

Equazione di diffusione non lineare:

Consideriamo l'equazione di diffusione precedentemente descritta ma aggiungiamo un termine non lineare denominato $f(u)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

Se la scelta di $f(u)$ è del tipo

$$f(u) = \varepsilon u + u^2 - u^3$$

l'equazione diffusiva prende il nome di EQUAZIONE DI GINZBURG-LANDAU

(EGL) Comunque ritornando con una generica $f(u)$, consideriamo una soluzione viaggiante

$$\tilde{u}(x, t) = u(x - vt) ; \quad \xi = x - vt$$

quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + v \frac{\partial u}{\partial \xi} + f(u) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -v \frac{\partial u}{\partial \xi} - f(u)$$

anche in questo caso possiamo pensare all'analogie con una particella che si muove in un potenziale

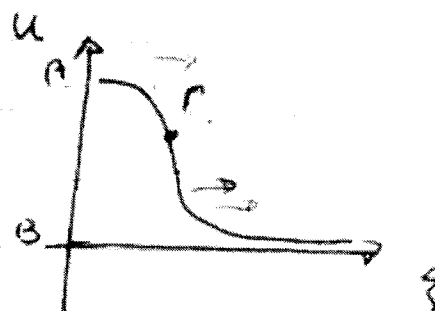
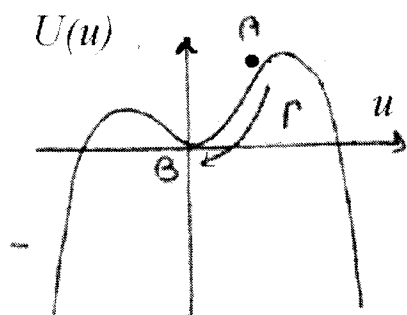
ma con la differenza del caso precedente per la presenza di un termine di attrito dato da $-v \frac{\partial u}{\partial \xi}$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = - \frac{\partial U(u)}{\partial u} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$U(u) = \frac{1}{2} \epsilon u^2 + \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{4} u^4 \quad \text{nel caso delle EGL}$$

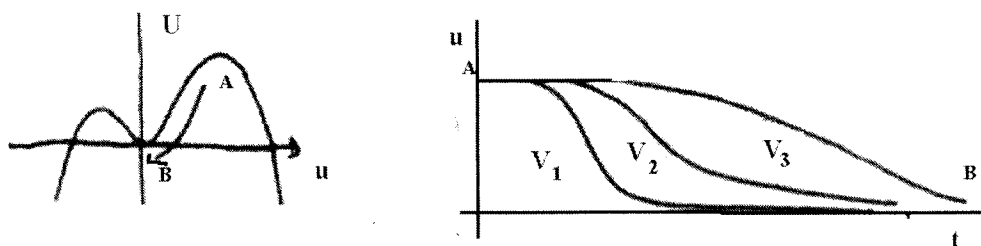
L'analisi grafica di una Traiettorie possibile è riportate in figura

La presenza delle viscosità conferisce una dinamica diversa al caso del solitone delle KdV. dato che ora dipende l'energia



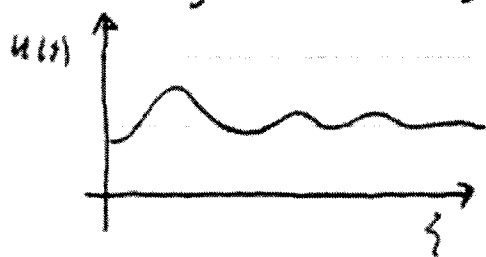
Come potete vedere dal grafico $u(\xi)$ più che profili impulsativi e in presenza di fronti viaggianti.

Dato che il termine viscoso corrisponde alla velocità del fronte questo lega il profilo del fronte in funzione della velocità.



La figura che rappresenta l'ampiezza in funzione della velocità mostra tre casi di evoluzione, partendo dallo zero, corrispondenti a tre valori decrescenti della viscosità e quindi delle velocità: $v_1 < v_2 < v_3$

Infatti, considerando il caso con v_1 , che rappresenta il valore più basso della viscosità, il moto della particella nel potenziale, rilassa più velocemente in conseguenza della bassa viscosità. Al limite, per valori molto bassi della velocità compariranno delle oscillazioni smorzate. Si osserva i



fronti lenti risultano più ripidi e fronti lenti danno oscillanti.