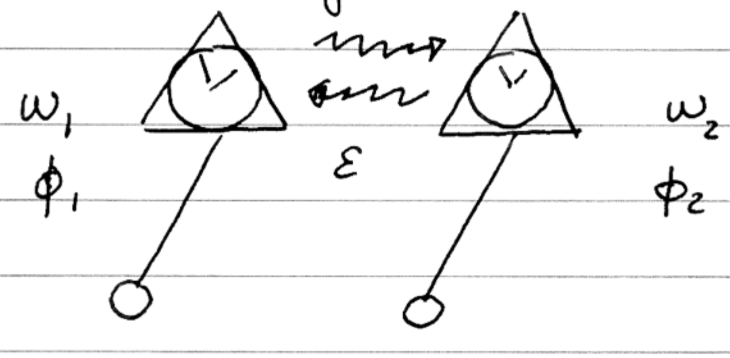
LA SINCRONIZZAZIONE

La sincronizzazione è un fenomeno molto importante in biologia. Si osserva nei ritmi circadiani, nel pacemaker del cuore e nella dinamica fra neuroni.

Per la prima volta fu analizzata da Christiaan Huygens che suppose di avere due orologi a pendolo posti ad una certa distanza fra loro. Ogni orologio risente l'azione dell'altro ed esiste un'intensità di interazione limite oltre la quale i pendoli oscillano in fase



Supponiamo che i pendoli siano debolmente accoppiati con intensità ε. Sia ω_1 e ω_2 le corrispettive pulsazioni e ϕ_1 e ϕ_2, le fasi.

in assenza di accoppiamento ($\varepsilon = 0$) vale $\frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1$ e $\frac{d\phi_1}{dt} = \omega_2$, ma per effetto dell'interazione si avrà:

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + \varepsilon\, G_1(\phi_1, \phi_2) \\[2ex] \dfrac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \varepsilon\, G_2(\phi_2, \phi_1) \end{cases}$$

le funzioni G_1 e G_2 saranno periodiche.
Consideriamo un caso semplificato:

Teorema di Strogatz - Mirollo:

$$G_1 = \sin(\phi_1 - \phi_2)$$
$$G_2 = \sin(\phi_2 - \phi_1) \quad \text{e quindi}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 - \varepsilon \sin(\phi_1 - \phi_2) \\[2ex] \dfrac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \varepsilon \sin(\phi_1 - \phi_2) \end{cases}$$

definiamo $\theta = \phi_1 - \phi_2$
$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$

Sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\phi_1 - \phi_2) = \Delta\omega - 2\varepsilon \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

ovvero

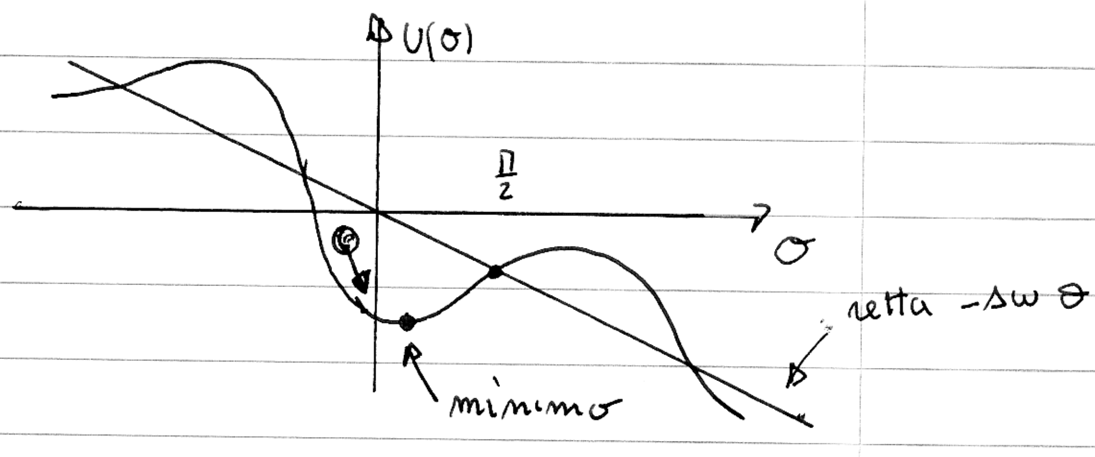
$$\frac{d}{dt}\theta = \Delta\omega - 2\varepsilon \operatorname{sen}\theta$$

questa mi dice che fissata una $\Delta\omega$ è necessario un valore speciale di ε per avere sincronizzazione, ovvero dovremo avere $\frac{d\theta}{dt} < 0$.

La cosa può essere meglio capita utilizzando la tecnica del potenziale

$$U(\theta) = -\int (\Delta\omega - 2\varepsilon \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

$$U(\theta) = -\Delta\omega\,\theta - 2\varepsilon \cos\theta$$



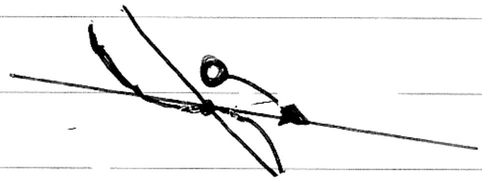
La pendenza della retta obliqua è data da $\Delta\omega$. Quindi si ha un potenziale periodico inclinato. L'inclinazione è data da $\Delta\omega$. Se la pendenza è lieve la particella rappresentativa

123

si adagerà sul minimo del potenziale.
Si osservi che il minimo non coincide necessariamente $\theta = 0$ $(\theta_1 = \theta_2)$;
ma si avrà $\theta_1 - \theta_2 = \theta_0$.
Questo vuol dire che si ha sincronizzazione con $\theta_1 = \theta_0 + \theta_2$ cioè la fase degli oscillatori non è identica.

Diversamente se la pendenza del potenziale $(\Delta\omega)$ è tale che in $\theta = \frac{\pi}{2}$ la derivata è negativa, le particelle rappresentativa non trova minimi e quindi scivolerà in basso all'infinito.

Non si ha sincronizzazione!



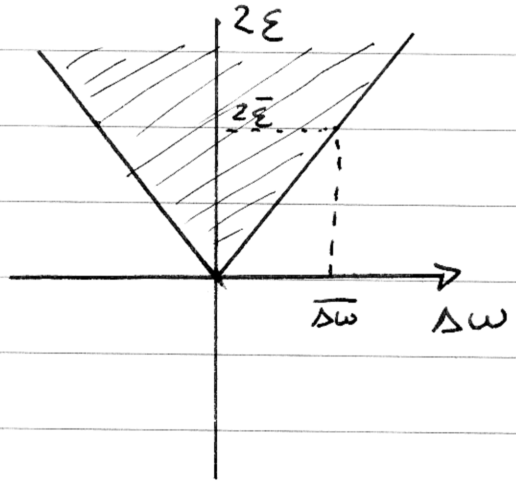
$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} < 0 \Rightarrow \left. -\Delta\omega + 2\varepsilon \sin\theta \right|_{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

quindi $-\Delta\omega + 2\varepsilon < 0$

$$2\varepsilon < \Delta\omega$$

Viceversa per avere sincronizzazione

$$\Delta\omega \leq 2\varepsilon$$



fissato $\overline{\Delta\omega}$ occorre superare la soglia $2\bar{\varepsilon}$ per avere sincronizzazione, quindi in tutta la regione tratteggiata (vedi figura) si ha sincronizzazione. Notare che per $\Delta\omega = 0$ si ha sempre sincronismo.

Tornando al caso generale

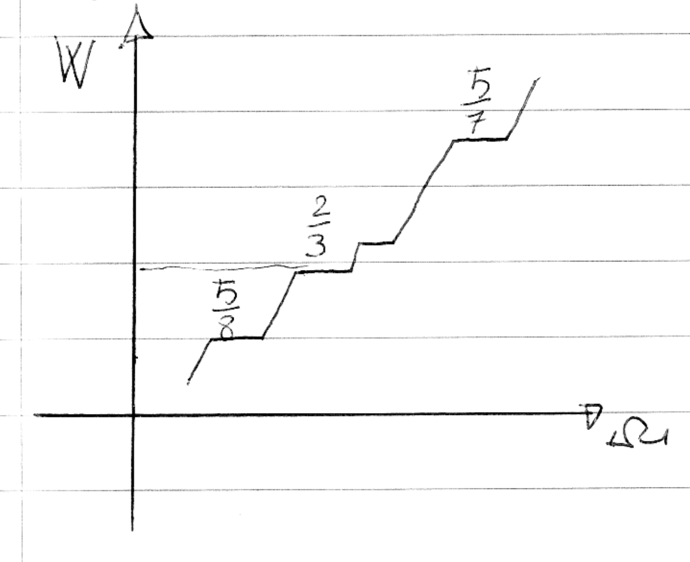
$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + \varepsilon\, G_1(\phi_1, \phi_2) \\ \\ \dfrac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \varepsilon\, G_2(\phi_2, \phi_1) \end{cases}$$

G_1 e G_2 sono periodici.
f_1 e f_2 si chiamano frequenze di lockin. Sono quelle frequenze alle quali avviene la sincronizzazione.
Per esempio in caso di sincronismo con armoniche si ha $f_1 = f_0$ (fondamentale)

$f_2 = 3 f_0$ (terza armonica)
in generale $\frac{f_1}{f_2} = \frac{n}{m}$ dove

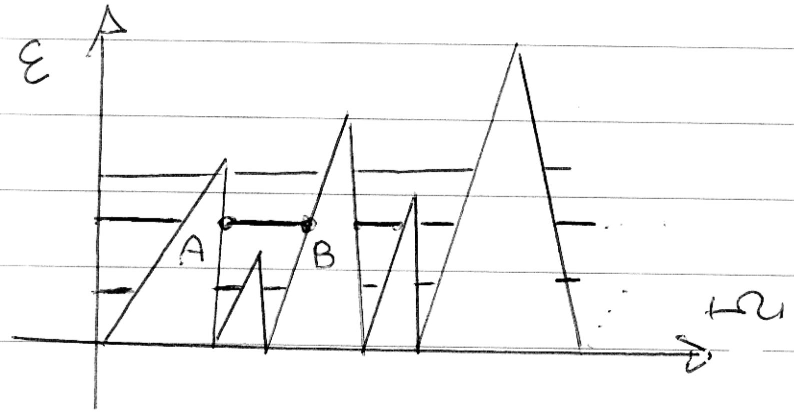
n ed m sono numeri interi.
definiamo $W = f_1/f_2$ e
supponiamo di variare liberamente le frequenze degli oscillatori ω_1 e ω_2.
Si definisce $\Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}$

È possibile graficare W in funzione di Ω_1



si ottengono dei plateaux in W al variare di Ω_1. Infatti se si ha sincronizzazione esisterà un range dove f_1/f_2 rimarrà costante nonostante si vari ω_1/ω_2 (lockin).

Se in un grafico si riportano i plateaux in funzione di ε e Ω_1 si ottiene il seguente grafico



Il grafico si costruisce nel seguente modo. Si fissa l'accoppiamento ε e si varia Ω₁. Si traccia un segmento (vedi A e B in figura) sintonizzando che $W = f_1/f_2$ rimane costante. Si trovano molti segmenti per lo stesso valore di ε. Ad ogni segmento corrisponde un dato rapporto W.

A causa del particolare aspetto della figura, i triangoli prendono il nome di lingue di Arnold (noto matematico russo che per la prima volta le descrisse)

La sincronizzazione fra sistemi caotici

Precedentemente abbiamo considerato due sistemi che possiedono delle frequenze proprie e sono interagenti.
In ogni caso tali sistemi sono soggetti ad una dinamica ordinata.
Si consideri, diversamente, due sistemi che singolarmente presentino un comportamento caotico. Prendiamo l'esempio di due modelli denominati di Rossler che per opportuni valori dei parametri si comportano singolarmente in modo caotico.
Sia ε il valore del termine di accoppiamento ed ω_1, ω_2 due coefficienti che caratterizzano una piccola differenza fra i due sistemi

$$\omega_{1,2} = 1 \pm \Delta\omega$$

Con $\varepsilon = 0$ (assenza di accoppiamento) i due sistemi si suppongono caotici.

Le equazioni possono essere sinteticamente scritte nel seguente modo

$$
\begin{cases}
\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}\, y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon\,(x_{2,1} - x_{1,2}) \\
\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}\, x_{1,2} + 0.15\, y_{1,2} \\
\dot{z} = 0.2 + z_{1,2}\,(x_{1,2} - 10)
\end{cases}
$$

ogni sistema è tridimensionale con variabili x, y, z e l'accoppiamento si trova sulla prima equazione, quantificato dalla ε.

Al variare di ε si osserva una sincronizzazione crescente fra i due sistemi ma mantenendo la dinamica caotica. Al di sopra di una certa soglia si ha una completa sincronizzazione che indica una dinamica caotica dei due sistemi ma con una differenza di fase costante. Si può definire il grado di sincronizzazione con una grandezza espressa nel seguente modo:

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [x_2(t+\tau) - x_1(t)]^2 \rangle}{[\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle]^{1/2}}$$

i simboli $\langle \ \rangle$ indicano una media temporale e τ è un tempo che esprime una traslazione temporale delle grandezze in esame $x_i(t)$

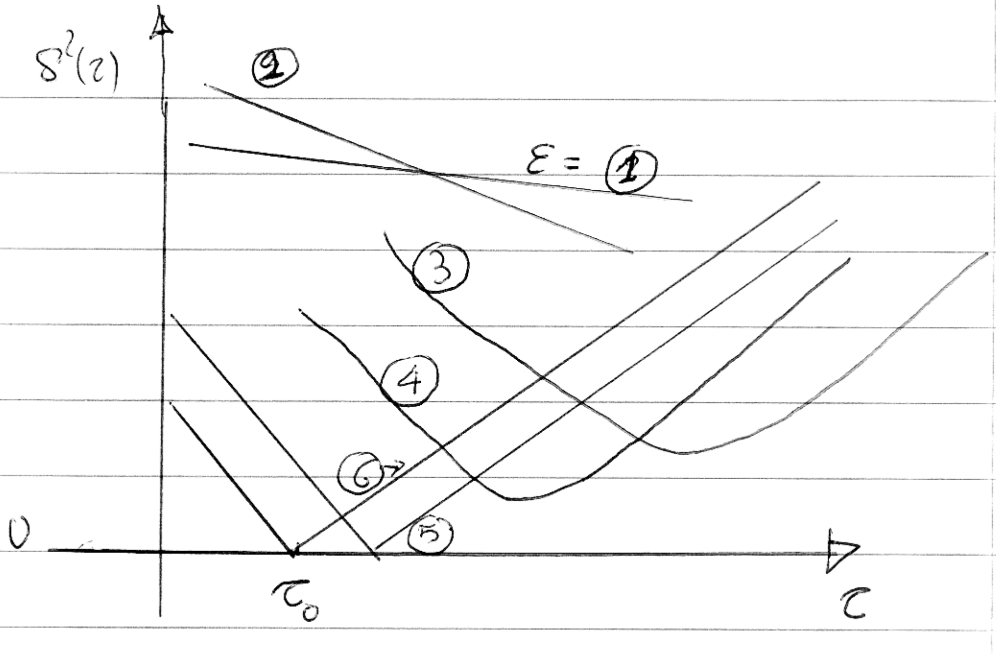
Si noti che se x_1 e x_2 sono variabili casuali

$$S^2(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau$$

Infatti la differenza di due variabili casuali è casuale. Il numeratore rappresenta la varianza della differenza, che non è nulla.

Se $x_2(t)$ e $x_1(t)$ sono sincronizzati e τ_0 è la differenza temporale, $x_2(t+\tau_0) = x_1(t)$ e quindi la differenza è zero ovvero $S^2(\tau) = 0$

Il grafico che segue riporta l'andamento di $S^2(\tau)$ al variare di τ per valori crescenti di ε.



Si noti che in corrispondenza di τ_0 la funzione raggiunge lo zero e quindi si ha completa sincronizzazione.