Corso di Fisica bI: secondo compitino

9 Gennaio 2001

1 Elettrostatica in presenza di conduttori

Due sfere conduttrici di raggi R_1 e R_2, unite da un sottile filo conduttore, sono poste a distanza $L >> R_1,\ R_2$. La sfera 1 è connessa ad un generatore di tensione V_0.

- Si calcolino le distribuzioni di carica sulle superfici delle due sfere all'equilibrio.

Il generatore viene ora disconnesso ed una carica q é posta a distanza d_1 (con $d_1 \ll L$) dal centro della sfera 1 (Figura 1).

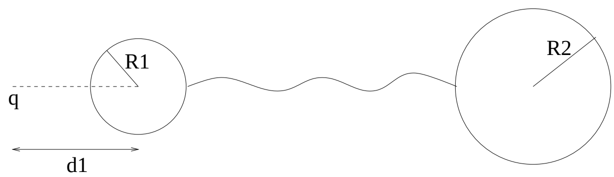

Figura 1:

- Si calcolino, in questa nuova situazione, le cariche immagini che darebbero origine ad un potenziale uguale a quello reale.

Un dipolo é ora posto a distanza d_2 dalla sfera 2. L'orientazione del dipolo è ortogonale alla congiungente il centro della sfera con il dipolo (Figura 2).

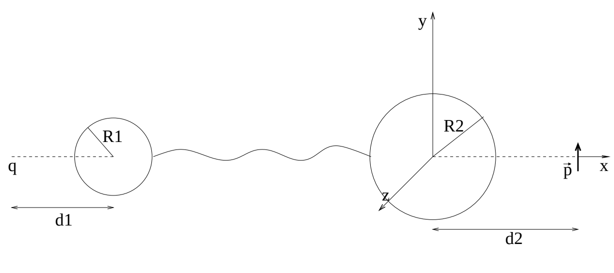

Figura 2:

- Si trovino le cariche immagini equivalenti a questa nuova configurazione;
- Si determini la forza ed il momento risentito dal dipolo. Si calcoli il momento prendendo come polo il punto in cui si trova il dipolo stesso.

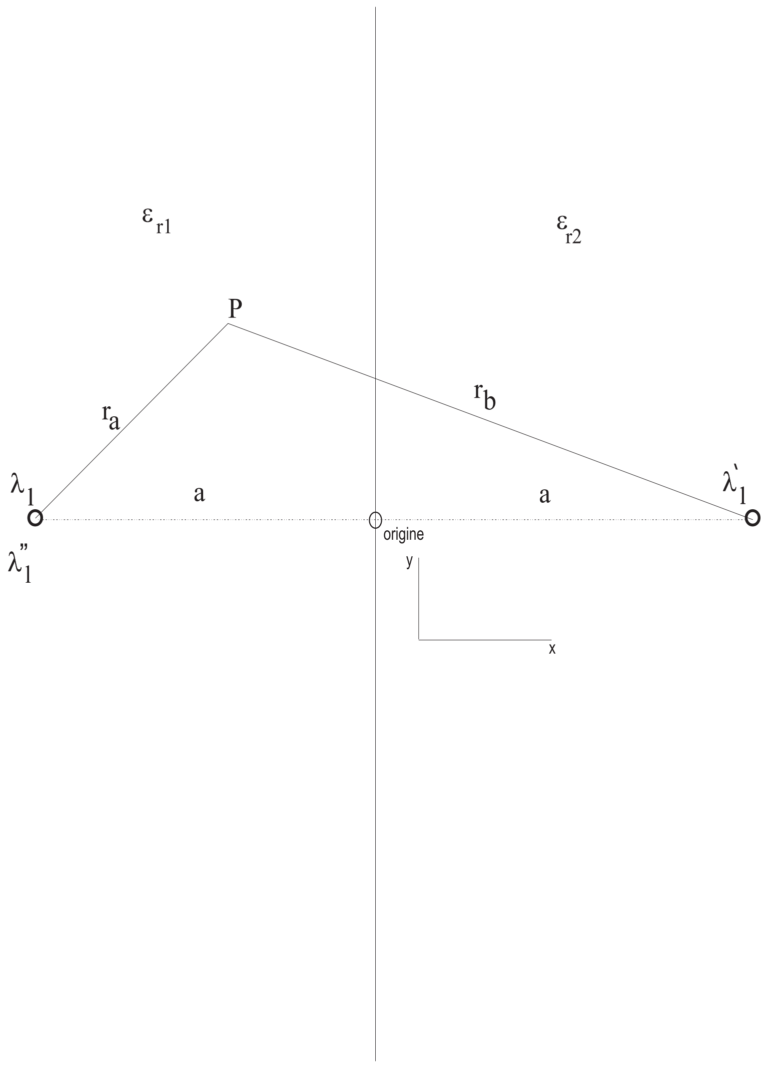

Figura 3:

2 Elettrostatica in presenza di dielettrici

Una distribuzione lineare di carica, di valore λ_l, é posta in un mezzo di costante dielettrica ϵ_{r1}, parallelamente ad un piano che separa tale mezzo da un secondo di costante dielettrica ϵ_{r2} ed ad una distanza a da tale piano (vedi figura 3).

Supponendo entrambi i mezzi di estensione (semi)infinita e la distribuzione lineare infinitamente lunga, si calcolino:

a i potenziali nei due mezzi

b il campo elettrico sulla superficie di separazione in entrambi i mezzi, in funzione della coordinata y (vedi figura)

c la densitá superficiale delle cariche di polarizzazione in funzione della medesima variabile

d la forza per unitá di lunghezza agente sulla linea

Suggerimento: Si puó procedere facendo uso del metodo delle immagini, in modo analogo al caso del problema di una carica puntifome posta di fronte ad un piano dielettrico infinito.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1

Le due sfere sono allo stesso potenziale V_0 e poichè sono poste a distanza $L >> R_1, R_2$ é lecito trascurare gli effetti di induzione, per cui:

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = V_0 \tag{1}$$

da cui si ottiene :

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 V_0 R_1 \quad Q_2 = 4\pi\epsilon_0 V_0 R_2 \tag{2}$$

Le cariche Q_1 e Q_2 sono distribuite uniformemente sulle superfici delle due sfere.

Quando il generatore di tensione viene disconnesso e la carica q avvicinata alla sfera 1, la condizione che dovrà essere soddisfatta è che la carica totale dell'insieme delle due sfere rimanga uguale a Q_0:

$$Q_0 = Q_1' + Q_2' \tag{3}$$

dove Q_1' e Q_2' sono le nuove cariche sulle sfere.

Il potenziale della configurazione mostrata in figura 1 può essere ottenuto con il metodo delle cariche immagini. Una carica immagine $q_{i_1} = -qR_1/d_1$ è posta a sinistra del centro della sfera di raggio R_1, a distanza da questo data da: $x_{i_1} = R_1^2/d_1$.

Infatti, il potenziale generato dalla carica q_{i_1} e dalla carica q ha come superficie equipotenziale a potenziale nullo, la sfera di raggio R_1 e centro coincidente con quello della sfera 1. Le condizioni al contorno da imporre sono quella che:

1. La somma delle cariche Q_1' e Q_2' sia uguale a Q_0
2. I potenziali delle due sfere siano uguali.

Avendo introdotto la carica immagine q_{i_1} all'interno della sfera 1 e nessuna carica immagine all'interno della sfera 2, dobbiamo introdurre due ulteriori cariche q_{i_1}' e q_{i_2}' tali che le cariche totali di ciascuna delle sfere siano rispettivamente uguali a Q_1' e Q_2' e che i potenziali delle due sfere siano uguali. Le cariche saranno legate dalle relazioni:

$$\begin{aligned} Q_1' &= q_{i_1} + q_{i_1}' && (4) \\ Q_2' &= q_{i_2}' && (5) \\ Q_0 &= Q_1' + Q_2' && (6) \\ & && (7) \end{aligned}$$

cioé:

$$Q_0 = q_{i_1} + q_{i_1}' + q_{i_2}'$$

La condizione di uguaglianza dei potenziali si traduce in:

$$\frac{q_{i_1}'}{R_1} = \frac{q_{i_2}'}{R_2}$$

Da queste equazioni si ottiene:

$$q'_{i_1} = \frac{(Q_0 - q_{i_1})R_1}{R_1 + R_2} \tag{8}$$

$$q'_{2_1} = \frac{(Q_0 - q_{i_1})R_2}{R_1 + R_2} \tag{9}$$

Le nuove cariche Q'_1 e Q'_2 delle due sfere sono facilmente ottenibili da queste equazioni:

$$Q'_1 \ = \ q_{i1} + q'_{i1} \ = \ -q\frac{R_1}{d_1} + R_1\frac{Q_0 + qR_1/d_1}{R_1 + R_2}$$

cioé:

$$Q'_1 \ = \ Q_0\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{q}{d_1}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \ =$$

$$= \ Q_1 + q_{i1}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

ed ovviamente:

$$Q'_2 \ = \ Q_2 - q_{i1}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Consideriamo ora la configurazione in cui il dipolo è posto davanti alla sfera 2. Esso può essere visto come due cariche $\pm q_p$ poste a distanza a. Le due cariche immagini delle cariche q_p sono poste sulle rette che congiungono rispettivamente la carica $+q_d$ e quella $-q_d$ con il centro della sfera.

Indichiamo rispettivamente con $q^+_{i_d}$ e $q^-_{i_d}$ le cariche immagini di quelle $+q_d$ e $-q_d$ del dipolo. Queste sono poste in due punti le cui distanze $A^\pm$ dal centro della sfera sono:

$$A^+ = \frac{R_2^2}{\sqrt{d_2^2 + (\frac{a}{2})^2 - 2\frac{a}{2}d_2\cos\alpha}} \simeq \frac{R_2^2}{d_2}\left(1 + \frac{a}{2d_2}\cos\alpha\right) \tag{10}$$

$$A^- = \frac{R_2^2}{\sqrt{d_2^2 + (\frac{a}{2})^2 + 2\frac{a}{2}d_2\cos\alpha}} \simeq \frac{R_2^2}{d_2}\left(1 - \frac{a}{2d_2}\cos\alpha\right) \tag{11}$$

dove α è il supplemento dell'angolo che il dipolo forma con l'asse delle x (asse che passa per il centro delle due sfere e per il dipolo, come mostrato in figura 4).

Per $\alpha = \pi/2$ otteniamo:

$$A^+ \ = \ A^- \ = \ \frac{R_2^2}{d_2}$$

ed inoltre avremo $q^+_{i_d} = q^-_{i_d} = q_{i_d}$.

Indicando poi con β l'angolo che la congiungente la carica positiva ed il centro della sfera 2 forma con l'asse x (vedi figura), otteniamo (sempre per $\alpha = \pi/2$):

$$\cos\beta \simeq 1$$

$$\sin\beta \simeq \frac{a}{2d_2}$$

Per cui le componenti x ed y di A^+ ed A^- sono:

$$A_x^+ \;=\; A^+\cos\beta \;=\; \frac{R_2^2}{d_2} \tag{12}$$

$$A_y^+ \;=\; A^+\sin\beta \;=\; \frac{R_2^2 a}{2d_2^2} \tag{13}$$

$$A_x^- \;=\; A^-\cos\beta \;=\; \frac{R_2^2}{d_2} \tag{14}$$

$$A_y^- \;=\; -A^-\sin\beta \;=\; -\frac{R_2^2 a}{2d_2^2} \tag{15}$$

Le due cariche immagini sono:

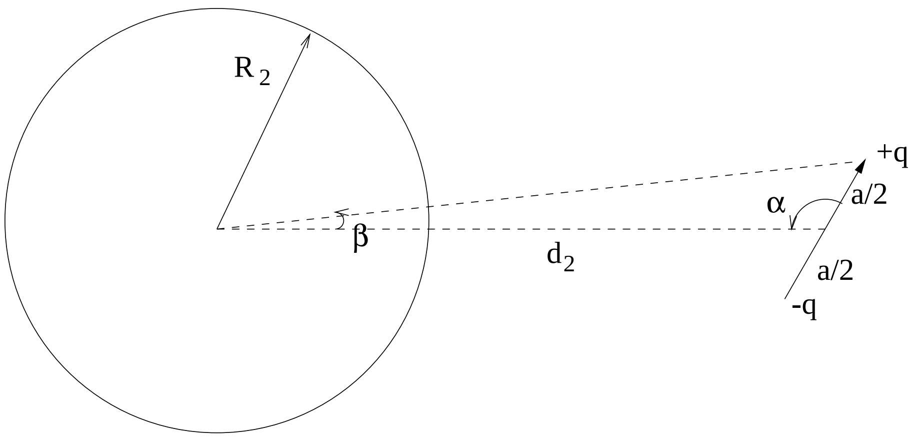

Figura 4:

$$q_{i_p} = \pm\frac{q_p R_2}{d_2} \tag{16}$$

La distanza tra le due cariche $\pm q_p$, immagini di quelle del dipolo, é:

$$a_i = \frac{R_2^2 a}{d_2^2} \tag{17}$$

Le due cariche immagini corrispondono a una carica immagine totale nulla e ad un dipolo immagine pari a :

$$\vec{p}_i = -\frac{pR_2^3}{d_2^3}\hat{y} \tag{18}$$

posto a destra del centro della sfera 2, ad una distanza da essa data da:

$$x_{p_i} = \frac{R_2^2}{d_2} \tag{19}$$

Tale dipolo immagine, insieme al dipolo $\vec{p}$, alla carica q ed alla sua immagine q_{i_1}, generano un potenziale che ha come superfici equipotenziali a potenziale nullo le superfici sferiche 1 e 2.

La soluzione sará determinata, come nel caso precedente, imponendo le condizioni al contorno :

$$q_{i_1} + q'_{i_1} + q'_{i_2} = Q_0 \tag{20}$$

$$\frac{q'_{i_1}}{R_1} = \frac{q'_{i_2}}{R_2} \tag{21}$$

da cui si ottiene di nuovo :

$$q'_{i_1} = \frac{(Q_0 - q_{i_1})R_1}{R_1 + R_2} \tag{22}$$

$$q'_{2_1} = \frac{(Q_0 - q_{i_1})R_2}{R_1 + R_2} \tag{23}$$

dato che il dipolo immagine posto entro la sfera 2 ha carica totale nulla.

La forza agente sul dipolo ha due origini: la forza $\vec{F_q}$ dovuta all'interazione tra la carica q'_{i2} ed il dipolo e quella $\vec{F_p}$ dovuta all'interazione tra i due dipoli. La forza esercitata da un campo $\vec{E}$ su di un dipolo $\vec{p}$ è data da :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{E} \tag{24}$$

Il campo generato dalla carica q'_{i2} nel generico punto di coordinata $\vec{r}$ rispetto all'origine della sfera 2é:

$$\vec{E_q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q'_{i2} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Per cui la forza che questo esercita sul dipolo é:

$$\vec{F_q} = \left(p_y \frac{\partial}{\partial y}\right) \vec{E_q} = p_y \frac{q'_{i2}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{r^5}\right]_{y=z=0,x=d_2} =$$

$$= p_y \frac{q'_{i2}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r^3\hat{y} - 3ry\vec{r}}{r^6}\right]_{y=z=0,x=d_2} = p_y \frac{q'_{i2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y}}{d_2^3}$$

Analogamente troviamo:

$$\vec{E_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(3\frac{\vec{p_i} \cdot \vec{r}}{r^5}\right) \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

Cioé:

$$E_{px} = \frac{3xyp_{iy}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$E_{py} = p_{iy} \frac{3y^2 - r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$E_{pz} = \frac{3zyp_{iy}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

Per cui:

$$\vec{F_p} = \frac{3p_y p_{iy}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{xy\hat{x} + (3y^2 - r^2)\hat{y} + zy\hat{z}}{r^5}\right]_{y=z=0,x=d_2-x_{pi}} = \frac{3p_y p_{iy}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^4}\hat{x}$$

E quindi:

$$\vec{F}_p^p = -\frac{3pp_i}{4\pi\epsilon_0(d_2 - x_{p_i})^4}\hat{x}$$

Il momento della forza che agisce su un dipolo posto in un campo esterno calcolato rispetto ad un polo coincidente con la posizione del dipolo è dato da :

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{25}$$

anche per il momento si hanno due contributi, dovuto il primo ($\vec{M}_q$) al campo generato dalla carica q'_{i2} e l'altro ($\vec{M}_p$) al campo generato dal dipolo-immagine $\vec{p}_i$:

$$\vec{M}_q = -\frac{pq'_{i_2}}{4\pi\epsilon_0 d_2^2}\hat{z} \tag{26}$$

$$\vec{M}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0(d_2 - x_{p_i})\ 3}[3(\vec{p}_i \cdot \hat{x})(\vec{p} \times \hat{x}) - (\vec{p} \times \vec{p}_i)] = 0 \tag{27}$$

Soluzione esercizio 2

2.1 Calcolo del potenziale

Il problema puó esser risolto per analogia con l'analogo problema relativo ad una carica puntiforme immersa in un dielettrico e posta di fronte ad una superficie piana che separa il primo dielettrico da un secondo di diversa costante dielettrica.

Il potenziale $V_1(x,y)$ nel primo dielettrico é quello generato dalla distribuzione data piú una seconda distribuzione di carica lineare λ_l', parallela alla prima e posta alla medesima distanza ma dalla parte opposta del piano. Il potenziale $V_2(x,y)$ nel secondo dielettrico é quello generato da una distribuzione lineare di carica λ_l'', posta dove é la distribuzione originale di carica. I potenziali vanno calcolati ammettendo che *l'intero spazio* sia riempito di un dielettrico di costante ϵ_{r1} nel primo caso ed ϵ_{r2} nel secondo .

Le condizioni al contorno da imporre sono la continuitá della componente tangenziale di $\vec{E}$ e della componente longitudinale di $\vec{D}$ sulla superficie di separazione. In termini dei potenziali V_1 e V_2 queste si scrivono:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial y} \tag{28}$$

$$\epsilon_{r1}\frac{\partial V_1}{\partial x} = \epsilon_{r2}\frac{\partial V_2}{\partial x} \tag{29}$$

I potenziali V_1 e V_2 nel generico punto P sono dati da:

$$V_1(P) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{\lambda_l}{\epsilon_{r1}}\ln r_a + \frac{\lambda_l'}{\epsilon_{r1}}\ln r_b\right] \tag{30}$$

$$V_2(P) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_l''}{\epsilon_{r2}}\ln r_a \tag{31}$$

Poiché i potenziali sono espressi in funzione della variabile radiale r mentre le condizioni al contorno sono espresse in funzione delle coordinate cartesiane x ed y sulla superficie di separazione, ci occorrono le derivate di $\ln r_a$ ed $\ln r_b$ rispetto ad x ed y. Si ha:

$$r_a = \sqrt{y^2+(a+x)^2}$$

$$r_b = \sqrt{y^2+(a-x)^2}$$

per cui:

$$\frac{\partial \ln r_a}{\partial y} = \frac{y}{y^2+(a+x)^2}$$

$$\frac{\partial \ln r_b}{\partial y} = \frac{y}{y^2+(a-x)^2}$$

$$\frac{\partial \ln r_a}{\partial x} = \frac{a+x}{y^2+(a+x)^2}$$

$$\frac{\partial \ln r_b}{\partial x} = -\frac{a-x}{y^2+(a-x)^2}$$

Si ha quindi:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{\lambda_l}{\epsilon_{r1}}\frac{y}{y^2+a^2} + \frac{\lambda_l'}{\epsilon_{r1}}\frac{y}{y^2+a^2}\right] = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\frac{y}{y^2+a^2}(\lambda_l+\lambda_l')$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{\lambda_l}{\epsilon_{r1}}\frac{a}{y^2+a^2} - \frac{\lambda_l'}{\epsilon_{r1}}\frac{a}{y^2+a^2}\right] = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\frac{a}{y^2+a^2}(\lambda_l-\lambda_l')$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y}|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{\lambda_l''}{\epsilon_{r2}}\frac{y}{y^2+a^2}\right]$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x}|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{\lambda_l''}{\epsilon_{r2}}\frac{a}{y^2+a^2}\right]$$

Le condizioni al contorno (28) e (29) ci danno allora:

$$\lambda_l'' = \lambda_l - \lambda_l'$$

$$\frac{\lambda_l}{\epsilon_{r1}} + \frac{\lambda_l'}{\epsilon_{r1}} = \frac{\lambda_l''}{\epsilon_{r2}}$$

Da queste si ricavano le incognite λ_l' e λ_l'':

$$\lambda_l' = \lambda_l\frac{\epsilon_{r1}-\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}$$

$$\lambda_l'' = \lambda_l\frac{2\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}$$

I potenziali sono quindi dati dalle (30) e (31) con i valori di λ_l' e λ_l'' trovati.

2.2 Campo elettrico

Le componenti x ed y del campo elettrico nel primo mezzo sono date da:

$$E_{1x} = -\frac{\partial V_1}{\partial x}|_{x=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\frac{a}{y^2+a^2}(\lambda_l-\lambda_l') = \frac{1}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\lambda_l\frac{a}{y^2+a^2}\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}$$

$$E_{1y} = -\frac{\partial V_1}{\partial y}|_{x=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\frac{y}{y^2+a^2}(\lambda_l+\lambda_l') = \frac{1}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\lambda_l\frac{y}{y^2+a^2}\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}$$

Le componenti x ed y del campo elettrico nel secondo mezzo sono date da:

$$E_{2x} = -\frac{\partial V_2}{\partial x}|_{x=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}\lambda_l''\frac{a}{y^2+a^2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}\lambda_l\frac{a}{y^2+a^2}\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}$$

$$E_{2y} = -\frac{\partial V_2}{\partial y}|_{x=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}\lambda_l''\frac{y}{y^2+a^2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}\lambda_l\frac{y}{y^2+a^2}\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}$$

2.3 Densitá superficiale delle cariche di polarizzazione

Sulla superficie del primo mezzo affacciata al secondo si formerá una densitá di cariche di polarizzazione data da:

$$\sigma_1 \;=\; P_{n1} \;=\; \epsilon_0\,(\epsilon_{r1}-1)\,E_{1x}$$

dove abbiamo indicato con P_{n1} la componente del vettore polarizzazione perpendicolare alla superficie.

Analogamente, sulla superficie del secondo mezzo affacciato al primo si formerá una densitá di cariche di polarizzazione data da:

$$\sigma_2 \;=\; -P_{n2} \;=\; -\epsilon_0\,(\epsilon_{r2}-1)\,E_{2x}$$

Sostituendo i valori trovati per E_{1x} e per E_{2x} troviamo:

$$\sigma \;=\; \sigma_1+\sigma_2 \;=\; \epsilon_0\left[(\epsilon_{r1}-1)\,E_{1x}-(\epsilon_{r2}-1)\,E_{2x}\right] \;=\; \frac{\lambda_l}{\pi\epsilon_{r1}}\frac{\epsilon_{r1}-\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}\frac{a}{y^2+a^2}$$

2.4 Forza per unitá di lunghezza agente sulla linea

Per calcolare la forza per unitá di lunghezza, possiamo procedere al calcolo del campo generato dalla distribuzione lineare di carica λ_l' nella posizione occupata dalla densitá di carica λ_l e moltiplicare poi per λ_l. Il campo nel punto considerato avrá diversa da zero la sola componente x, data da:

$$E_x' \;=\; -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-\lambda_l'}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\ln r_b\right]_{x=-a} \;=\; \frac{\lambda_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\frac{\epsilon_{r1}-\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\ln r_b\right]_{x=-a} \;=$$

$$= -\frac{\lambda_l}{\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\frac{\epsilon_{r1}-\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}\frac{1}{4a}$$

La forza per unitá di lunghezza é allora:

$$\frac{\lambda_l^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\frac{\epsilon_{r2}-\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2}}\frac{1}{a}$$