \omega^2} sin(\omega t + \delta) - a e^{-at} \right] \tag{3.18}$$

Notiamo che é $v_{out}(0) = 0$.

Discutiamo ora questo risultato, confrontandolo con quello che avremmo ottenuto adoperando il normale metodo simbolico.

In tal caso avremmo avuto:

$$v'_{out} \; = \; v_o sin(\omega t) \frac{1}{1 + 1/j\omega\tau} \; = \; v_o sin(\omega t) \frac{1}{1 + a/j\omega} \; =$$

$$= \; v_o sin(\omega t) \frac{j\omega}{a + j\omega} \; = \; v_o sin(\omega t) \frac{j\omega(a - j\omega)}{a^2 + \omega^2} \; =$$

$$= \; \frac{\omega v_o}{a^2 + \omega^2} sin(\omega t) \cdot (\omega + ja) \; =$$

$$= \; \frac{\omega v_o}{a^2 + \omega^2} sin(\omega t) \sqrt{\omega^2 + a^2} \left[\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} + j \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \right]$$

Si ottiene infine:

$$v'_{out} \; = \; \frac{\omega v_o}{\omega^2 + a^2} \sqrt{\omega^2 + a^2} sin(\omega t) \left(cos\delta + j sin\delta \right)$$

Questa differisce dalla 3.18 per il termine $-a \, exp(-at)$ che ora é assente.

Tale differenza puó esser compresa se si pensa che, adoperando il metodo delle trasformate di Laplace noi teniamo correttamente conto del fatto che il segnale applicato é nullo per $t < 0$. Il termine $-a \, exp(-at)$ rappresenta un transiente che decade con costante di tempo $\tau = 1/a$. Il metodo simbolico invece ammette che il segnale applicato sia stazionario, cioé sia stato applicato a tempi $t \ll 0$.

3.9 Riflessione di un impulso rettangolare all'estremitá di una linea di ritardo chiusa su di un condensatore

Sappiamo che se una linea di ritardo avente impedenza caratteristica Z_0 é chiusa su di un'impedenza Z, il coefficiente di riflessione (cioé il rapporto tra l'ampiezza del segnale riflesso e quella del segnale incidente) é dato da:

$$\rho \; = \; \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \tag{3.19}$$

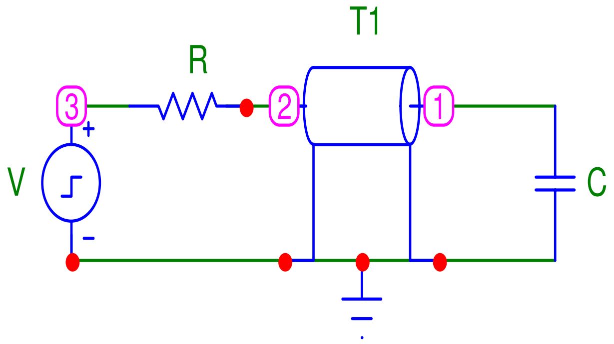

Figura 3.16:

Ci proponiamo ora di calcolare, facendo uso della tecnica delle trasformate di Laplace, la riflessione di un impulso rettangolare di durata T ed ampiezza unitaria, all'estremitá di una linea chiusa su di un condensatore, come mostrato in figura (3.16).

Un gradino unitario di tensione é descritto dalla funzione u(t), nulla per $t < 0$ ed uguale ad 1 per $t \geq 0$. La trasformata di Laplace del gradino é, come sappiamo, $1/s$. Un gradino *ritardato* di un tempo T é descritto dalla funzione $u(t-T)$, la cui trasformata é:

$$\frac{1}{s}e^{-sT}$$

Un impulso rettangolare di ampiezza unitaria e durata T puó esser ottenuto (vedi figura (3.17) sottraendo $u(t-T)$ da $u(t)$:

$$r(t) \;=\; u(t) - u(t-T)$$

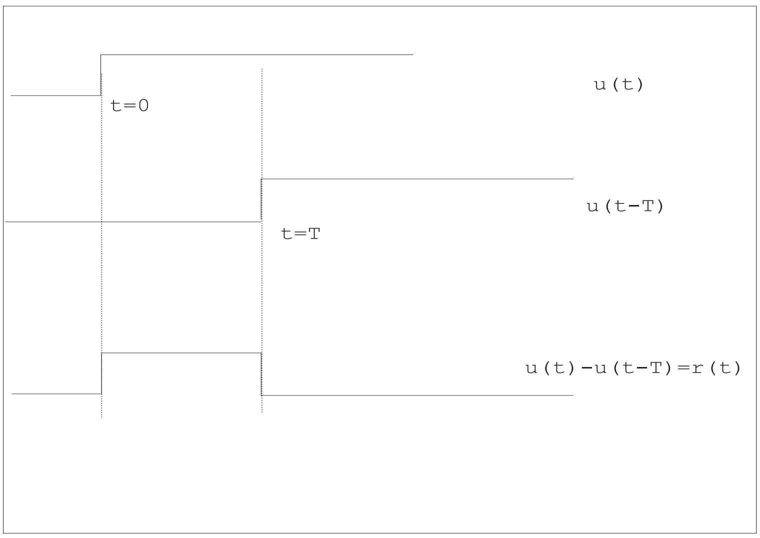

Figura 3.17:

La trasformata di Laplace di questo é:

$$\tilde{r}(s) \;=\; \frac{1}{s}(1 - e^{-sT})$$

dove abbiamo fatto uso del simbolo $\sim$ (tilde) ad indicare la trasformata. L'impulso riflesso all'estremitá della linea sará dato da:

$$v_r(t) \; = \; \rho r(t)$$

Il segnale presente ai capi del condensatore C é la somma dell'impulso incidente e di quello riflesso:

$$v_c(t) \; = \; v_r(t) + r(t) \; = \; (1+\rho) r(t) \; = \; \frac{2Z_C}{Z_C + Z_0} r(t)$$

dove Z_C é l'impedenza capacitiva, la cui trasformata é: $\tilde{Z_C} = 1/sC$.

Trasformando i due membri di questa equazione otteniamo:

$$\tilde{v}_c(s) \; = \; 2\frac{1/sC}{Z_0 + 1/sC} \cdot \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right) \; = \; 2\left[\frac{1}{s(1+s\tau)} - \frac{1}{s(1+s\tau)} e^{-sT}\right]$$

dove si é posto $\tau = CZ_0$.

Il termine $1/[s(1+s\tau)]$ puó esser riscritto come:

$$\frac{1}{s(1+\tau s)} \; = \; \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau}$$

Da cui:

$$\tilde{v}_c(s) \; = \; 2\left[\frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right) - \frac{1}{s+1/\tau}\left(1 - e^{-sT}\right)\right]$$

la cui antitrasformata é:

$$v_c(t) \; = \; 2\left[u(t)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - u(t-T)\left(1 - e^{-(t-T)/\tau}\right)\right] \tag{3.20}$$

La figura (3.18) mostra l'andamento di questa funzione nel caso in cui sia: $C = 3nF$, $Z_0 = 600\Omega$, $T = 8\mu s$.

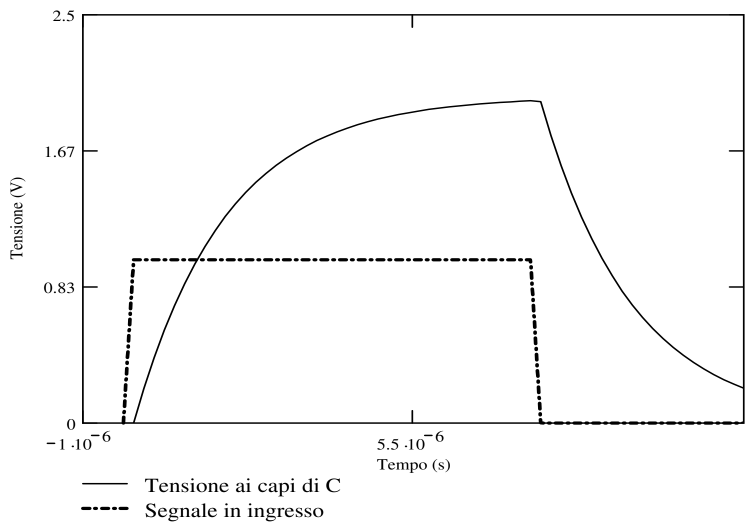

Figura 3.18:

Se misuriamo l'andamento temporale della tensione all'*ingresso* della linea, ed ammettiamo che i successivi impulsi siano temporalmente ben separati (cioé la loro frequenza sia molto bassa) ed inoltre che il ritardo t_D della linea sia grande rispetto alla lunghezza T dell'impulso, potremo vedere l'effetto della sola onda riflessa. Questa é data dalla differenza tra la soluzione giá trovata (3.20) ed r(t), cioé:

$$v_i(t) \;=\; u(t)\left(1 - 2e^{-t/\tau}\right) - u(t')\left(1 - 2e^{-t'/\tau}\right)$$

dove: $t' = t - T$. Questo segnale di tensione appare in realtá al tempo t_D (se lo zero dei tempi é quello in cui ha luogo la riflessione, come nell'esempio precedente, o al tempo $2t_D$ se lo zero dei tempi é l'istante in cui il segnale é partito dal generatore d'impulsi). L'andamento temporale di $v_i(t)$ ottenuto facendo uso di un programma di simulazione (Microcap 6 [5]) é mostrato in figura (3.19). I dati adoperati sono:

- lunghezza T dell'impulso: 50 ns
- frequenza degli impulsi: 1 MHz
- Impedenza caratteristica della linea: $Z_0 = 100\Omega$
- Ritardo della linea: $t_D = 750ns$
- Capacitá: $C = 350pF$

Il grafico in alto mostra il segnale ai capi di C. Questo, come si vede, é ritardato di 750 ns rispetto all'istante in cui il segnale é partito dal generatore. Il successivo segnale compare ai capi di C dopo ulteriori 1000 ns, ed é associato al secondo impulso in ingresso.

Il grafico inferiore mostra l'andamento dei segnali all'ingresso della linea. Vediamo due successivi impulsi inviati dal generatore, mentre il primo impulso riflesso compare con un ritardo $2t_D = 1.5\,\mu s$ dall'inizio del primo impulso.

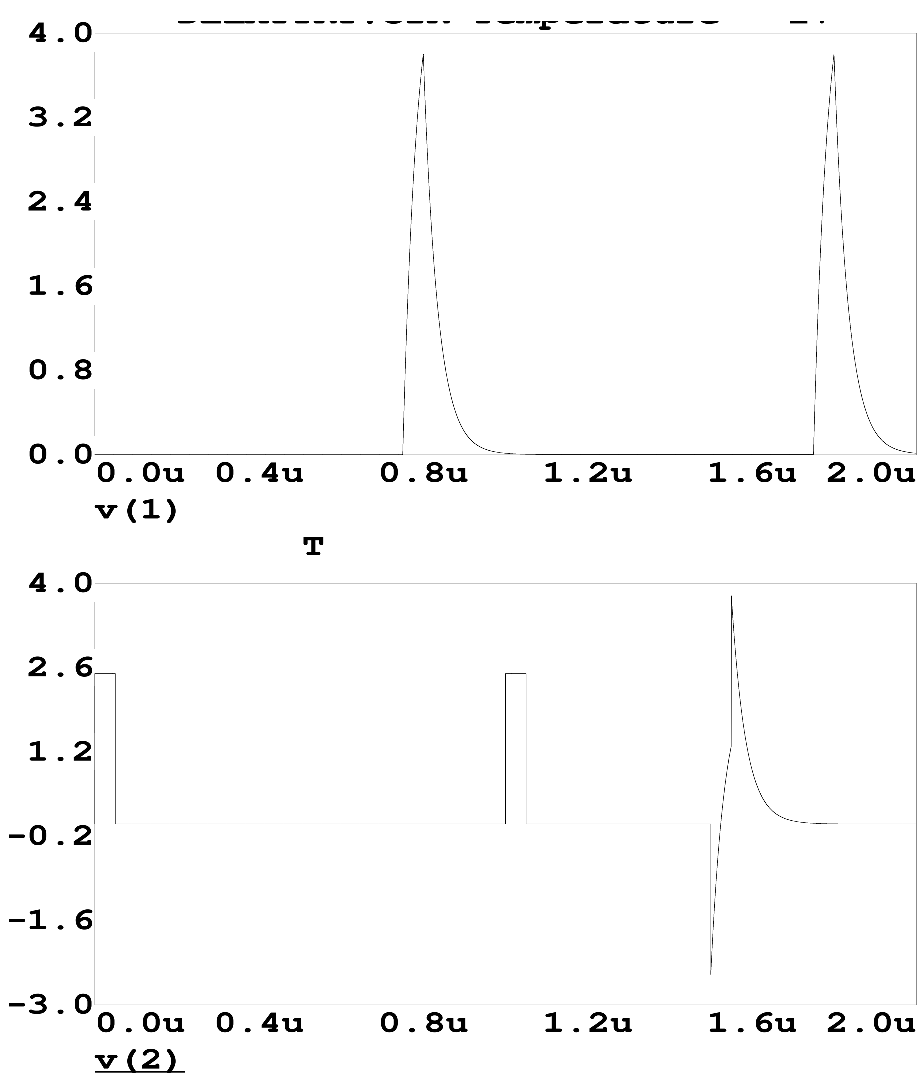
4.0
3.2
2.4
1.6
0.8
0.0
0.0u 0.4u 0.8u 1.2u 1.6u 2.0u
v(1)
T
4.0
2.6
1.2
-0.2
-1.6
-3.0
0.0u 0.4u 0.8u 1.2u 1.6u 2.0u
v(2)

Figura 3.19:

Indice