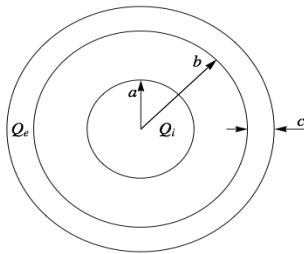


FISICA GENERALE II
INGEGNERIA BIOMEDICA
10-9-2018

1) Si consideri un condensatore costituito da due conduttori cilindrici coassiali entrambi aventi lunghezza L . Il conduttore interno di raggio a è posto all'interno del conduttore esterno avente raggio interno b e spessore c . Si supponga $b \ll L$ e $a \ll L$. Fra i conduttori è presente un materiale dielettrico soggetto a perdite avente costante dielettrica relativa ϵ_r e conducibilità specifica σ . Al sistema appena descritto è collegato un generatore di tensione che mantiene il sistema in una condizione stazionaria in cui l'elettrodo interno ha carica totale Q_i e l'elettrodo esterno ha carica totale Q_e .

Si determini:

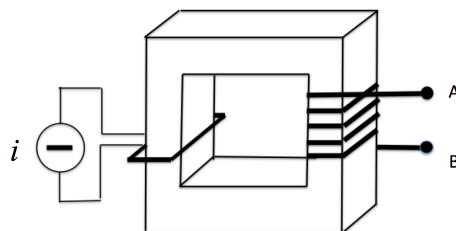
a) l'espressione del campo elettrico in tutti i punti dello spazio trascurando gli effetti di bordo,



- b) la densità di carica di polarizzazione presente sulle superfici cilindriche del dielettrico,
- c) la differenza di potenziale fissata dal generatore di tensione per mantenere il sistema in condizione stazionaria,
- d) la corrente erogata dal generatore di tensione per mantenere il sistema in condizione stazionaria,
- e) l'andamento temporale di Q_i e di Q_e dal momento in cui si distacchi dal condensatore il generatore di tensione.

2- Un ferromagnete a forma quadrata ha una spira avvolta su un lato ed N spire sull'altro lato come mostra la figura. Un generatore di corrente alternata $i = i_0 \cos(\omega t)$ è collegato alla singola spira. Sia s la sezione del ferromagnete, μ la permeabilità assoluta ed $l \gg (s)^{1/2}$ il perimetro del ferromagnete.

- a) Calcolare la differenza di potenziale che si crea ai capi **A** e **B** dell'avvolgimento.
- b) Una resistenza R viene applicata all'avvolgimento, calcolare il modulo del campo magnetico nel ferromagnete in condizioni stazionarie.
- c) Determinare il valore dell'induttanza ai capi **A** e **B**.



Traccia della soluzione.

1) Il sistema di conduttori ha la simmetria di un cilindro. Definiamo un sistema di coordinate cilindriche avente $\hat{z}$ parallelo all'asse dei conduttori ed origine O posta al centro del cilindro conduttore interno.

Il sistema è invariante per rotazioni arbitrarie attorno a $\hat{z}$. Il campo elettrico si può scrivere in generale come

$$\vec{E}^p(\vec{r}) = \hat{r} E_r(r, z) + \hat{z} E_z(r, z) + \hat{\varphi} E_\varphi(r, z).$$

Nel limite $l \rightarrow \infty$ il sistema è invariante per traslazioni lungo $\hat{z}$, quindi $\vec{E}^p$ non può dipendere dalla coordinata z , in definitiva:

$$\vec{E}^p(\vec{r}) = \hat{r} E_r(r) + \hat{z} E_z(r) + \hat{\varphi} E_\varphi(r).$$

Il sistema è invariante per riflessioni rispetto ad un qualsiasi piano contenente l'asse dei cilindri, quindi $\vec{E}^p \cdot \hat{\varphi} = 0$. In fine il sistema è invariante per riflessioni rispetto ad un qualsiasi piano perpendicolare a $\hat{z}$ nel limite $l \rightarrow \infty$, quindi $\vec{E}^p \cdot \hat{z} = 0$.

In definitiva
$$\vec{E}^p(\vec{r}) = \hat{r} E_r(r).$$

Gli stessi argomenti ci portano a concludere che

$$\vec{D}^p(\vec{r}) = \hat{r} D_r(r).$$

La legge di Gauss ci permette di definire $D_r(r)$.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \rho_{\text{cond}}(\vec{r}) dV$$

scegliamo come volume Ω un cilindro di raggio r e lunghezza l .

$$2\pi r \cdot l \cdot D_r(r) = Q_{\text{cond}} \text{ entro } r$$

quindi

$$D_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq r < a \\ Q_i / (2\pi r l) & \text{per } a \leq r < b \\ 0 & \text{per } b \leq r < b+s \\ (Q_i + Q_e) / (2\pi r l) & \text{per } b+s \leq r \end{cases}$$

Da cui:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{per } 0 \leq |\vec{r}| < a \\ \hat{r} \frac{Q_i}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r l} & \text{per } a \leq |\vec{r}| < b \\ \vec{0} & \text{per } b \leq |\vec{r}| < b+s \\ \hat{r} \frac{Q_i + Q_e}{2\pi \epsilon_0 r l} & \text{per } b+s \leq |\vec{r}| \end{cases}$$

2) La densità di carica di polarizzazione è data da

$\sigma_{\text{pol}} = \vec{D} \cdot \hat{n}$ dove $\hat{n}$ è il vettore uscente dal dielettrico e perpendicolare alla superficie.

Sulle superficie interne del dielettrico

$$\sigma_{\text{pol}} = -\vec{D}(a\hat{e}) \cdot \hat{r} = -\frac{\chi Q_i}{2\pi \epsilon_r a l}$$

sulle superficie esterne

$$\sigma_{\text{pol}} = \vec{D}(b\hat{r}) \cdot \hat{r} = +\frac{\chi Q_i}{2\pi \epsilon_r b l}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad V(\hat{r}_a) - V(\hat{r}_b) &= \int_{\hat{r}_a}^{\hat{r}_b} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \\
 &= \int_{\hat{r}_a}^{\hat{r}_b} \frac{Q_i}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r l} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{Q_i}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \ln r \Big|_a^b = \\
 &= \frac{Q_i}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \cdot \ln \frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

4) La densità di corrente nel dielettrico è data da

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$I = \int_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{dove } \Omega \text{ è un qualsiasi cilindro}$$

coassiale al conduttore interno ed avente raggio compreso fra a e b .

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r \cdot l \cdot \hat{r} \cdot \sigma \frac{Q_i}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r l} = \sigma \frac{Q_i}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

L'equazione di continuità afferma che

$$I_{\text{uscite da } \Omega} = - \frac{dQ_{\text{in } \Omega}}{dt}$$

se il sistema è in condizioni stazionarie $\frac{dQ_{\text{in } \Omega}}{dt} = 0$

e la corrente totale uscente da Ω deve essere nulla.

In definitiva il generatore deve erogare una corrente

$$I_{\text{entrante in } \Omega} \text{ pari a } \sigma \frac{Q_i}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

4) Distaccando il generatore si ha

$$-\frac{d Q_{in\alpha}}{dt} = I_{usante\ da\ \alpha} = \sigma \frac{Q_{in\alpha}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

da cui $Q_{in\alpha} = k \cdot e^{-t \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$

Per $t=0$ $Q_{in\alpha} = Q_i$ quindi

$$Q_i(t) = Q_i e^{-t \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

La carica totale presente sul sistema al tempo iniziale, prima del distacco del generatore, è $Q_i + Q_e$,

La carica totale si conserva, quindi

$$Q_i(t) + Q_e(t) = Q_i + Q_e$$

$$\begin{aligned} Q_e(t) &= Q_i + Q_e - Q_i(t) = \\ &= Q_e + Q_i(1 - e^{-t \sigma / \epsilon_0 \epsilon_r}) \end{aligned}$$

Esercizio 2

calcolo della fem ; $\mathcal{E}_{em} = - N \frac{d\phi}{dt}$

$$\phi = BS ; \int H dl = i_0 \cos \omega t \quad H = \frac{i_0}{\ell} \cos \omega t$$

$$B = \mu H \quad \frac{B}{\mu} = \frac{i_0 \cos \omega t}{\ell} \quad B = \frac{\mu i_0}{\ell} \cos \omega t$$

$$\phi = \frac{S \mu i_0}{\ell} \cos \omega t$$

$$2a) \quad \boxed{\mathcal{E}_{em} = + \frac{N i_0 \mu S \omega}{\ell} \sin \omega t}$$

Calcolo del campo magnetico con resistenza

$$\int H dl = \sum i_i \Rightarrow H \ell = N i + i_0 \cos \omega t \quad (*)$$

$$R i = N \frac{d\phi}{dt} ; R i = - N S \frac{dB}{dt}$$

$$i = - \frac{N S}{R} \cdot \frac{dB}{dt} \quad \text{dalla } (*) \quad \frac{B \ell}{\mu} = - \frac{N^2 S}{R} \frac{dB}{dt} + i_0 \cos \omega t$$

$$i = i_0 e^{j\omega t} \quad B = B_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\frac{B_0 \ell}{\mu} e^{j(\omega t + \phi)} = - \frac{N^2 S}{R} B_0 S j \omega e^{j(\omega t + \phi)} + i_0 e^{j\omega t}$$

$$\frac{B_0 \ell}{\mu} = -j \frac{N^2 \omega S B_0}{R} + i_0 e^{-j\phi}$$

$$2b) \quad \boxed{|B_0| = \frac{i_0}{\left[\left(\frac{\ell}{\mu} \right)^2 + \frac{N^4 \omega^2 S^2}{R^2} \right]^{1/2}}}$$

$$2c) \quad L = \frac{\phi}{i} = \frac{N B S}{i} ; \int H dl = N i ; B = \frac{\mu N i}{\ell}$$

$$2c) \quad \boxed{L = \frac{\mu N^2 S}{\ell}}$$