Le onde elettromagnetiche nel vuoto

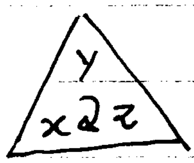
1) $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = c^2 \bar{\nabla} \times \bar{B}$

2) $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = - \bar{\nabla} \wedge \bar{E}$

3) $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0$

4) $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$

$\nabla \wedge \bar{B} \equiv \text{rot}\, \bar{B}$



$(\nabla \wedge B)_x = \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}$

$(\nabla \wedge B)_y = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}$

$(\nabla \wedge B)_z = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}$

$\nabla \cdot \bar{B} = \text{div}\, \bar{B}$

$\text{div}\, B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

Equazione delle O. e.m nel vuoto

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \wedge B \quad ; \quad \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \bar{B})$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \nabla \wedge \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

dalla (2) ovvero $\frac{\partial B}{\partial t} = - \bar{\nabla} \wedge \bar{E}$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = - c^2 \nabla \wedge (- \bar{\nabla} \wedge \bar{E})$$
$$\underline{1} \quad c^2 \nabla \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{E})$$

ma $\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{E}) = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot E)}_{\equiv 0} - \nabla^2 E$

quindi

$$\boxed{\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \bar{E} = 0}$$

oppure

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x - c^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y - c^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z \right) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t^2} E_z - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z \right) = 0$$

Legame fra B ed E

partendo da $\frac{\partial E}{\partial t} = c^2 \bar{\nabla} \wedge \bar{B}$

per un'onda piana

★ $\frac{\partial E_x}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z}$

$B_y = B_{0y} \, e^{i(kz - \omega t)}$
$E_x = E_{0x} \, e^{i(kz - \omega t)}$

$\frac{\partial E_x}{\partial t} = i \omega E_x$

$\frac{\partial B_y}{\partial z} = - i k B_y$ dalle ★

$i\omega E_x = - c^2 B_y \, ik$

$E_x = - c^2 \frac{k}{\omega} B_y$

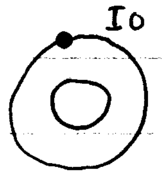
ma $c = \frac{\omega}{k}$

$|E| = c|B|$

Metodi per la misura della velocità della luce

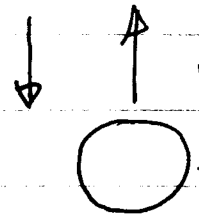
- METODO DI OLE ROEMER (1644 - 1710)

Danese : misura dell'anticipo e del ritardo nelle eclissi di IO (sat. giove)



$\Delta e = 4.6$ MKm

anticipo 15 sec

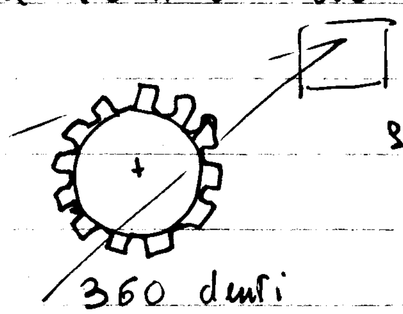


$v = \pm 30$ Km/sec

$$C = \frac{\Delta e}{\Delta t} = 210.000 \text{ Km/sec}$$

Attualmente $c = 2,997924574(12) \cdot 10^8$ m/sec

Metodo della misura della luce con la tecnica della ruota dentata



specchio

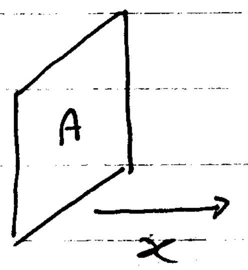
$e = 100$ metri

360 denti $\quad \Delta L = 2e = 200$

$$\Delta t = \frac{200}{3 \cdot 10^8} \qquad \nu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 10^8}{200}$$

$$\nu' = \frac{\nu}{360} = \frac{3 \cdot 10^8}{200 \cdot 360} = \frac{3}{2 \cdot 36} 10^5 = 0.0416\ 10^5 = 4.16\ 10^3 \simeq 5000 \text{ giri}$$

Flusso energetico di un onda



$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

densità di energia

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\, dV$$

$$dV = A\, dx$$

$$\frac{dU}{dt} = A\int_{x_1}^{x_2} \left(\varepsilon_0 E_y \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{B_z}{\mu_0}\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) dx$$

da $\quad \dfrac{\partial B_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial E_y}{\partial x}$

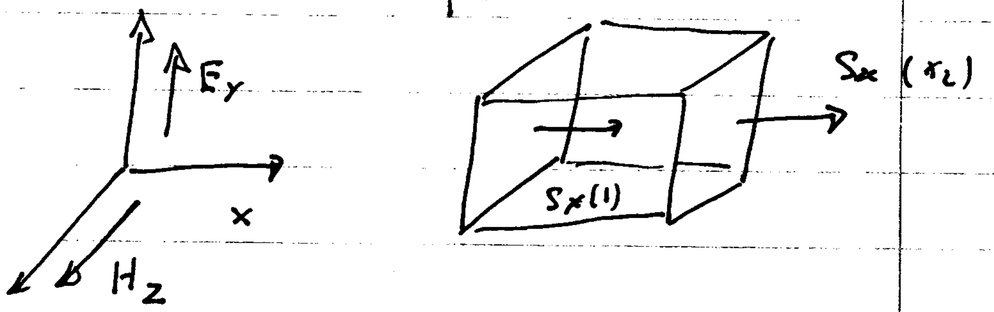
$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\frac{dU}{dt} = A\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\cancel{\varepsilon_0} E_y}{\mu_0 \cancel{\varepsilon_0}}\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{B_z}{\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) dx$$

$$\overset{!}{=} -\frac{A}{\mu_0}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(E_y B_x)\, dx$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{A}{\mu_0}\left[(E_y B_z)_{x=x_1} - (E_y B_z)_{x=x_2}\right]$$

$$S_x = \frac{E_y B_z}{\mu_0}$$



$$\frac{dW}{dt} = \phi(x_1) - \phi(x_2)$$

$$\phi(S) = A\, S_x$$

$$S_x = \left(\frac{\bar{E} \wedge \bar{B}}{\mu_0} \right)_x$$

$$\bar{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\int \vec{S} \cdot \bar{n}\, ds$$

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{E}\, dV = \int \bar{S} \cdot n\, ds$$

$$dw\, \vec{S} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

Intensità dell' onda

$$I = \langle S \rangle = \left\langle \frac{\bar{E} \wedge \bar{B}}{\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{E B}{\mu_0} \right\rangle$$

$$B = \frac{E}{c} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\star \quad I = \left\langle \frac{E^2}{c \mu_0} \right\rangle = c \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E^2 \rangle$$

per un onda armonica

$$E = E_{max} \cos \omega t$$

$$\langle E^2 \rangle = E_{max}^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{E_{max}^2}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2}$$

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 = \varepsilon_0 E_0^2$$

$$\langle u \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

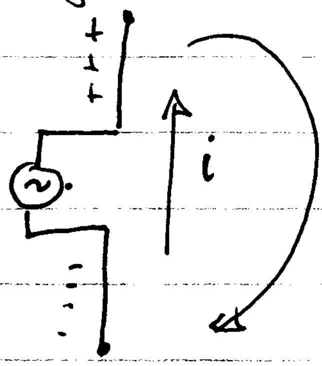
dalla $\star$

$$\langle S \rangle = c \langle u \rangle$$

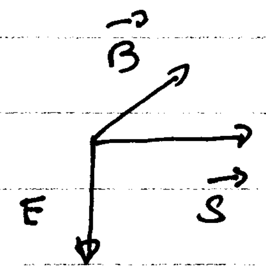
Nota in un mezzo di indice $n = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$; $c \to \frac{c}{n}$

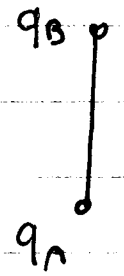
$$I = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2$$

Sorgenti di O.e.m : dipolo elettrico



$E \otimes B$





$i = I_0 \cos\omega t$

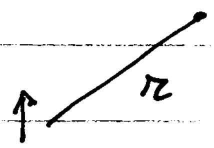
$$p = q_0 \, d \, \sin\omega t$$

$$\frac{dq_A}{dt} = - \frac{dq_B}{dt} = I_0 \cos\omega t$$

allora $q_A = \int I_0 \cos\omega t = \frac{I_0}{\omega} \sin\omega t$

$$q_0 = \frac{I_0}{\omega} \quad ; \quad p = \frac{I_0}{\omega} d \sin\omega t$$

Si distinguono due regioni



l'onda si propaga
con velocità c
$\lambda = cT$

$r \ll \lambda$	$r > \lambda$
$\Delta t \ll T$	zona d'onda
dipolo quasi statico	

per $r \ll \lambda$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{p}\cdot r^2}{r^5}$$

per Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \, i(t) \, d\vec{l} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}$$

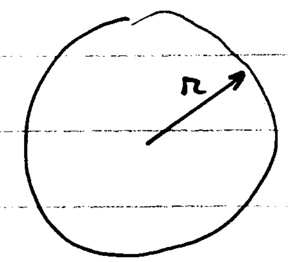
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \omega p_0 \cos\omega t \; \hat{z} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}$$

nella regione $r \gg \lambda$
zona d'onde:

l'onda dovrà andare come $\frac{1}{r}$

Dimostrazione:

$$\phi(s) = \int \vec{S}\cdot\hat{n}\, dA = \int \frac{BE}{\mu_0}\, dA$$



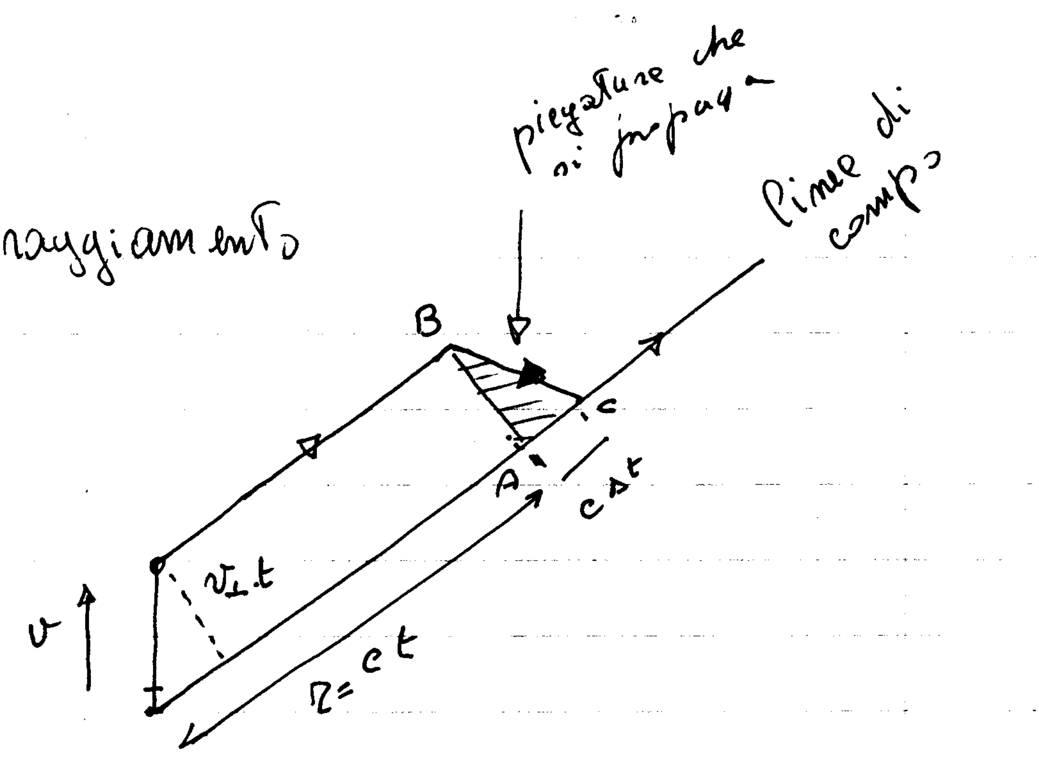
$$= \frac{BE}{\mu_0} 4\pi r^2 = c(t)$$

ma $B = \frac{E}{c}$

quindi $BE = \frac{E^2}{c}$ quindi $E^2 r^2 = \text{cost}$

$$E \propto \frac{1}{r}$$

$r \gg \lambda$: Irraggiamento



1) La carica accelera per un tempo piccolo Δt. Sia a l'accelerazione

2) La carica procede per un tempo t di moto uniforme a velocità v

Guardando il triangolo ABC

vale $\quad \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{v_\perp t}{c\,\Delta t}$

ma $\quad \dfrac{AB}{AC} = -\dfrac{E_\perp}{E_r}$

quindi $\quad \dfrac{E_\perp}{E_r} = -\dfrac{v_\perp t}{c\,\Delta t}$

$v_\perp = a_\perp \Delta t \quad$ e $\quad t = r/c$

$a_\perp = a_\perp\left(t - \frac{r}{c}\right)$

$$\frac{E_\perp}{E_r} = - \frac{(a_\perp \cancel{\Delta t}) \frac{r}{c}}{c \cancel{\Delta t}}$$

ottengo $\quad E_\perp = - \frac{a_\perp \cdot r}{c^2} E_r$

la componente radiale

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

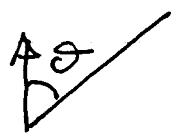
$$\boxed{E_\perp = - \frac{a_\perp q}{4\pi\varepsilon c^2 r}}$$

campo elettromagnetico

$$B = \frac{E}{c}$$

$$\boxed{|B| = \frac{a_\perp q}{4\pi\varepsilon c^3 r}}$$

consideriamo un dipolo elettrico oscillante



$$p = q d \cos\omega t \rightarrow \ddot{p} = -\omega^2 q d \cos\omega t$$

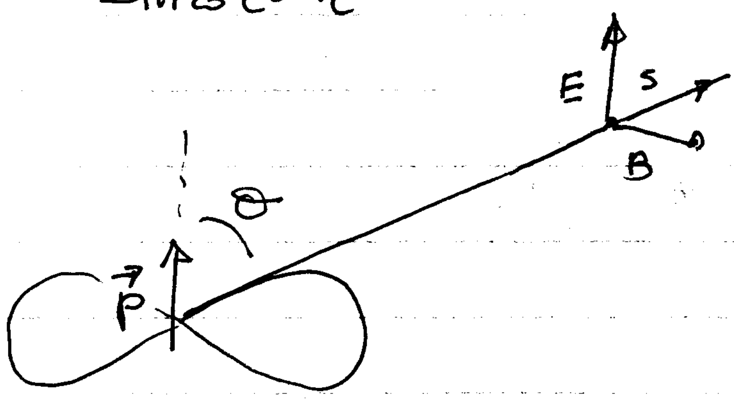
$$\ddot{p} = -\omega^2 p \cos\omega t = a q$$

$$a_\perp q = [\omega^2 p \cos\omega t] \operatorname{sen}\theta$$

quindi $\quad E_{o.em} = \frac{\omega^2 p(t - r/c) \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}$

$$p(t - r/c) = p_0 \, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)}$$

$$E = \frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} \, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)}$$



$$B = \frac{E}{c} \qquad e \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

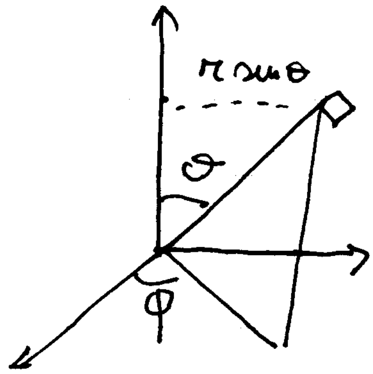
$$\bar{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin\theta \, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)}}{4\pi c r}$$

i massimi dei campi si hanno per $\theta = \frac{\pi}{2}$; la potenza

$$\langle \bar{S} \rangle = \langle \frac{\bar{E} \wedge \bar{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32\pi \varepsilon_0 c^3 r^2}$$

potenza mediata nello spazio

$$\langle W \rangle_{spazio} = \int \langle \bar{S} \rangle \cdot \bar{n} \, dA$$



$$dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\langle W \rangle = \int \frac{\omega_0^4 p_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \, r^2 \frac{\sin^3\theta}{r^2} \, d\theta \, d\varphi$$

calcolandola sulla superficie di una sfera che contiene nel suo centro il dipolo si ottiene

$$\boxed{W = \frac{\omega_0^4 p^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3}}$$

Quantità di moto associata ad una radiazione

$$\vec{P} = \frac{\text{Energia}}{c} \hat{z}$$

$$\vec{F} = \frac{dP}{dt} = \frac{W}{c} =$$

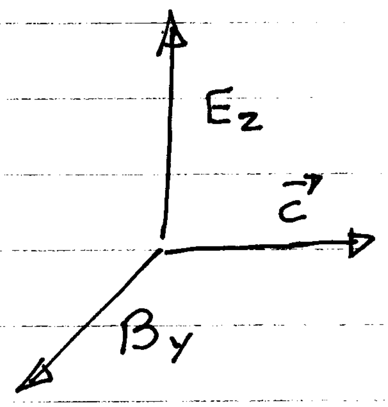
forza media $\langle \vec{F} \rangle = \frac{\langle W \rangle}{c} = \frac{\langle S \rangle}{c} A$

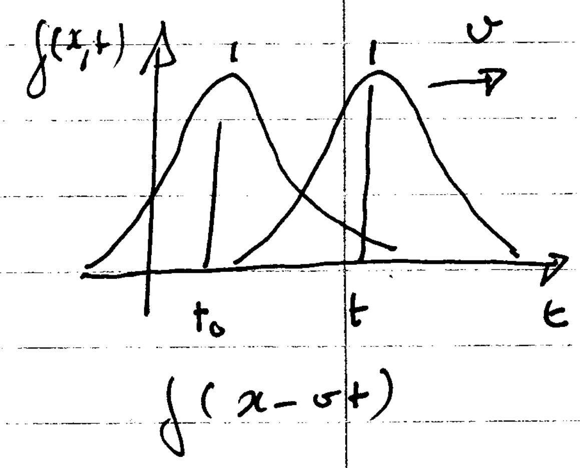
Pressione di radiazione

$$\frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{I}{c}$$

Caso semplice : onda piana

$$\frac{\partial E_{\cancel{x}}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = 0$$





soluzione dell' equazione delle onde

$$E = f(x - vt)$$

una soluzione possibile

$$E(x,t) = f(\xi) \qquad \xi = x - vt$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \xi}(-v)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2}(-v)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} v^2$$

analogamente

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} \qquad \text{sostituendo nell' equazione}$$

$$v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = 0$$

questa è verificata se $v = c$

Soluzioni armoniche

$$E(x,t) = E_0 \cos k(x - ct)$$

questa è la parte reale di una soluzione complessa

$$E(x,t) = E_0 e^{jk(x-ct)}$$

ovvero $E = E_0 e^{j(kx - kct)}$

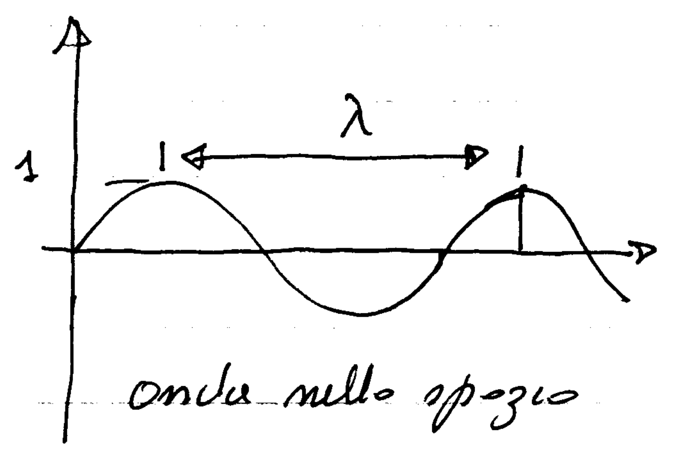
Se chiamiamo $\omega = kc$

ω prende il nome di pulsazione

$$E = E_0 e^{j(kx - \omega t)}$$

poniamo $t=0$ $\quad E = E_0 e^{jkx}$

$$E_r = E_0 \cos kx = E_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$$



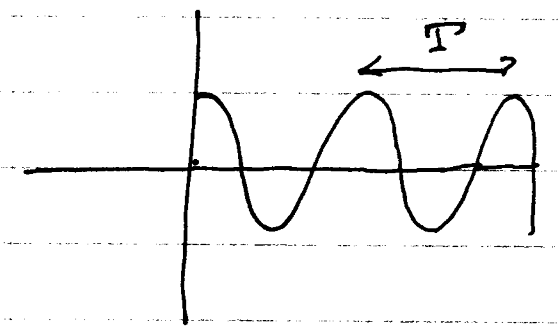
per $x = \lambda$ $\quad \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 1$

$\lambda \equiv$ periodicità spaziale

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ora poniamoci in $x=0$ e seguiamo l'onda nel tempo

$$E = E_0 \cos(-\omega t) = E_0 \cos\left(-\frac{2\pi}{T} t\right)$$



per $t = T$ $\cos = 1$

T = periodicità temporale

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ pulsazione

$\nu = \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi\nu$

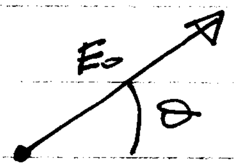
frequenza

d'altra parte $\omega = kc$

$$2\pi\nu = kc = \frac{2\pi}{\lambda} c$$

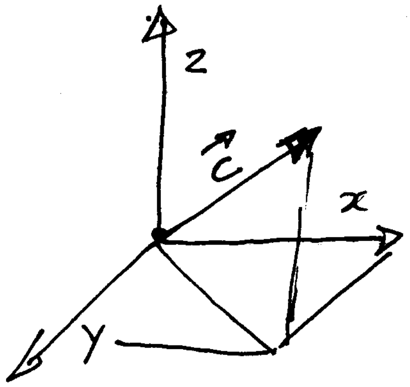
e quindi $\boxed{\nu = \frac{c}{\lambda}}$

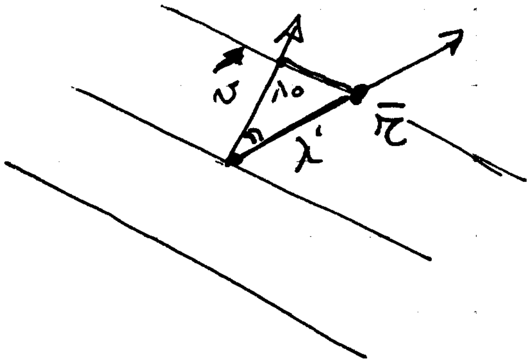
$$E(x,t) = E_0 e^{j(kx - \omega t)}$$



$\theta = kx - \omega t$

Onda nello spazio tridimensionale





$$\lambda = \lambda' \cos\theta$$

$$E = E_0\, e^{J(k' r - \omega t)}$$

ma $\quad k' = \dfrac{2\pi}{\lambda'} = \dfrac{2\pi}{\lambda} \cos\theta = k \cos\theta$

$$E = E_0\, e^{J(k r \cos\theta - \omega t)}$$

$\vec{k}$ come vettore (vettore d'onda)

allora $\quad E = E_0\, e^{J(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

questa esprime un onda in funzione di un raggio generico

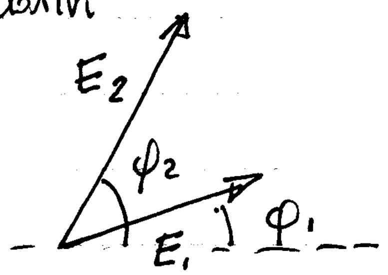
Il fenomeno di interferenze

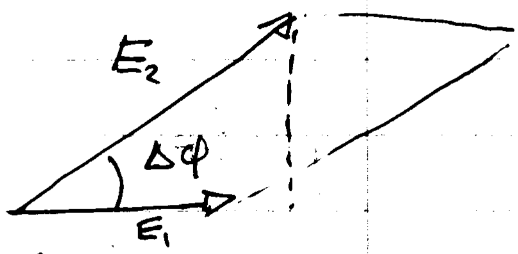
$$E_1 = E_{o_1}\, e^{j(k_1 x - \omega_1 t)} = E_{o_1} e^{j\varphi_1}$$
$$E_2 = E_{o_2}\, e^{j(k_2 x - \omega_2 t)} = E_{o_2} e^{j\varphi_2}$$

Intensità $\qquad I = c\,\varepsilon_0\, E^2$

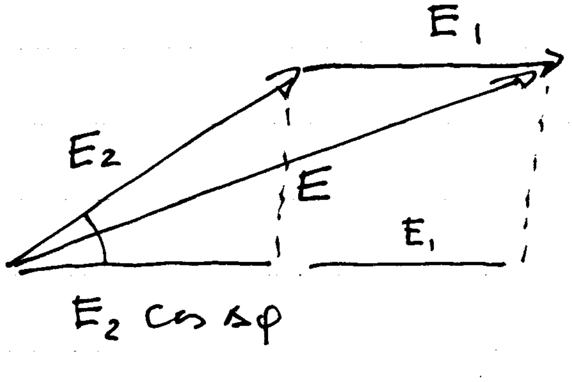
intensità in un mezzo $\qquad v = \dfrac{c}{n} \qquad$ dove $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

$\varepsilon_r, \mu_r \rightarrow$ relativi





$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$



$$E_x = E_2 \cos\Delta\varphi + E_1$$
$$E_y = E_2 \,\mathrm{sen}\,\Delta\varphi$$

$$E^2 = (E_x^2 + E_y^2) = E_2^2 \cos^2\Delta\varphi + E_1^2 + 2E_1E_2\cos\Delta\varphi + E_2^2 \,\mathrm{sen}^2\Delta\varphi$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\Delta\varphi$$

quindi

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$

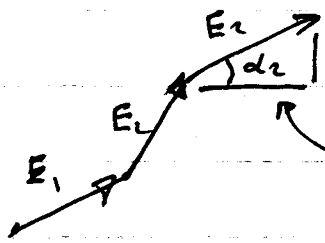
$$I = \varepsilon_0 c \; E^2 \qquad I_1 = \frac{\varepsilon_0 c}{n} E_1^2$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_0 c}{n} E_2^2$$

In generale

$$I = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}{}' E_1 \cos\alpha_i\right]^2 + \left[\sum{}' E_i \sin\alpha_i\right]^2\right\}$$

$$\Delta_{ij} = \cos(\alpha_i - \alpha_j)$$



$\sim E_2 \sin\alpha_2$

$E_2 \cos\alpha_2$

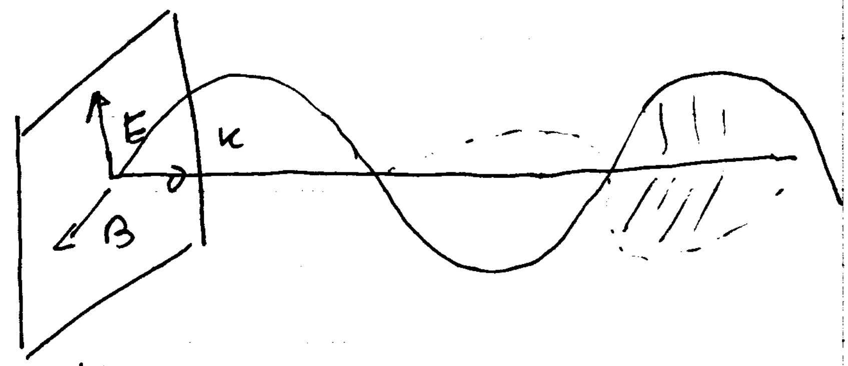
$$I = \sum_{i=1}^{N}{}' I_i + \sum_{i=1}^{N}{}'\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}{}' \sqrt{I_i I_j}\cos\Delta_{ij}$$

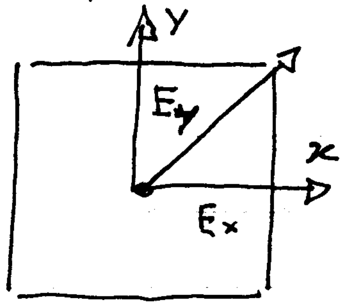
nel caso di radiazione incoerente (luce bianca) Δ_{ij} possono avere segno positivo e negativo, in media il secondo termine si annulla e quindi

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N}{}' I_i}$$

La polarizzazione

si considera un'onda piana

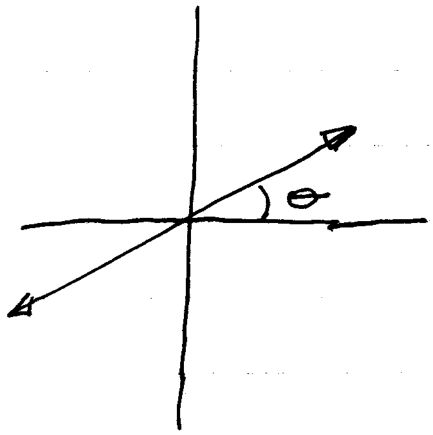




$$E(z,t) = E_x(z,t)\hat{x} + E_y(z,t)\hat{y}$$

Polarizzazione lineare

$$E_x = E_1 \cos\omega t$$
$$E_y = E_2 \cos\omega t$$



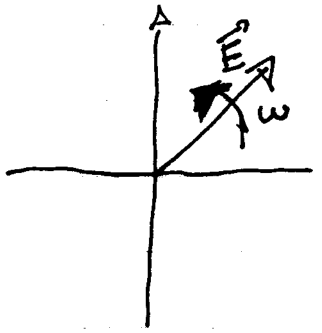
$$\tan\theta = \frac{E_2}{E_1}$$

$$|E| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

onda progressiva

$$E(z,t) = (\hat{x} E_1 + \hat{y} E_2) \sin kz \cos\omega t$$

Polarizzazione circolare



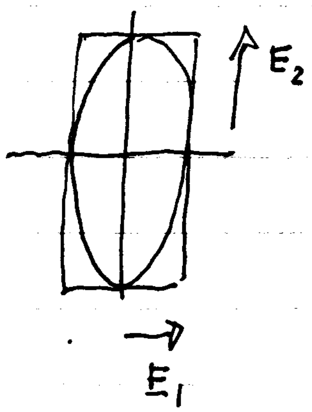
$\vec{E}$ ruota

$$E(z,t) = \hat{x} E_1 \cos \omega t + \hat{y} E_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_1 = E_2$$

Nel caso della polarizzazione ellittica

$$E_1 \neq E_2$$



Onda progressiva

$$E(z,t) = \hat{x} E_1 \cos(\omega t - Kz + \varphi_1) +$$

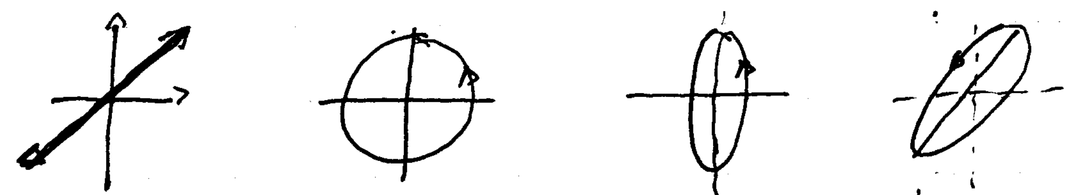
$$+ \hat{y} E_2 \cos(\omega t - Kz + \varphi_2)$$

in forma complessa

$$E(z,t) = \left(\hat{x}\, E_1 e^{j\varphi_1} + \hat{y}\, E_2 e^{j\varphi_2}\right) e^{j(kz - \omega t)}$$

$E_1 = E_2$; $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; $\Rightarrow$ polar. circolare

riepilogando

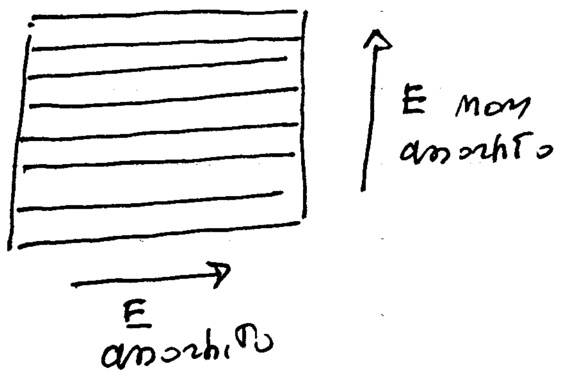


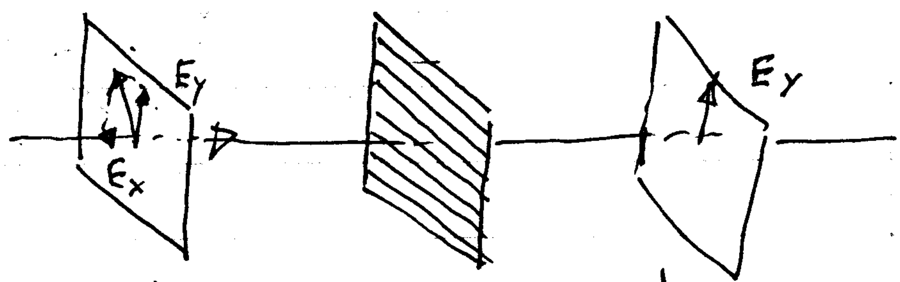
$\varphi_1 = 0$	$\varphi_1 = 0$; $E_1 = E_2$	$E_1 \neq E_2$	$E_1 \neq E_2$
$\varphi_2 = 0$	$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_1 \neq \varphi_2$

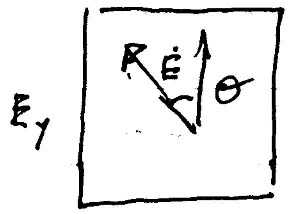
Polarizzatori:

esempio :

griglia metallica





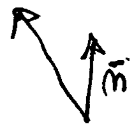


$E_y = E \cos\theta$

$E_y^2 = E^2 \cos^2\theta$

I_0 intensità iniziale

$I = I_0 \cos^2\theta$ intensità finale



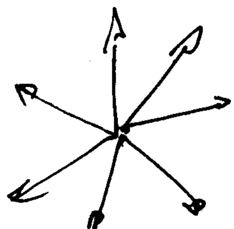
n direzione di polarizzazione

$$I = I_0 \left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)^2$$

Legge di Malus

Luce bianca che attraversa un polarizzatore

prima I_0 contiene campi diretti in ogni direzione



$0 < \theta < 2\pi$

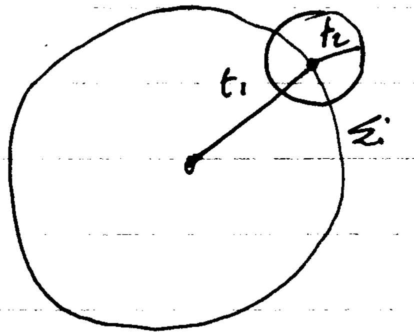
quindi dato che ogni componente che attraversa il polarizzatore contribuisce un termine $I_0 \cos^2\theta$

in totale avremo all'uscita del polarizzatore la quantità

$$I_{\hat{n}} = \int_0^{2\pi} I_0 \cos^2\theta \, d\theta = \frac{I_0}{2}$$

Quindi, l'intensità della luce bianca si dimezza attraversando un polarizzatore.

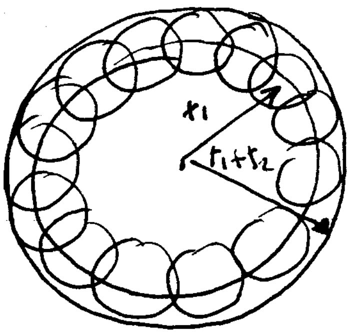
PRINCIPIO DI Huygens



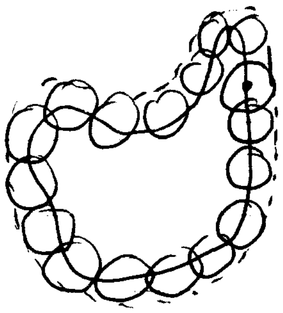
Se al tempo t_1 abbiamo un fronte d'onda Σ'_1

Il fronte al tempo $t = t_1 + t_2$ può essere costruito considerando un'infinità di sorgenti puntiformi distribuite sul fronte Σ' -

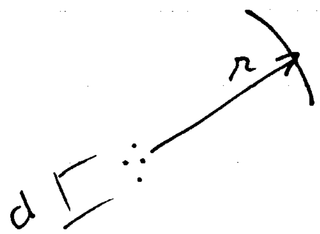
Dopo un tempo t_2 il nuovo fronte Σ_2 si ottiene dalla sovrapposizione di tutti i fronti al tempo t_2 generati da tutte le sorgenti



questo ci permette di determinare i fronti per una sorgente non puntiforme

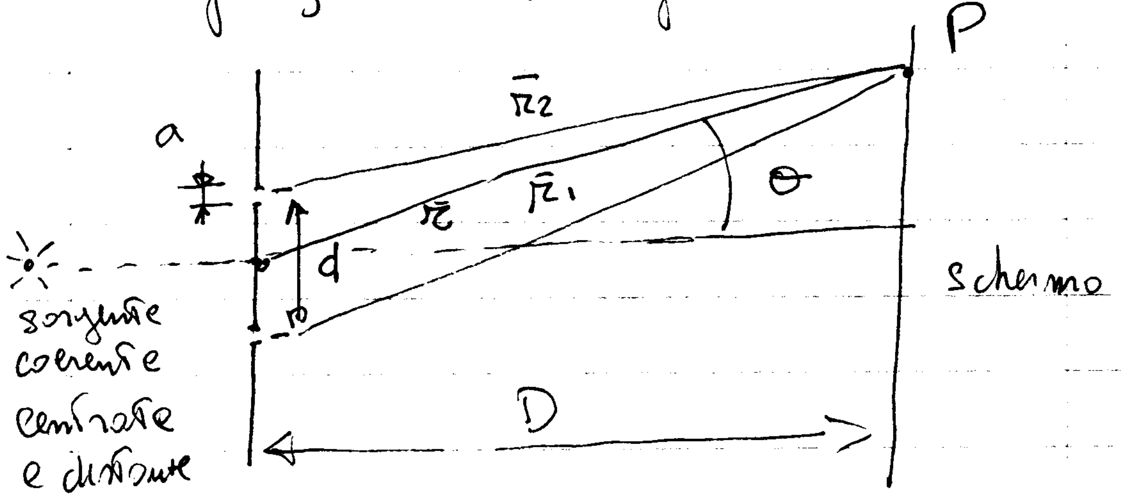


Si comprende che per tempi grandi quando il fronte è molto esteso questo converge verso una superficie di una sfera.



Infatti per $r \gg d$ si ha le sovrapposizioni di sfere quasi concentriche

Interferenza delle due fenditure

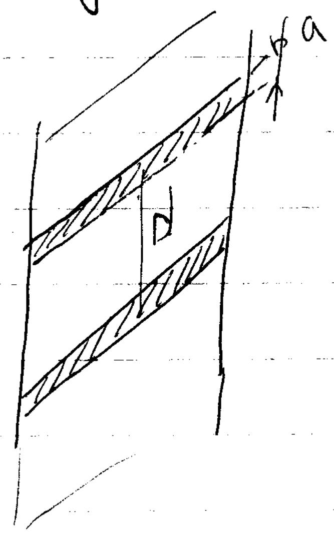


i fronti dell'onde li consideriamo piani in prossimità della parte forata

1) $\lambda \gg a$

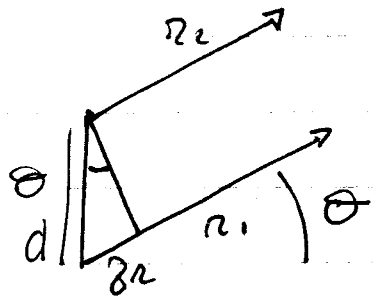
2) $d > a$

3) $D \gg d$

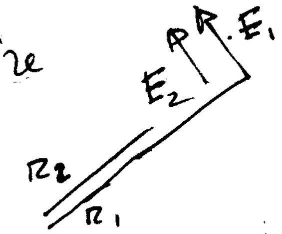


come intendiamo le fenditure

Dato che $D \gg d$ assumiamo $\vec{r}_2 \parallel \vec{r}_1$



allora $\delta r = r_1 - r_2 = d \operatorname{sen}\theta$

inoltre  $\bar{E}_1 \parallel \bar{E}_2$

$|E_1| \simeq |E_2|$

allora in P

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

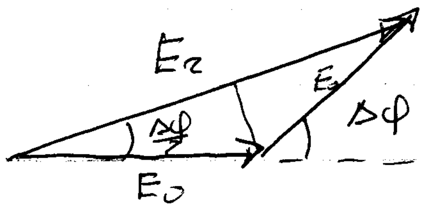
$$E_1 = E_0 \, e^{j(kr_1 - \omega t)}$$
$$E_2 = E_0 \, e^{j(kr_2 - \omega t)}$$

assumiamo $t = 0$

$$E_1 = E_0 \, e^{j(kr_1)}$$
$$E_2 = E_0 \, e^{j(kr_2)}$$

$\phi_1 = kr_1$ $\qquad$ $\phi_2 = kr_2$

$$\Delta\phi = k(r_1 - r_2) = k d \sin\theta$$



$$E_r = E_0 \cos \frac{\Delta\phi}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \, E_0^2 \cos^2\left(\frac{k d \sin\theta}{2}\right)$$

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{k d \,\mathrm{sen}\,\theta}{2}\right)$$

vediamo nello schermo

per $D >> d \Rightarrow \quad \mathrm{sen}\,\theta \simeq \frac{y}{D}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

allora

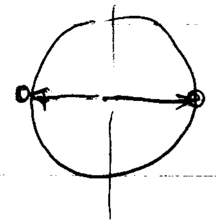
$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\cancel{2}\pi}{2\lambda}\, d\, \frac{y}{D}\right)$$

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{d}{D}\, y\right)$$

i massimi si hanno per

$$\cos^2\alpha = 1$$

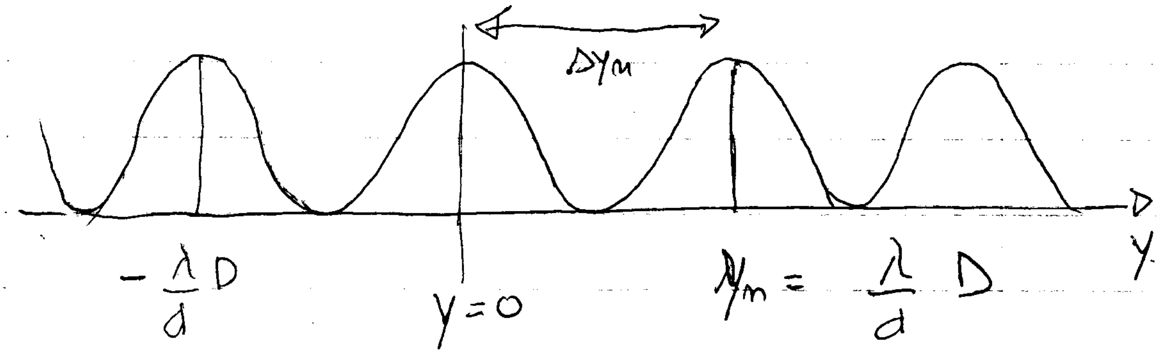
ovvero $\quad \cos\alpha = 1 \qquad \cos\alpha = -1$



$$\alpha = 0, \cancel{\pm\pi}, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

quindi quando

$$\frac{\pi}{\lambda}\frac{d}{D}\, y_m = (0, \pm m\pi)$$

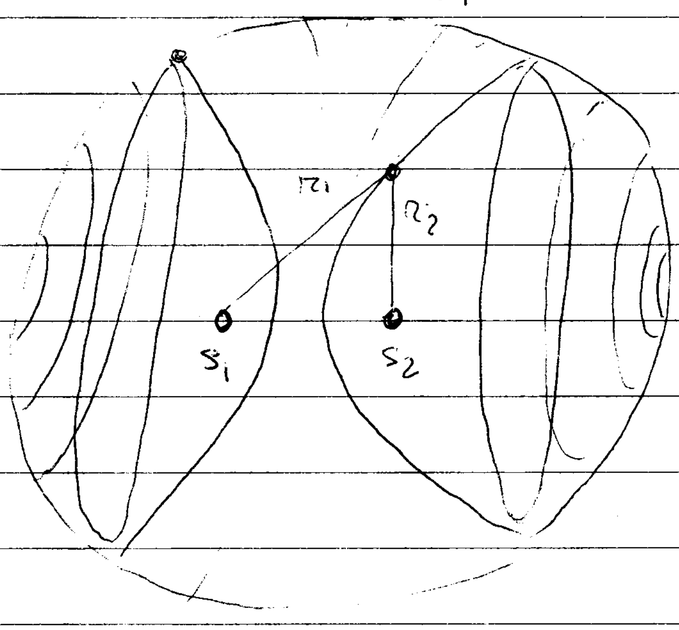


$$\boxed{\Delta y_m = \frac{\lambda}{d} D}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta_m = m\frac{\lambda}{d}$$

$$\Delta\theta_m \simeq \frac{\lambda}{d}$$

$$I = I_0 \cos^2\left[\underbrace{\frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)}_{\text{equazione}}\right]$$



poli

quindi quelle superfici sono superfici per $r_2 - r_1 = \text{cost}$

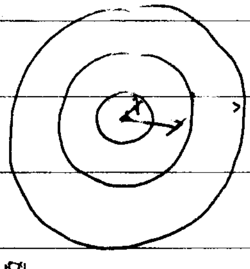
le zone luminose sono per

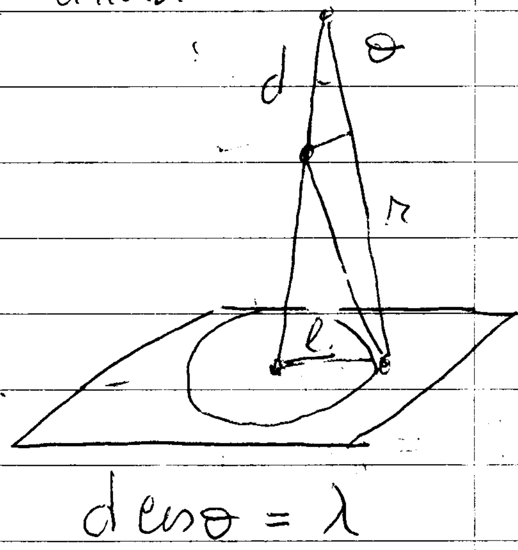
$$\frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 0, \pm m\pi$$

le zone buie per

$$\frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Ai poli: frange circolari





differenze dei raggi $r_2 - r_1$

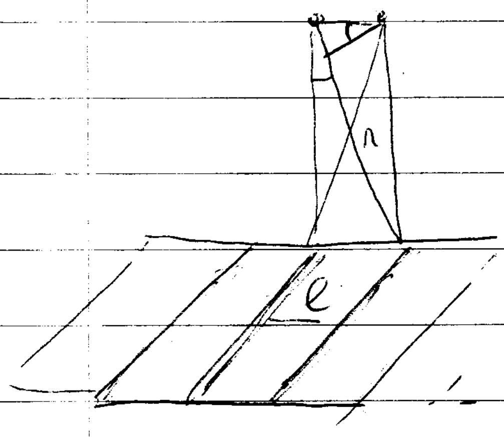
$$d\cos\theta = \lambda$$

$$l = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$l = r\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= r\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2}$$

all'equatore: frange parallele

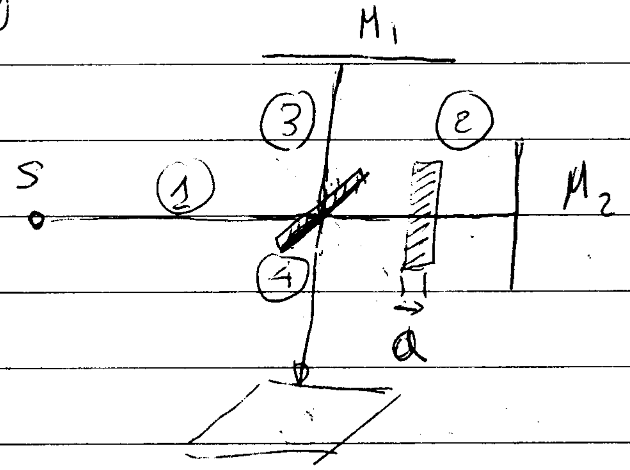


$$d \sin\theta = \lambda$$

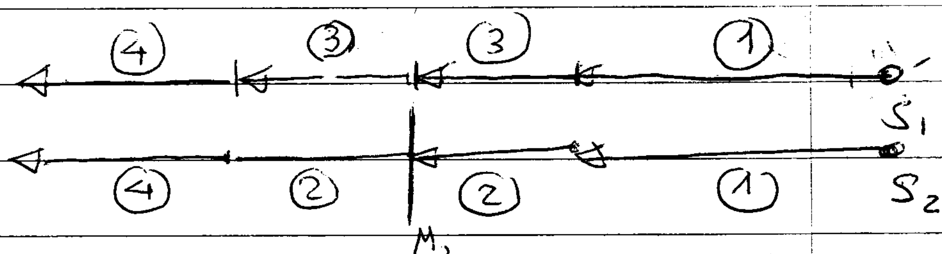
$$l = r \sin\theta$$

$$l = r \frac{\lambda}{d}$$

Interferometro di Michelson



sullo schermo

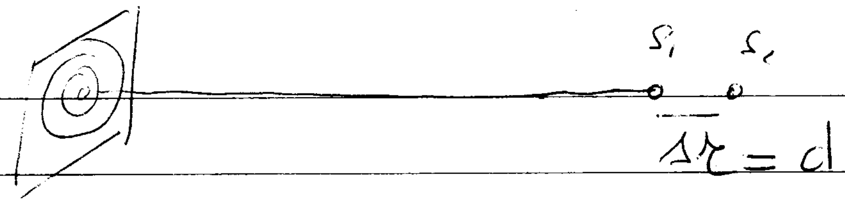


mettere un vetrino di spessore d

$$\Delta\phi = \underset{\text{andata}}{(n-1)kd} + \underset{\text{ritorno}}{(n-1)kd}$$

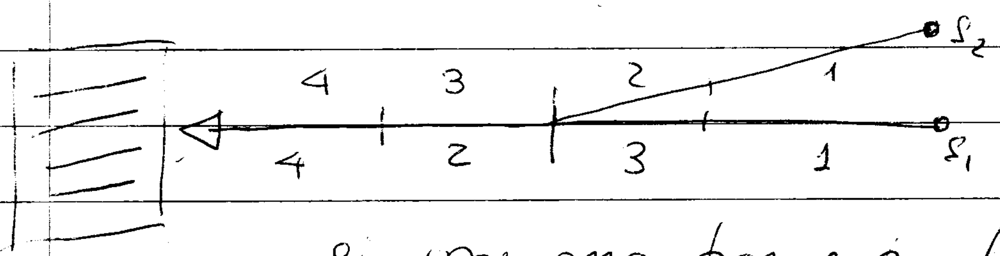
$$\Delta\phi = 2(n-1)kd = k\Delta l$$

$$\Delta l = 2(n-1)d$$



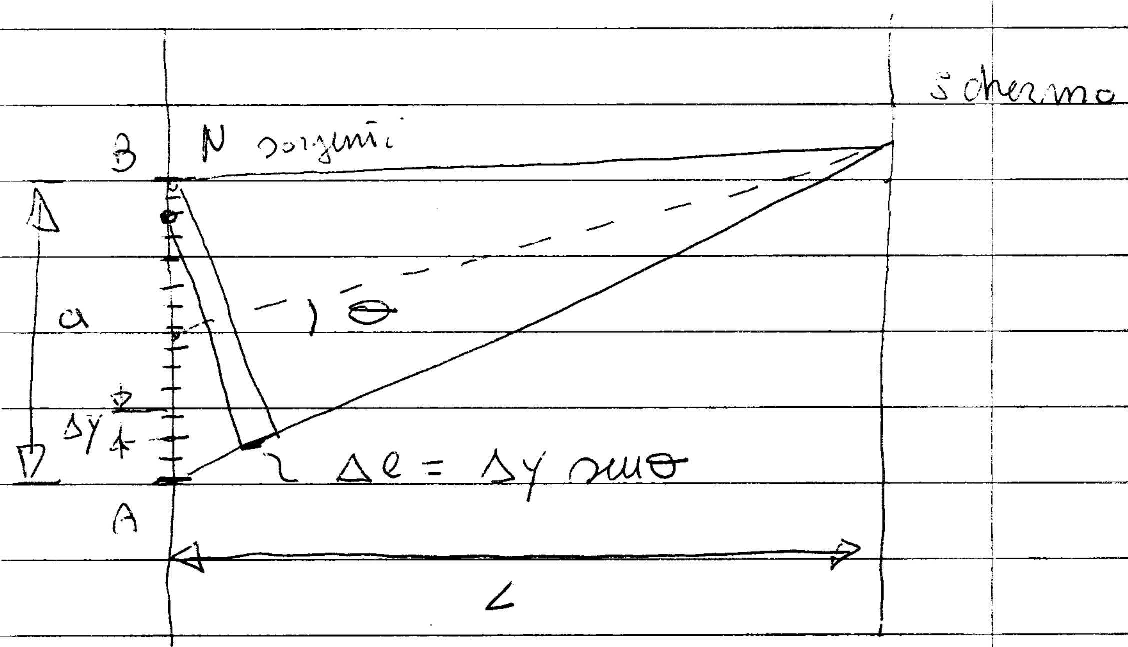
distanza $\Delta e = 2\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2(n-1)a}\right)^2}$
delle prime frange

Se si effettua una rotazione di M_2



si osservano frange parallele

La Diffrazione - di Fraunhofer



Lo sfasamento di due sorgenti contigue $\Delta\beta = K \Delta \ell$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \ell$$

ma $\Delta \ell = \Delta y \sin\theta$

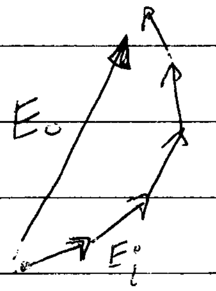
$$\Delta y = \frac{a}{N}$$

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta$$

lo sfasamento totale per le due sorgenti in A ed in B

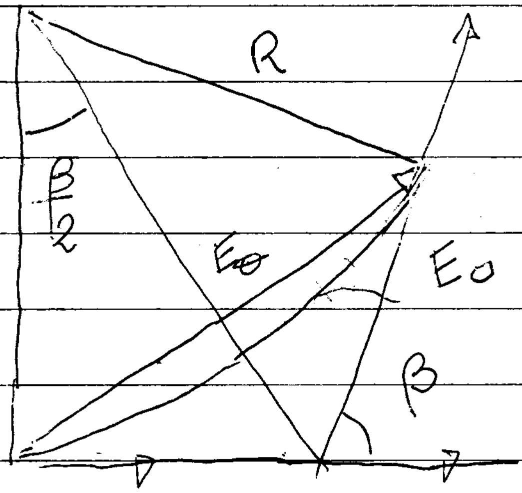
$$\beta_{AB} = N \Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} N \Delta y \sin\theta$$

Calcoliamo l'intensità al variare di θ



E_0 è la risultante dei singoli campi

passando al continuo



$$E_\theta = 2R \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$$

$$E_0 = R\beta$$

$$E_0 = \sum_i E_i$$

$$E_\theta = \frac{2E}{\beta} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$$

$$E_\theta = E_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]$$

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

ma dato che $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \,\mathrm{sen}\,\theta$

$$I_\theta = I_0 \left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \cdot \mathrm{sen}\,\theta}{\frac{\pi a}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta} \right]^2$$

I_0 = intensità

il massimo assoluto si ha per

$$\lim_{\theta \to 0} f(\theta)$$

i minimi si hanno quando

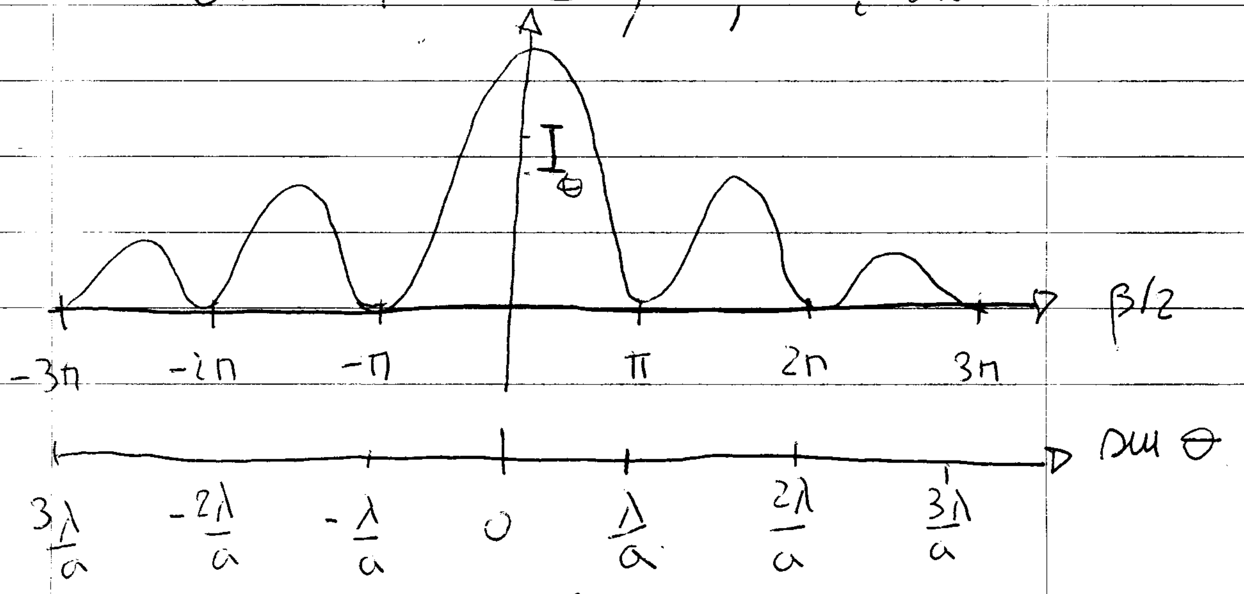
$$\mathrm{sen}\,\beta/2 = 0$$

e questo quando $\frac{\beta}{2} = m\pi$

quindi $\frac{\pi a}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta_{min} = m\pi$

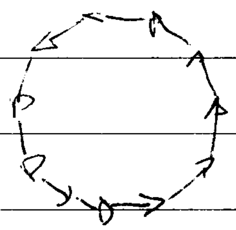
ovvero $\mathrm{sen}\,\theta_{min} = m\,\frac{\lambda}{a}$

con $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$ etc



$$\beta_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

si ha interferenza distruttiva quando la somma vettoriale ne fa un



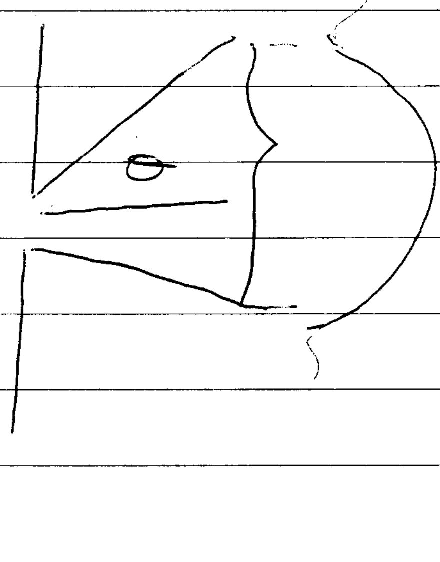
giro completo

$$\beta_{AB} = 2\pi$$

quindi $$2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

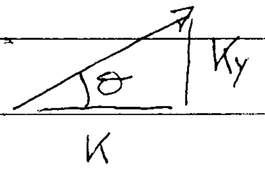
$$\boxed{\sin\theta_{max} = \frac{\lambda}{a}}$$

questo fornisce l'angolo tipico di diffrazione



$$\theta \simeq \frac{\lambda}{a}$$

Osservazione



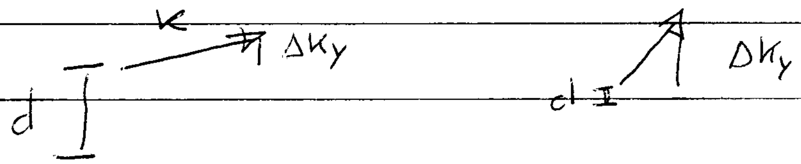
$K_y \simeq K\theta$

dato che $\Delta\theta \simeq \frac{\lambda}{d}$

$$\Delta K_y \simeq K\,\Delta\theta \simeq K\frac{\lambda}{d} = \frac{2\pi}{\cancel{\lambda}}\frac{\cancel{\lambda}}{d} = 2\pi$$

$d = \Delta x$

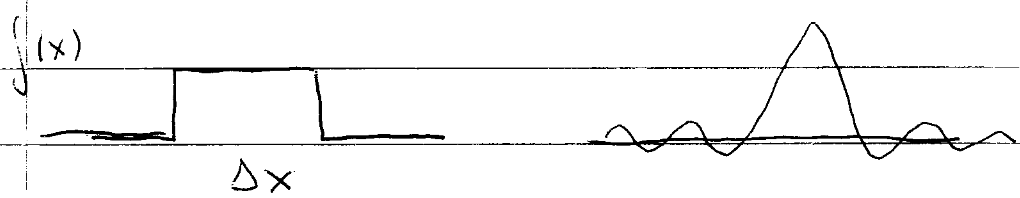
da qui $\boxed{\Delta K_y\,\Delta y \geq 2\pi}$



la trasformata di Fourier

$f(x)$

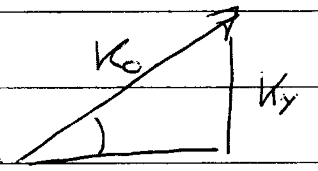
$$\psi(K) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iKx}\, dx$$



ψ^2 è minimo per

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} K = 0$$

ovvero per $\frac{a}{2} K = m\pi$ $\quad m = \pm 1, \pm 2$



$$K = K_y$$

$$K_y = \frac{2\pi}{a} m$$

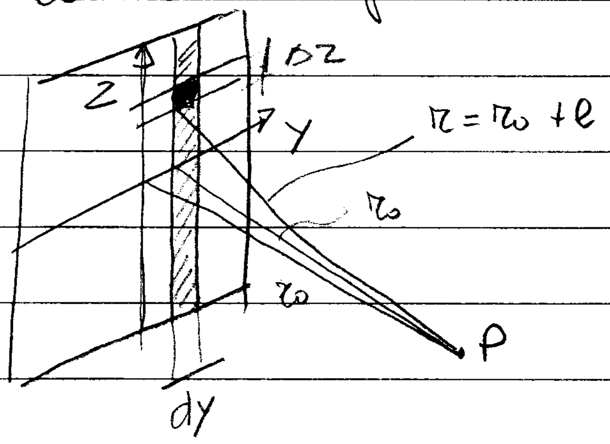
$$\theta \simeq \frac{K_y}{K_0}$$

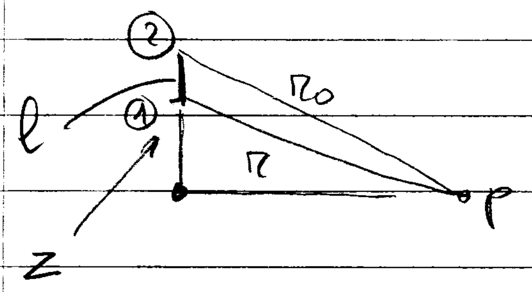
$$\theta_{min} = \frac{2\pi}{a K_0} = \frac{m 2\pi}{a \frac{2\pi}{\lambda}} = m \frac{\lambda}{a}$$

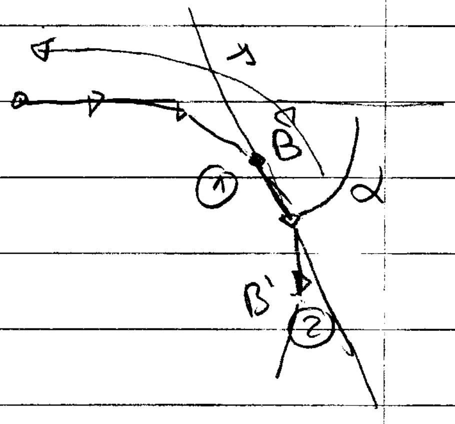
si ottiene lo stesso risultato

Quindi la figura di interferenza è la trasformata di Fourier dell'apertura.

Le corna a spirale







sfasamento in B

$$\alpha = 2\pi \frac{r - r_0}{\lambda}$$

$$\bar{\ell} = \bar{r} - r_0$$

per $r \gg \ell$

$$r^2 = r_0^2 + z^2$$

$$(r_0 + \ell)^2 = r_0^2 + z^2$$

$$\cancel{r_0^2} + 2 r_0 \ell + \cancel{\ell^2} = \cancel{r_0^2} + z^2$$

si trascura

si ottiene

$$\ell = \frac{z^2}{2 r_0}$$

oppure $r - r_0 = \frac{z^2}{2r_0}$ dato che $r = r_0 + \ell$

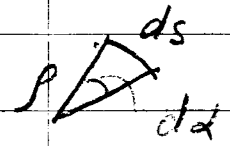
quindi $\alpha = \cancel{2}\pi \frac{z^2}{\cancel{2}r_0\lambda}$

$$\alpha = \frac{\pi z^2}{r_0 \lambda}$$

notare che α è proporzionale a z^2
se indichiamo con s la lunghezza
della linea fino a B
z è proporzionale a s
quindi
$$\alpha \simeq k s^2$$

indichiamo con ρ il raggio
di curvatura, questo è definito
come

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$



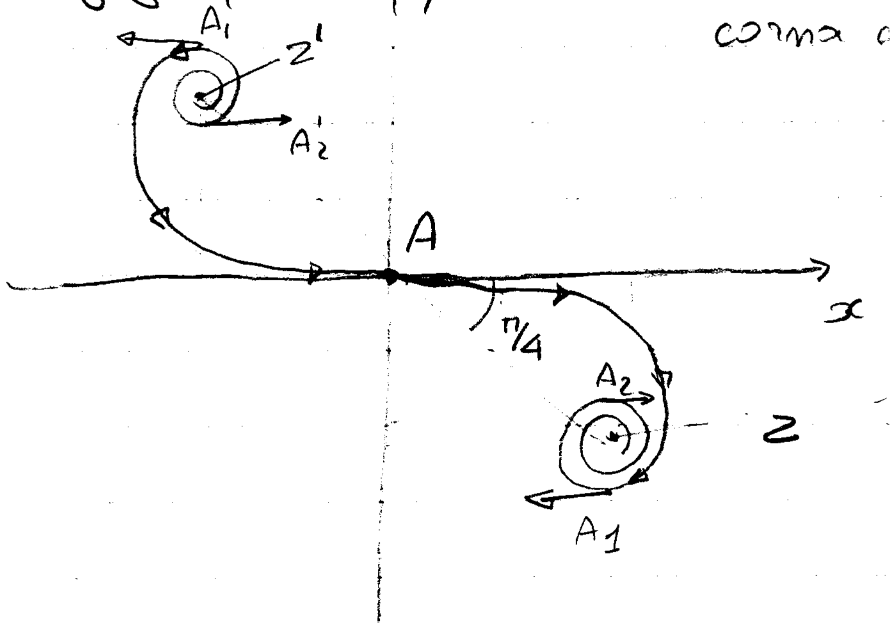
ovvero $\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$

ma $d\alpha = 2ks\,ds$

$$\frac{d\alpha}{ds} = 2ks$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = 2ks}$$

queste descrive una curva come in figura denominata cornu a spirale



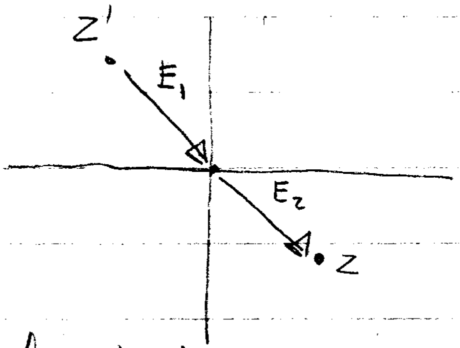
1) Il punto A dove $\rho \to \infty$ corrisponde all'intersezione delle striscie per $z=0$, $s=0$

2) La parte inferiore corrisponde al contributo della radiazione per $z>0$ ($z<0$, parte superiore)

3) I punti A_1 e A_1 $\Rightarrow$ $\alpha = \pi$ significa $z - z_0 = \frac{\lambda}{2}$ ovvero punti di interferenza distruttiva

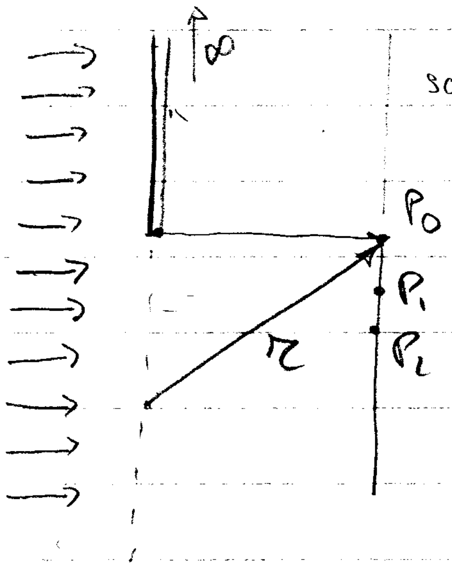
4) i punti A_2 e A_2' $\alpha = 2\pi$ l'interferenza è costruttiva

5) z e z' sono punti asintotici

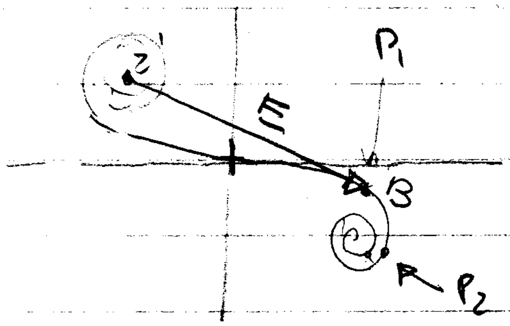


E_1 vettore risultante per $z<0$
E_2 vettore risultante per $z>0$

La diffrazione di Fresnel

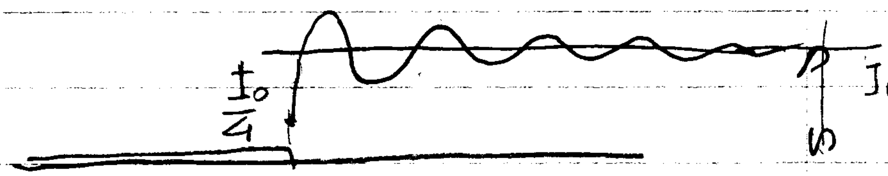


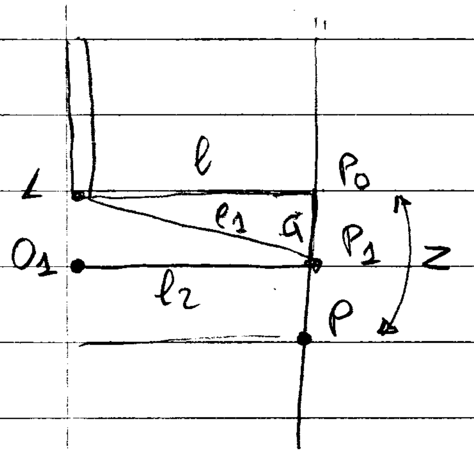
nel punto P_0 si ha metà curva (quella superiore) l'ampiezza del campo è fornita dal vettore E_1 - la lunghezza di questo vettore è metà del caso senza schermo. l'intensità è $I = \frac{I_0}{4}$

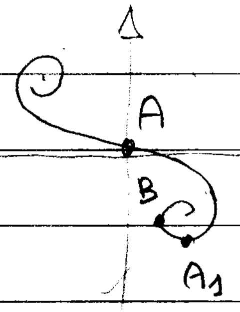


spostandosi in P_1 ci si porta in B il nuovo campo in $P_1 \Rightarrow E$ dato da $\overrightarrow{Z'B}$

Successivamente dopo varie oscillazioni si ottiene 2E







$l_1 - l = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ frangia scura

anche $\quad l_1 - l_2 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \alpha = \pi$

quindi L corrisponde ad A

allora O_1 corrisponde ad A_1

$$a^2 = l_1^2 - l^2 = \left(x_0 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - x_0^2$$

dato che $\frac{\lambda}{2} \ll x_0$

$$a^2 = x_0 \lambda$$

$$\frac{S_{AB}}{S_{AA_1}} = \frac{z}{a} = \frac{z}{\sqrt{x_0 \lambda}}$$

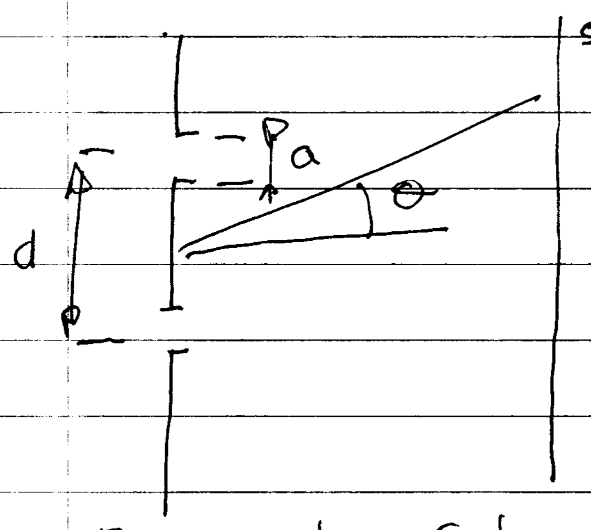
S_{AA_1} è dato $\quad S_{AA_1} = S_0$

quindi

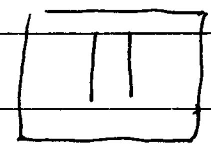
$$z = \frac{\sqrt{x_0 \lambda}}{S_0} \cdot S$$

misurando S si trova z

Fenditura Doppia

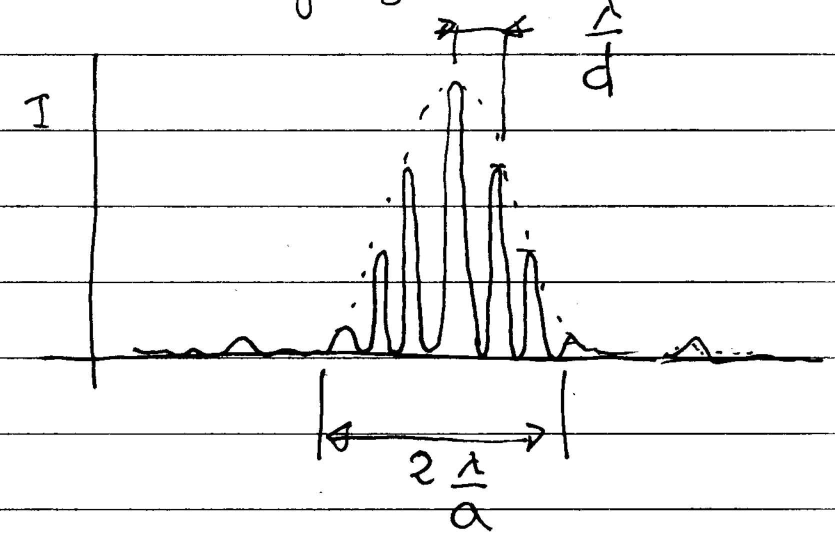


esempio



vetro da microscopio due tagli da lamette distanti 0.5 mm

Figura di interferenza



Infatti il contributo di ogni fenditura per effetto della diffrazione diviene

$$E = E_0 \frac{\operatorname{sen} \beta/2}{\beta/2}$$

dove $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta$

Il contributo delle due fessure dovrebbe

$$E = E_0 \cos\frac{\Delta\phi}{2}$$

dove $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta$

L'effetto combinato che vale per distanze qualsiasi D delle fenditure forma

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\operatorname{sen}\beta/2}{\beta/2}\right)^2 \cdot \cos^2\frac{\Delta\phi}{2}$$

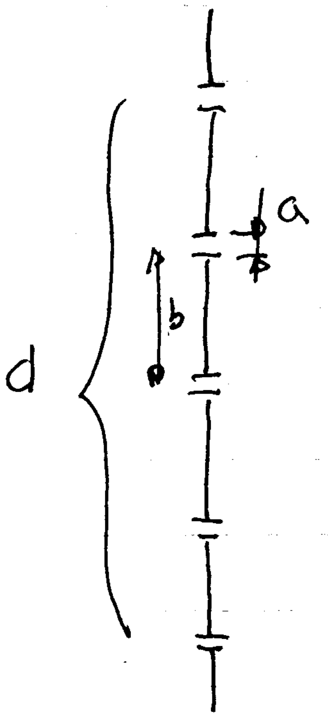
attenzione a gli angoli

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta$$

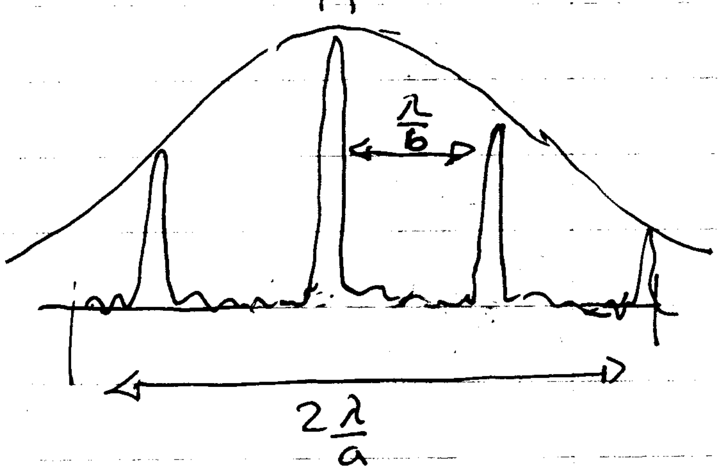
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta$$

$a \equiv$ apertura delle fenditure
$d \equiv$ distanza delle fenditure

Interferenze per molte fenditure

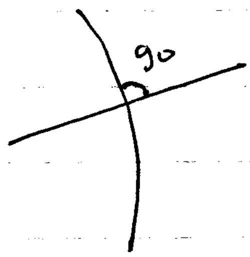


$$\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{nb}$$



OTTICA GEOMETRICA

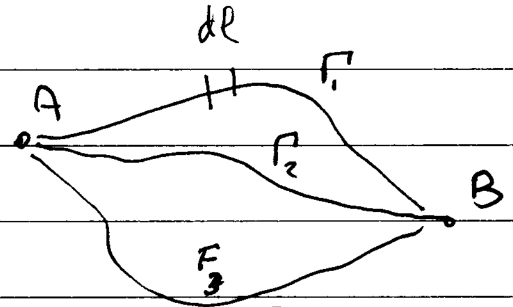
Definizione di raggio



i raggi ottici
sono quelle linee
perpendicolari ai
piani d'onde

Principio di Fermat

Presi due punti nello spazio A e B.
Sia Γ un generico percorso che collega
A con B. La luce sceglierà quel percorso Γ
che minimizza il tempo di percorrenza.



$$\delta T = \delta \int_A^B \frac{dl}{v} = 0$$

$$v = \frac{c}{n(x,y,z)} \quad \text{dove } n(x,y,z)$$

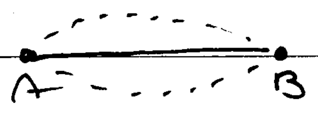
è l'indice di rifrazione che dipende dal mezzo

se il mezzo è omogeneo

n è indipendente dalla posizione

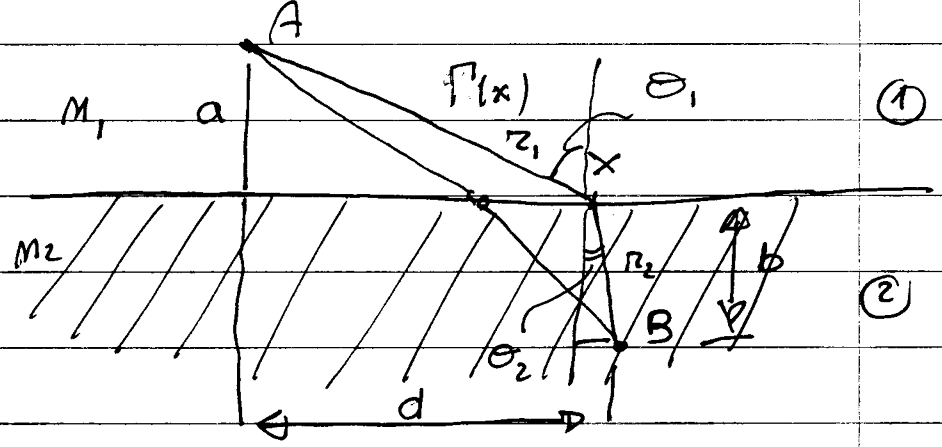
$$\delta T = \delta \int_A^B \frac{n}{c}\, dl = \frac{n}{c}\, \delta \int_A^B dl = 0$$

questo significa che il percorso minimo spaziale minimizza il tempo



il percorso minimo è quello rettilineo

vediamo il caso semplice



in 1 e 2 la luce procede in linea retta, il punto x individua un percorso $\Gamma(x)$

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

es. acqua $n = 1.33$ vetro $n = 1.5$

$$\Gamma(x) = r_1(x) + r_2(x)$$

$$t_{AB} = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2}$$

$$t_{AB} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\frac{c}{n_1}} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{\frac{c}{n_2}}$$

$$\frac{dt_{AB}}{dx} = \frac{n_1}{c}\frac{d}{dx}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{n_2}{c}\frac{d}{dx}\left(b^2+(d-x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$c\frac{dt_{AB}}{dx} = n_1\frac{2x}{(a^2+x^2)^{1/2}} + n_2\frac{2(d-x)(-1)}{[b^2+(d-x)^2]^{1/2}}$$

Condizione di minimo tempo

$$\frac{dt_{AB}}{dx} = 0$$

ma $\frac{x}{[a^2+x^2]^{1/2}} = \operatorname{sen}\theta_1$

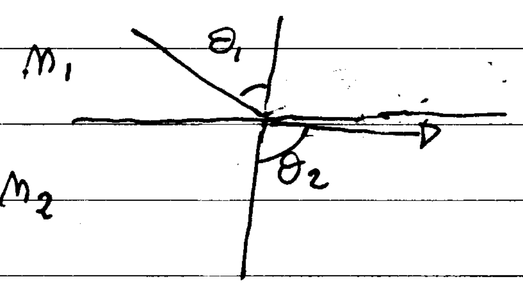
e $\frac{d-x}{[b^2+(d-x)^2]^{1/2}} = \operatorname{sen}\theta_2$

da cui si ricava la legge di Snell

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

legge della rifrazione

Un caso speciale: $n_1 > n_2$



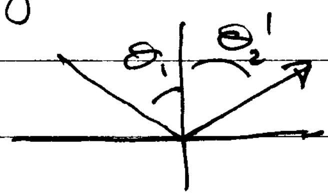
$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1$

allora $\theta_2 \to \frac{\pi}{2}$ quando $\frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1 \to 1$

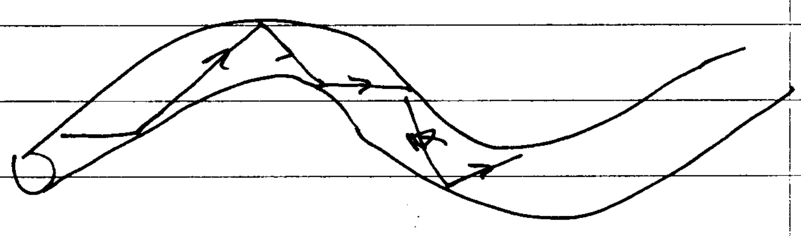
quindi $\exists\ \theta_1^*$ tale che $\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$

e quindi non si ha raggio trasmesso

quindi per $\theta_1 > \theta_1^*$
si ha solo il raggio
riflesso

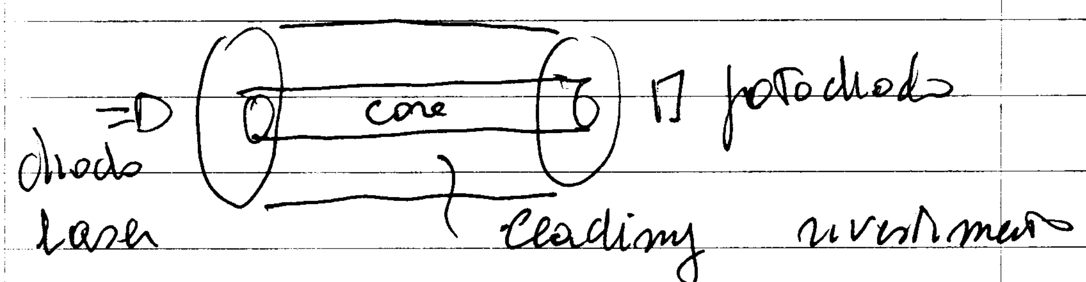


θ_1^* angolo limite,
è la base del funzionamento
delle fibre ottiche

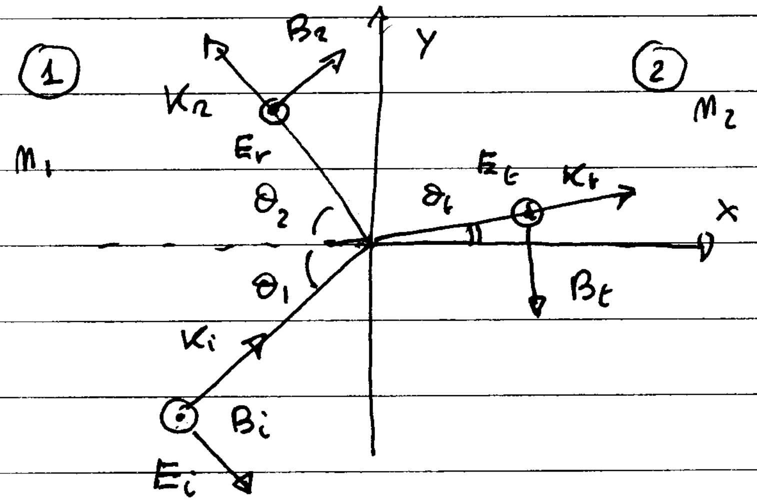


il fascio rimane localizzato
nella fibra ottica

Es. fibre ottiche della AT&T
trasmette 1700 Megabits per secondo
Necessita un ripetitore ogni
30 Km



Le leggi delle riflessione:



dalla legge di Snell $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_2} = \frac{n_1}{n_1} \Rightarrow \theta_i = \theta_r$

alla superficie $\oint E\,dl = 0 \Rightarrow E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$

questo significa

$$E_i\, e^{j(\bar{K}\cdot\bar{r} - \omega_i t)} + E_r\, e^{j(\bar{K}\cdot\bar{r} - \omega_2 t)} = E_t\, e^{j(\bar{K}\cdot\bar{r} - \omega_t t)}$$

$$\bar{K}\cdot\bar{r} = \cancel{K_x x} + K_y\, y + \cancel{K_z z}$$

$$x=0 \qquad z=0$$

$$E_i\, e^{j(K_y y - \omega_i t)} + E_r\, e^{j(K_y y - \omega_r)} = E_t\, e^{j(K_y y - \omega_t)}$$

questo è valido per $\forall y$, anche per $y=0$

$$E_i\, e^{j\omega_i t} + E_r\, e^{j\omega_r t} = E_t\, e^{j\omega_t t}$$

ma $\quad \omega_i = \omega_2 = \omega_t$

$(\boxtimes)$ $\quad E_i + E_r = E_t$

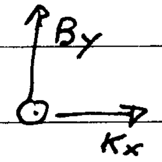
$$\oint H\, dl = 0 \Rightarrow \quad H_{//_1} = H_{//_2}$$

$$B_1 = \mu_1 H_1 \quad ; \quad B_2 = \mu_2 H_2$$

assumiamo $\mu_1 = \mu_2$

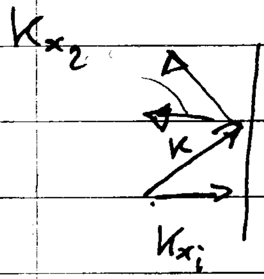
$$B_{y_i} + B_{y_2} = B_{y_t}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{K} \wedge \vec{E}}{\omega}$$



quindi $B_y = \dfrac{K_x}{\omega} E_z$ allora

(★) $\dfrac{K_{xi}}{\cancel{\omega}} E_i + \dfrac{K_{x2}}{\cancel{\omega}} E_2 = \dfrac{K_{x_t}}{\cancel{\omega}} E_t$



$$K_{x_i} = - K_{x_2}$$

inoltre $K_{x_i} = K \cos\theta_i$

$$\frac{K_{xi}}{\omega} = \frac{K}{\omega} \cos\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{T}{2\pi} \cos\theta_i$$

$$= \frac{T}{\lambda} \cos\theta_i = \frac{1}{v} \cos\theta_i = \frac{n}{c} \cos\theta_i$$

$$K_{x_2} = \frac{n_1}{c} \cos\theta_2$$

$$K_{x_t} = \frac{n_2}{c} \cos\theta_i$$

La relazione (★) diviene

$$n_1 \cos\theta_i E_i - n_1 \cos\theta_2 E_2 = n_2 \cos\theta_t E_t$$

che $\theta_i = \theta_2$

$$E_i - E_2 = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} E_t$$

con le (⊠) ovvero $E_i + E_2 = E_t$

si ottiene

$$2E_i = \left[1 + \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right] E_t$$

Se definiamo coefficiente di Trasmissione

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}$$

di nuovo da $E_i + E_2 = E_t$

$$1 + \frac{E_2}{E_i} = \frac{E_t}{E_i}$$

definisco coefficiente di Riflessione

$$R = \frac{E_r}{E_i}$$

Si ha

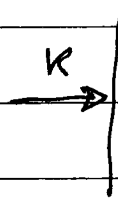
$$\boxed{1 + R = T}$$

$$R = T - 1$$

$$R = \frac{2n_1 \cos\vartheta_i}{n_1 \cos\vartheta_i + n_2 \cos\vartheta_t} - 1$$

$$\downarrow$$

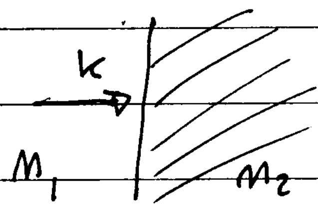
$$R = \frac{n_1 \cos\vartheta_i - n_2 \cos\vartheta_t}{n_1 \cos\vartheta_i + n_2 \cos\vartheta_t}$$



se $\vartheta_i = 0 \Rightarrow \vartheta_t = 0$

allora $\begin{cases} R = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ T = \dfrac{2 n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$

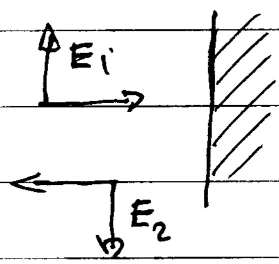
Osservazioni importanti:

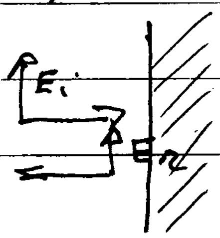


se $n_2 > n_1$

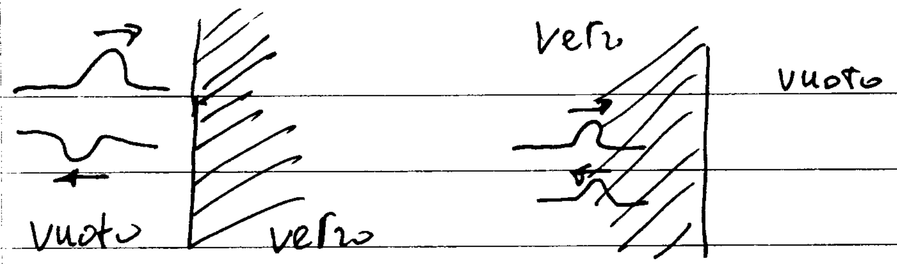
$R < 0$

$R = \frac{E_r}{E_i}$ $E_i > 0$, $E_r < 0$





se $n_2 < n_1$ $E_i > 0$; $E_2 > 0$


vuoto
vetro
vetro
vuoto