

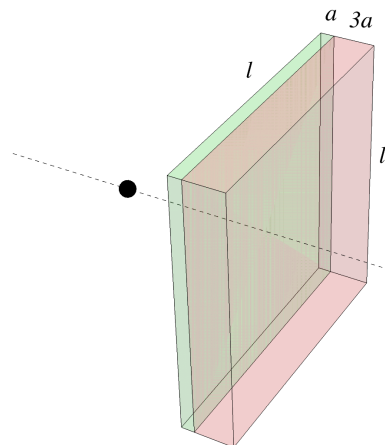
FISICA GENERALE II
INGEGNERIA BIOMEDICA
13-2-2019

1) Si consideri un sistema di cariche costituito da due lastre **A** e **B** quadrate sottili di lato l . La lastra **A**, posta sulla sinistra, ha spessore a ($l \gg a$) ed al suo interno è presente una densità di carica per unità di volume uniforme ρ . La lastra **B** si affaccia sulla faccia destra della lastra **A** ed ha spessore $3a$. Sapendo che il sistema è nel suo complesso neutro e che il campo elettrico sul bordo sinistro della lastra **A** è nullo (cioè quello che non si affaccia sulla lastra **B**), si determini:

a) Il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio nel limite che le lastre siano infinitamente estese ($l \rightarrow \infty$).

b) Assumendo $\rho > 0$ si ponga una particella puntiforme di massa m e carica $q < 0$ sull'asse passante per i centri delle due lastre alla sinistra della lastra **A** ed a distanza d da essa. Si determini l'energia cinetica minima da fornire alla particella carica in modo che essa attraversi le due lastre. Si identifichino infine direzione e verso della velocità iniziale. Si consideri la particella soggetta solamente alla forza esercitata dal campo elettrico del punto a.

c) Si determini l'energia elettrostatica necessaria ad assemblare la configurazione delle due lastre.



2) Un solenoide di lunghezza L , sezione S e numero di spire N è collegato ad una batteria di tensione V_0 tramite un interruttore **I**. Internamente al solenoide è presente un cilindro superconduttore, coassiale al solenoide, di lunghezza L e sezione $a < S$. Ad un dato istante viene chiuso l'interruttore:

a) Calcolare il campo magnetico all'interno del solenoide.

b) Quanto vale la carica totale che al tempo t_0 è fluita sulla superficie del cilindro conduttore?

c) Il conduttore viene sostituito con un cilindro con le stesse dimensioni ma con permeabilità μ e conducibilità trascurabile. Determinare le nuove correnti alla superficie del cilindro.

ESERCIZIO 1

Definiamo il versore $\hat{n}$ come il versore perpendicolare alle lastre diretto dalla lastra di spessore a a quella di spessore b .

1. Dalla legge di Gauss segue che la componente parallela ad $\hat{n}$ del campo elettrico alla sinistra della lastra di spessore a è nullo. Definiamo x come la distanza del bordo sinistro della lastra A. A causa dell'invarianza per traslazioni parallele alla lastra, il campo elettrico può dipendere solo da x . All'interno della stessa si ha dalla legge di Gauss:

$$\mathbf{E}(x) \cdot \hat{n} = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

La densità di carica della seconda lastra è data da:

$$\rho_2 l^2 \cdot 3a + \rho l^2 a = 0 \Leftrightarrow \rho_2 = -\frac{\rho}{3}$$

e dalla legge di Gauss si ricava:

$$\text{per } x > a \mathbf{E}(x) \cdot \hat{n} - \mathbf{E}(a) \cdot \hat{n} = \frac{\rho_2(x-a)}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \mathbf{E}(x) \cdot \hat{n} = -\rho \frac{x-4a}{3\epsilon_0}$$

Le componenti di $\mathbf{E}$ ortogonali ad $\hat{n}$ si annullano essendo il campo conservativo.

Il potenziale elettrostatico V è uniforme e pari a 0 nel semispazio sinistro. All'interno della lastra A il potenziale si scrive:

$$\text{per } x < a V(x) = -\int_0^x \mathbf{E}(\xi) \cdot \hat{n} d\xi = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}$$

analogamente:

$$\text{per } x \geq a V(x) - V(a) = -\int_a^x \mathbf{E}(\xi) \cdot \hat{n} d\xi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4a^2 - 8ax + x^2}{6}$$

2. Il campo elettrico è parallelo a $\hat{n}$, ne consegue che la componente perpendicolare ad $\hat{n}$ della quantità di moto (e quindi della velocità) si conserva. Scomponiamo la velocità della particella nelle due componenti v_n parallela ad $\hat{n}$ e $v_\perp$ perpendicolare ad $\hat{n}$. Dalla conservazione dell'energia si deduce che l'energia cinetica minima necessaria per superare la barriera di potenziale è:

$$\frac{1}{2}m(v_n^2 + v_{\perp}^2) + qV(-d) = \frac{1}{2}m(v_{\perp}^2) + qV(4a) \Leftrightarrow v_n = \sqrt{\frac{2}{m}q(V(4a) - V(0))} = \sqrt{-\frac{2q}{m} \frac{2a^2\rho}{\epsilon_0}}$$

L'energia cinetica è minima quando $v_{\perp} = 0$. La direzione della velocità deve essere rivolta verso la

lastra A

3. L'energia di configurazione è data dall'integrale di volume:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) dv = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\int_0^a \frac{\rho^2 x^2 l^2}{2} dx - \int_a^{4a} \frac{\rho^2}{3} \frac{4a^2 - 8ax + x^2}{6} l^2 dx \right) = \frac{37}{108} \frac{a^3 \rho^2}{108\epsilon_0}$$

ESERCIZIO 2

La tensione della batteria si contrappone alla variazione di flusso. Tenendo conto che nel cilindro superconduttore il flusso è nullo la superficie investita è $S-a$

$$V_0 = \frac{d}{dt} \varphi = N \frac{dB}{dt} (S-a)$$

da cui

$$\frac{dB}{dt} = \frac{V_0}{N(S-a)}$$

Integrando si ottiene il campo induzione B

$$B(t) = \frac{V_0}{N(S-a)} t$$

Calcolo di $i(t)$: Il campo magnetico sulla superficie $(S-a)$ è anche

$$B(t) = \mu_0 \frac{N}{L} i(t)$$

Questo ci permette di calcolare la corrente:

$$i(t) = \frac{V_0 L}{\mu_0 N^2 (S-a)} t$$

Integrando la corrente si ottiene la carica. È importante moltiplicare per N se vogliamo la corrente totale che scorre sulla superficie del conduttore

$$q = N \int_0^{t_0} i(t) dt$$

$$q = \frac{V_0 L t_0^2}{2\mu_0 N (S-a)}$$

Calcolo della nuova corrente:

Con la sostituzione del cilindro il flusso è dato dalla somma dei flussi nelle superfici $(S-a)$ ed a . I campi magnetici sono diversi nei due flussi

$$\varphi = NB_1(S-a) + NB_2a$$

date le relazioni di B con H si ha

$$\varphi = N \mu_0 H (S-a) + N \mu H a$$

Anche in questo caso vale

$$V_0 = \frac{d\phi}{dt}$$

e quindi ricavando H dalla relazione precedente ed integrando il flusso si ottiene

$$H = \frac{V_0 t}{N \mu_0 (S - a) + N \mu a}$$

Le correnti di magnetizzazione sono determinate dalla relazione

$$i_m = \chi_m H L$$

che fornisce il seguente risultato

$$i_m = \frac{\chi_m L V_0 t}{N (\mu_0 (S - a) + \mu a)}$$