Fisica Generale II
Ingegneria Biomedica
7/ 1/ 2019

1-Una distribuzione di carica sferica, positiva e di raggio $\mathbf{r_0}$, ha una densità che dipende dal raggio della forma $\boldsymbol{\rho(r)=\alpha/r}$.

a)Determinare il campo elettrico in tutto lo spazio.

b)Quanto vale il potenziale al centro della distribuzione?

c)Due cariche elettriche $\mathbf{-q}$, identiche, vengono posizionate internamente alla distribuzione. Calcolare le posizioni di equilibrio delle due cariche compresenti nella distribuzione.

2- Due conduttori sottili rettilinei infinitamente lunghi sono disposti sul piano **xy** di un sistema di riferimento cartesiano. I fili corrono paralleli all'asse **x** e sono posti a distanza **a** l'uno dall'altro. Il più vicino all'asse **x** è percorso da una corrente **I** parallela ad **x** e quello più lontano è percorso da una corrente **3I** parallela alla prima.

a) Determinare tutti i punti del piano **xy** in cui il campo dell'induzione magnetica **B** è nulla.

b) Si dispone un terzo conduttore sottile percorso da una corrente $\mathbf{I_3}$ sulla retta identificata nel precedente quesito. Determinare intensità e verso di $\mathbf{I_3}$ tale per cui la forza esercitata su ciascuno degli altri due conduttori è nulla.

c) Si disponga sul piano **xy** a distanza **b** del conduttore percorso dalla corrente $\mathbf{I_3}$ una spira quadrata di lato **b** avente un lato parallelo ad **x**.
Si spengano ora tutte le sorgenti di corrente $\mathbf{(I = 3I = I_3 = 0)}$ e si faccia in modo che dal tempo $\mathbf{t_0}$ la corrente circolante nel terzo conduttore cresca nel tempo con legge $\mathbf{I_3(t) = k\,(t-t_0)}$ con **k** costante. Sapendo che la spira, di autoinduttanza **L**, è realizzata con un filo di sezione **S** e conducibilità $\boldsymbol{\sigma}$ si determini l' andamento della corrente circolante nella spira.

Esercizio 1

Calcolo del campo interno, dal teorema di Gauss per una generica

superficie interna sferica

$E_{int}\ 4\pi\ R^2 \ = \int_0^R \frac{\alpha}{\varepsilon_0 \ r} 4\pi\ r^2 dr \ = \frac{\alpha\ 4\pi}{2\ \varepsilon_0}\ R^2 \quad , \quad \overrightarrow{E}_{int} = \frac{\alpha}{2\ \varepsilon_0}\widehat{r}$

Calcolo del campo esterno:

carica totale

$Q_0 = \int_0^{r_0} \frac{\alpha}{r} 4\pi\ r^2\ dr = 2\pi\alpha\ r_0^2$

campo esterno

$\overrightarrow{E}_{ext} = \frac{Q_0}{4\pi\ \varepsilon_0\ r^2}\widehat{r}$

Calcolo del potenziale

V$= -\int_{\infty}^{r_0} \frac{Q_0}{4\pi\ \varepsilon_0\ r^2} dr - \int_{r_0}^{0} E dr = \ \frac{\alpha\ r_0}{\varepsilon_0}$

La posizione di equilibrio si ha quando la forza risultante e' nulla.

Consideriamo una carica negativa.

La forza e' repulsiva fra le cariche negative

$\overrightarrow{F^-} = \frac{q^2}{4\pi\ \varepsilon_0\ d^2}\widehat{r}$

dove d e' la distanza fra le cariche.

forza e' attrattiva fra carica e distribuzione

$\overrightarrow{F^+} = -\ q\overrightarrow{E}_{int}, \quad dove \quad \overrightarrow{E}_{int} = \frac{\alpha}{2\ \varepsilon_0}\widehat{r}$

l' equilibrio si ha quando $\overrightarrow{F^-} + \overrightarrow{F^+} = \ 0$

ovvero
$-\ q\ \frac{\alpha}{2\ \varepsilon_0} + \frac{q^2}{4\pi\ \varepsilon_0 d^2} = 0$

e quindi quando

$d = \sqrt{\frac{q}{2\pi\alpha}}$

- Poniamo l'origine del sistema di riferimento cartesiano in un punto del filo percorso dalla corrente I e disponiamo l'asse y in modo che il filo passi dal punto $a\hat{\mathbf{y}}$.

  Il campo dell'induzione magnetica $\mathbf{B}$ in un punto del piano xy avente coordinate $(x, y, 0)$ ha la seguente espressione:

  $$\mathbf{B}(x,y,0) = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{y} + \frac{3}{y-a} \right)$$

  Affinché il campo sia nullo deve valere:

  $$y = \frac{a-y}{3}$$

  ovvero $y = a/4$.

- Per bilanciare le forze esercitate sui due fili il verso della corrente nel terzo filo deve essere opposta a quello delle correnti circolanti nei primi due. La forza $\mathbf{F}$ per unità di lungheza esercitata sul filo passante dall'origine delle coordinate vale:

  $$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{y}} I \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{3I}{a} - \frac{I_3}{a/4} \right)$$

  affinché questa sia nulla deve valere:

  $$4\, I_3 = 3I$$

  ovvero $I_3 = 3I/4$. La forza $\mathbf{F}$ per unità di lunghezza esercitata dal filo percorso da corrente $3\, I$ vale

  $$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{y}} (3\, I) \frac{\mu_0}{2\pi} \left(-\frac{I}{a} + \frac{I_3}{3a/4} \right)$$

  che è anche essa nulla per il valore di $I_3 = 3I/4$.

- La legge di Ohm lega la densità di corrente $\mathbf{j}$ al campo elettrico $\mathbf{E}$:

  $$\mathbf{j} = \mathbf{E}\, \sigma$$

  La corrente I_s che circola nella spira, nell'approssimazione che la sezione del filo sia sufficientemente piccola da poter considerare $\mathbf{j}$ uniforme su di essa, vale $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$ dove $\mathbf{S}$ è il vettore tangente al filo avente come modulo la sua sezione. La legge di Faraday Lenz afferma che:

  $$\oint_{\partial\omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -L \frac{dI_s}{dt} - \frac{d}{dt} \int_0^b dx \int_0^b dy \frac{\mu_o\, I_3(t)}{2\pi} \frac{1}{b+y} = -L \frac{dI_s}{dt} - k\vartheta(t-t_0) \frac{\mu_0}{2\pi} b \ln 2$$

  Dove $\vartheta(t - t_0)$ è la funzione scalino di Heaviside che vale 0 per $t < t_0$ ed 1 altrimenti. Nell'approssimazione di filo sottile vale inoltre:

  $$\oint_{\partial\omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \simeq \frac{I_s}{S\sigma} \oint_{\partial\omega} dl = \frac{4\, I_s\, b}{S\sigma}$$

  In definitiva l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione temporale di I_s è:

  $$L \frac{dI_s}{dt} = -\frac{4\, I_s\, b}{S\sigma} - k\, \vartheta(t-t_0) \frac{\mu_0}{2\pi} b \ln 2$$

  Ammettendo che per $t < t_0$ la corrente I_S sia nulla, la soluzione della precedente equazione differenziale lineare del primo grado è:

  $$I_s = -\vartheta(t-t_0) \frac{k\, \mu_0}{2\pi} \frac{S\, \sigma}{4} \ln 2 \left(1 - e^{-(t-t_0)/\tau} \right)$$

  dove la costante di tempo τ è data da:

  $$\tau = L\, \frac{S\sigma}{4b}$$