

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Studio e modellizzazione di
pattern nei cristalli liquidi
nematici

Relatore:
Prof. Leone Fronzoni

Candidato:
Niccoló Camarlinghi

Anno Accademico 2005/2006

Indice

Introduzione	1
1 Sistemi dinamici	10
1.1 Sistemi dinamici continui	10
1.2 Sistemi dinamici discreti	11
1.3 Esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema dinamico continuo	11
1.4 Sistemi dinamici lineari	12
1.5 Sistemi dinamici non lineari	13
1.6 Teoria delle biforcazioni	16
1.7 Forme normali di alcune biforcazioni	17
1.8 Persistenza di un punto di equilibrio	18
1.9 Forme normali	18
1.10 Biforcazione di Hopf	23
2 Pattern formation	25
2.1 Introduzione	25
2.2 Un esempio di formazione di pattern: “Rayleigh-Bernard convection”	26
2.3 Espansione debolmente non lineare	29
2.4 Equazione di ampiezza per instabilità I_s	33

2.4.1	Introduzione euristica dell'equazione di ampiezza per sistemi isotropi	33
2.4.2	Introduzione euristica all'equazione di ampiezza per sistemi anisotropi	34
2.4.3	Interpretazione fisica dei parametri delle equazioni di ampiezza	35
2.4.4	L'equazione reale di Landau-Ginzburg (RGL)	36
2.4.5	Soluzioni di onda per RGL	38
2.5	Instabilità III_0	39
2.6	Instabilità I_0	41
2.7	RGL vs CGL	42
2.8	Instabilità secondarie	43
2.9	Competizioni tra i vari pattern	43
3	Equazione di fase e difetti topologici	45
3.1	Equazione di fase per la RGL	45
3.2	Equazione di fase per sistemi isotropi	45
3.3	Equazione di fase per sistemi anisotropi	47
3.4	Difetti topologici	47
3.5	“Climbing” e “gliding” in sistemi anisotropi	49
3.6	Dinamica dei difetti	50
3.6.1	“Climbing” e “gliding” nell'equazione isotropa	51
4	Strutture coerenti nella CGL	54
4.1	Studio dell'equazione CGL	54
4.2	Simmetrie nella CGL	54
4.3	Strutture nella CGL 1D	56
4.4	Strutture coerenti	57
4.4.1	Argomenti di conteggio	59

<i>INDICE</i>	4
4.5 Nozaki-Bekki “hole”	60
4.6 Distruzione dei Nozaki-Bekki “hole”	60
4.7 Strutture nella CGL 2D	62
5 Elettroconvezione nei cristalli liquidi	67
5.1 Cristalli liquidi	67
5.2 Elettroconvezione nei cristalli liquidi nematici	68
5.3 “Williams rolls”	71
5.4 Fenomenologia dei pattern e instabilità secondarie	72
5.5 Oscillazioni dei difetti topologici	74
6 Algoritmi per la simulazione	77
6.1 “Split-step”	77
6.2 “Splitting” dell’equazione	78
6.3 “Exponential time-step”	80
6.4 Applicazione dell’ “exponential time-step” all’equazione di Landau-Ginzburg	81
7 Risultati delle simulazioni	82
7.1 Introduzione	82
7.2 Equazione complessa di Landau-Ginzburg unidimensionale	84
7.2.1 Instabilità di Eckhaus generalizzata	89
7.2.2 Oscillazioni nel modello unidimensionale	90
7.3 Equazione reale di Landau-Ginzburg bidimensionale	93
7.4 Equazione complessa di Landau-Ginzburg bidimensionale	94
7.5 Moto delle dislocazioni nella RGL e nella CGL	99
7.5.1 Interazione dei difetti nella RGL	100

<i>INDICE</i>	5
7.5.2 Fit analitici	101
7.5.3 Interazione di difetti nella CGL	102
7.5.4 Interazione di difetti nella CGL per $b = c$	104
7.5.5 Numero dei difetti topologici al variare dei parametri b e c	104
7.6 Regime di intermittenza spazio temporale	108
Conclusioni	109

Introduzione

La natura genera una numerosa quantità di strutture organizzate, a partire dalle dune nella sabbia per finire alle impronte digitali e alle macchie sul manto degli animali. Tutti questi fenomeni, a dispetto della loro diversa origine, hanno un meccanismo basilare in comune, oggetto di questa tesi.



Figura 1: Pattern nella sabbia

Gli strumenti utilizzati per modellare questo fenomeno, chiamato “*formazione di pattern*”, sono la teoria dei sistemi dinamici non lineari con riferimento alla teoria delle *biforcazioni*; di questi argomenti sarà data una breve descrizione nel capitolo iniziale di questo lavoro.

Noi ci occuperemo solo di sistemi poco oltre la soglia dell’instabilità primaria e per portare a termine questo obiettivo useremo una teoria perturbativa che prende il nome di “*espansione debolmente non lineare*”.

In questo approccio è cruciale la separazione delle scale spaziali e temporali che avviene alla soglia della biforcazione: le deformazioni che avvengono su scala “veloce” sono regolate dall’analisi lineare, mentre le variazioni su scala “lenta” evolvono secondo un’equazione di forma “universale” che chiameremo *equazione di ampiezza*.

Tale equazione rappresenta indubbiamente un semplice modello che ci consente di studiare una grande quantità di sistemi vicino alla soglia della biforcazione senza dover ricorrere alle equazioni complete che molto spesso sono fuori dalla portata numerica dei più potenti calcolatori oggi esistenti.

Numerosi sistemi possono essere rappresentati dall’equazione di ampiezza, tuttavia il loro dettaglio microscopico non influisce sulla forma di tale equazione ma solo sui valori che assumono i suoi coefficienti.

Nella fattispecie le equazioni di ampiezza hanno la forma di equazioni assai note in letteratura, perché utilizzate in molti altri ambiti della fisica: le equazioni *di Landau-Ginzburg*.

In questa tesi sono state impiegate due differenti equazioni di ampiezza: l’equazione a coefficienti reali (RGL) che descrive i pattern “stazionari” e quella a coefficienti complessi (CGL) che descrive pattern tempo dipendenti.

In questo lavoro faremo principalmente riferimento allo studio delle *instabilità elettroconvettive nei cristalli liquidi nematici (EHC)*, tuttavia bisogna sottolineare che l’interesse di questa tesi non va in particolare al sistema sopra citato ma allo studio e alla modellizzazione degli aspetti universali che si presentano nell’ambito della formazione di pattern.

Sarà esposta una breve fenomenologia della EHC e una descrizione di un esperimento “ideale” volto a riprodurre tale fenomeno.

Le instabilità elettroconvettive possono essere modellate con il formalismo dell’equazione di ampiezza dando una descrizione basilare di alcuni fenomeni e in buon accordo con le osservazioni sperimentali.

In particolare la nostra attenzione si è rivolta allo studio dei *difetti topologici* e al loro moto nei pattern spazialmente periodici.

Lo studio del moto dei difetti è stato svolto numericamente a causa della difficoltà nel risolvere analiticamente le equazioni di ampiezza. A questo

proposito sono state scritte varie simulazioni unidimensionali e bidimensionali.

Le simulazioni numeriche sono state implementate con algoritmi spettrali di tipo “leap frog” e “exponential-timestep” che hanno garantito buone prestazioni anche su un computer di tipo standard.

La parte originale di questo lavoro consiste, oltre che nella scrittura delle simulazioni e nell’adattamento di alcuni algoritmi alle situazioni del caso, nello studio del moto dei difetti topologici e della loro interazione nei vari regimi delle equazioni reali e complesse unidimensionali e bidimensionali: sono stati esplorati vari regimi delle equazioni di ampiezza cercandone uno in cui fosse possibile osservare fenomeni di moto non banali dei difetti.

E’ importante sottolineare che l’intento di questo lavoro di tesi non è studiare in particolare l’EHC quanto piuttosto analizzare una generica classe di sistemi che esibiscono una formazione di pattern di cui l’elettroconvezione nei cristalli liquidi è uno degli esempi più semplici in natura.

Vediamo brevemente il contenuto dei singoli capitoli di questa tesi: nel capitolo iniziale sarà data una breve descrizione della teoria dei sistemi dinamici con riferimento alla stabilità lineare; sarà mostrato il concetto di “biforcazione” e saranno mostrate le tipologie più comuni di biforcazione.

Nel secondo capitolo sarà invece affrontata “l’espansione debolmente non lineare” e sarà esposta la teoria *classica* della formazione di pattern con riferimenti alle equazioni di Landau-Ginzburg reali e complesse.

Nel terzo capitolo sarà trattata la teoria dell’*equazione di fase* per i sistemi anisotropi e sarà introdotto il concetto di difetto topologico.

Nel quarto capitolo sarà esposto un breve studio delle strutture coerenti e delle simmetrie dell’equazione complessa di Landau-Ginzburg.

Nel quinto capitolo sarà data un breve panorama del fenomeno dell’elettroconvezione nei cristalli liquidi nematici che è il sistema da noi preso in considerazione per quanto riguarda la formazione di pattern.

Nel sesto capitolo saranno mostrati gli algoritmi “leap-frog” e “exponential time-step” che sono stati usati per risolvere numericamente le equazioni di ampiezza.

Infine nel settimo capitolo saranno riportati i risultati delle simulazioni unidimensionali e bidimensionali delle equazioni di ampiezza reali e complesse.



Figura 2: Pattern sul manto di una zebra

Capitolo 1

Sistemi dinamici

1.1 Sistemi dinamici continui

Un *sistema dinamico* continuo in $W \subset \mathbb{R}^n$ è un oggetto descritto dalla seguente relazione

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (1.1)$$

dove $F(X)$ è un campo vettoriale $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenziabile di classe C^1 almeno.

Tale sistema può essere pensato come l'evoluzione temporale di un campo X con una certa legge che dipenderà da $F(X)$.

Chiameremo orbita di un sistema dinamico continuo la funzione $X(t)$ che soddisfa identicamente l'equazione del moto per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Un'equazione del prim'ordine nelle derivate temporali come la (1.1) necessita di una condizione iniziale per essere ben definita; chiameremo quindi *flusso integrale* (o soluzione generale) di un sistema dinamico continuo la famiglia di applicazioni

$$\Phi^t : X_0 \longrightarrow (X(t))$$

che per ogni tempo t associa alla sua condizione iniziale la corrispondente soluzione al tempo t .

I sistemi dinamici possono essere divisi in varie classi: sistemi lineari, non lineari, discreti e continui.

Come vedremo in seguito il nostro interesse si concentrerà in particolare sui sistemi dinamici continui di tipo non lineare.

Per i sistemi lineari esistono strategie di soluzione “standard” mentre per i sistemi non lineari non è possibile, in generale, trovare il flusso integrale; in tal caso si dovranno utilizzare metodi risolutivi di tipo approssimato o numerico come quelli che esporremo nel capitolo 6.

Tale soluzione numerica essendo implementata su calcolatori è di per se stessa eseguita in maniera discreta. In questo senso possiamo dire che esiste un forte legame tra i sistemi dinamici continui e discreti.

1.2 Sistemi dinamici discreti

La definizione di sistema dinamico discreto è analoga a quella precedentemente descritta.

Un sistema dinamico discreto in $W \subset \mathbb{R}^n$ è un'applicazione $f : W \longrightarrow W$ dove f è una funzione differenziabile con inversa differenziabile (di classe C^1 almeno)

$$X_{k+1} = f(X_k) \tag{1.2}$$

Per il caso discreto avremo una definizione di orbita analoga a quella vista prima, cioè un'applicazione X_k che soddisfi la (1.2) per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Noi ci occuperemo principalmente di sistemi dinamici continui anche se, come notato precedentemente, il legame tra i sistemi continui e quelli discreti è forte.

1.3 Esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema dinamico continuo

E' naturale chiedersi sotto quali condizioni la (1.1) ammetta soluzione.

La risposta ci viene fornita dalla teoria delle equazioni differenziali; infatti il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale [1] del prim'ordine dice che:

Presa un'equazione del tipo

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t)$$

con la condizione iniziale

$$X(t_0) = X_0$$

in cui $F : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, e sia F uniformemente lipschitziana cioè $\exists L_\Omega > 0$ t.c.

$$|F(X, t) - F(Y, t)| \leq L_\Omega |X - Y| \quad (1.3)$$

per $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ e $\forall t \in \mathbb{R}$.

Se $X_0 \in \Omega$ e $t_0 \in I$ allora esistono un intorno $\Omega_0 \subset \Omega$ di X_0 e un intorno $I_0 \subset I$ di t_0 tali che il problema ha soluzione unica, ovvero esiste localmente il flusso integrale e dipende con continuità dalla condizione iniziale.

Nel caso di un sistema dinamico sappiamo che la funzione $F(X)$ è differenziabile con continuità ed è possibile dimostrare facilmente che la differenziabilità è una condizione sufficiente affinché si verifichi la (1.3) e quindi che i sistemi dinamici ammettono localmente sempre soluzione e che questa è localmente unica.

1.4 Sistemi dinamici lineari

Un sistema dinamico si dice lineare se è della forma

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (1.4)$$

dove $X \in \mathbb{R}^n$ A è una matrice $n \times n$.

Se la matrice A è diagonalizzabile è possibile disaccoppiare le equazioni del sistema dinamico che avranno come soluzione nella nuova base

$$\tilde{X}_i = \tilde{X}_{0i} e^{\lambda_i t} \quad (1.5)$$

dove λ_i sono gli autovalori della matrice A .

In generale, se la matrice non è diagonalizzabile, possiamo scrivere la soluzione del sistema dinamico (1.4)

$$X(t) = X_0 e^{At} \quad (1.6)$$

dove abbiamo usato la definizione di esponenziale di matrice

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \quad (1.7)$$

si può dimostrare che tale serie converge sempre per ogni A e che quindi abbiamo il flusso integrale del sistema (1.4) ¹.

1.5 Sistemi dinamici non lineari

Un sistema dinamico non lineare è un sistema la cui funzione $F(X)$ dipende non linearmente da X . In generale è molto difficile, se non impossibile, scrivere il flusso integrale del sistema e quindi per lo studio di tali sistemi si dovrà ricorrere a uno studio di tipo qualitativo o a una soluzione di tipo numerico.

Punti di equilibrio

Un sistema dinamico, per il teorema di esistenza e di unicità, ammette sempre soluzione per ogni condizione iniziale $X(0) = X_0 \in W$.

Un caso particolarmente semplice si verifica quando $F(X_0) = 0$; in tal caso il punto X_0 si dirà *punto di equilibrio* e l'orbita definita dalla condizione iniziale sarà un'orbita costante e uguale a X_0 per ogni t .

Per l'unicità della soluzione si avrà che nessun'altra orbita del sistema può passare per X_0 .

E' chiaro quindi che un sistema che ha come condizione iniziale un punto di equilibrio rimarrà "per sempre" in tale stato e quindi questo può essere chiamato punto di equilibrio a giusto titolo.

¹Per una trattazione estesa dei sistemi dinamici lineari si veda [1]

Nella pratica è molto più utile sapere cosa succede nell'intorno di un punto di equilibrio. Per rispondere a questa domanda dobbiamo sviluppare un apposito formalismo.

Sistema linearizzato e esponenti di Lyapunov

Se abbiamo un sistema dinamico con un punto di equilibrio X_s

$$\frac{dX_s}{dt} = F(X) = A(X - X_s) + G(X) \quad (1.8)$$

dove A è la matrice jacobiana della funzione F calcolata in X_s e G è un infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto a $X - X_s$.

Il sistema dinamico

$$\frac{d(X - X_s)}{dt} = A(X - X_s) \quad (1.9)$$

si dice sistema linearizzato di $\dot{X} = F(X)$, e le parti reali degli autovalori di A si chiamano esponenti di *Lyapunov*.

Lo studio della stabilità di un punto di equilibrio può essere fatto linearizzando le equazioni nell'intorno di tale punto, a patto che nessuno degli autovalori abbia parte reale nulla; in tal caso questo punto si dirà “*iperbolico*”.

Per un sistema “iperbolico” il teorema di Hartman-Grobman ² ci garantisce che ogni cambiamento qualitativo della dinamica non lineare deve essere riflesso nella dinamica del sistema linearizzato; ossia è possibile ridurre lo studio dell'equilibrio non lineare a quello dello studio lineare.

²Per una formulazione rigorosa del teorema di Hartman-Grobman si veda [2]

Studio della stabilità in dimensione due

Nel caso di un sistema di dimensione due

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F(x_1, x_2) \quad (1.10)$$

se linearizziamo l'equazione (1.10) abbiamo

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

possiamo diagonalizzare A nel campo complesso e scoprire l'andamento delle soluzioni nell'intorno del punto di equilibrio.

Gli autovalori della matrice si ottengono risolvendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

Da cui otteniamo studiando le soluzioni del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) = 0$$

i risultati che possono essere riassunti nel seguente schema:

- nodo stabile : autovalori reali negativi
- nodo instabile : autovalori reali positivi
- sella : autovalori reali di segno opposto
- spirale stabile : autovalori immaginari con parte reale < 0
- spirale instabile : autovalori immaginari con parte reale > 0
- centro : autovalori con parte reale nulla

Per sistemi con dimensioni > 2 lo studio della stabilità è analogo; tuttavia occorre calcolare le radici di un polinomio di grado uguale alla dimensione del sistema.

Come sappiamo i polinomi di grado superiore al quinto non ammettono, in generale, una formula risolutiva analitica.

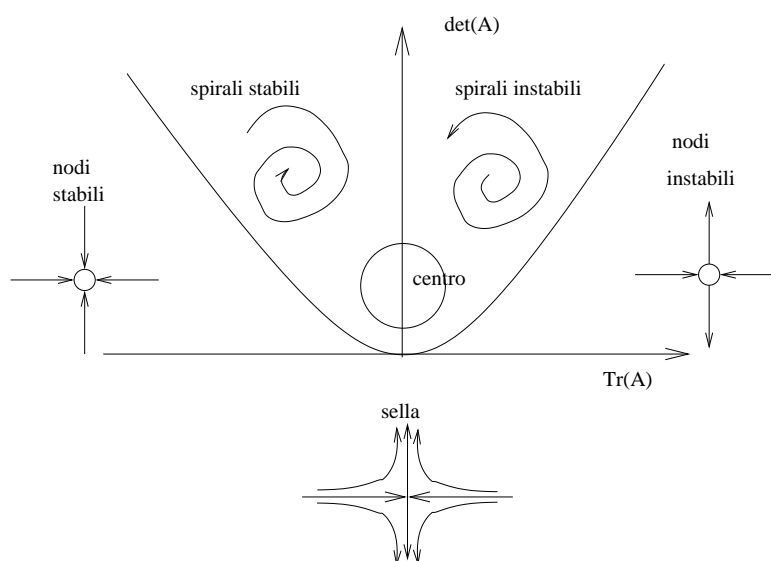


Figura 1.1: Diagramma di stabilità in dimensione due

Per sapere se un polinomio ha radici con parte reale negativa possiamo usare il teorema di Routh-Hurwitz³.

1.6 Teoria delle biforcazioni

La parola *biforcazione* è largamente usata in vari contesti e descrive una situazione in cui un oggetto altera le sue proprietà topologiche o qualitative al variare di un parametro.

La teoria delle biforcazioni si occupa proprio di studiare l'apparizione o la scomparsa di punti di equilibrio, orbite periodiche o oggetti più complicati come ad esempio gli attrattori "strani".

³Tale teorema asserisce che le parti reali delle radici di un polinomio $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ sono negative se i determinanti delle matrici $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ sono tutti > 0

dove $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & \dots & a_k \end{pmatrix}$ [28]

I metodi impiegati per questo studio sono fondamentali per comprendere la dinamica non lineare.

Noi ci occuperemo di biforcazioni nei sistemi dinamici non lineari. Questo fenomeno è molto importante soprattutto nell'ambito della formazione di pattern; infatti la formazione di strutture ordinate al di sopra di una soglia è associata in maniera naturale a un fenomeno di biforcazione.

1.7 Forme normali di alcune biforcazioni

Dato un sistema dinamico non lineare della forma

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu)$$

dove μ è un parametro del sistema, se $X = 0$ è un punto di equilibrio iperbolico possiamo studiare la sua stabilità tramite il teorema di Hartman-Grobman linearizzando il sistema dinamico nell'intorno di $X = 0$.

Siano adesso $\lambda(\mu)$ gli autovalori del sistema linearizzato, è possibile che esista un valore μ_c tale che $Re\lambda(\mu_c) = 0$.

Per tali valori del parametro di controllo, il punto di equilibrio non è più iperbolico e il teorema di Hartman-Grobman non è più valido: siamo quindi nella vicinanza di un punto la cui natura sta cambiando, e che chiameremo punto di biforcazione.

La perdita di iperbolicità può avvenire principalmente in due modi:

1. Con un semplice autovalore $\lambda = 0$, in tal caso diremo che la biforcazione è stazionaria. Questo comportamento è quello delle biforcazioni “saddle-node”, quelle “transcritiche” e le “pitchfork”.
2. Con due autovalori complessi coniugati tali che $Re\lambda(\mu) = Re\lambda(\bar{\mu}) = 0$; chiameremo questa biforcazione “biforcazione di Hopf”.

1.8 Persistenza di un punto di equilibrio

Come accennato prima è possibile che la biforcazione avvenga tramite la “scomparsa” di un punto di equilibrio; a questo proposito il “teorema della funzione implicita” [2] ci fornisce un criterio sufficiente per stabilire se un punto di equilibrio è persistente.

Condizione sufficiente affinché un punto di equilibrio sia persistente è che

$$\det(D_X F(0, \mu_c)) \neq 0$$

dove $D_X F(0, \mu_c)$ è la matrice jacobiana di $F(X, \mu_c)$ calcolata nel punto $X = 0$.

Quindi in particolare questa relazione è vera solo se la matrice della linearizzazione è non singolare ovvero solo se tutti i suoi autovalori sono diversi da zero.

In particolare si può vedere facilmente che una biforcazione di Hopf non può cambiare il numero di punti di equilibrio mentre questo è possibile nel caso di una biforcazione stazionaria.

Introduciamo a questo punto un’ulteriore classificazione: chiameremo biforcazione supercritica una biforcazione in cui la soluzione omogenea perde stabilità con l’aumentare di un parametro di controllo, subcritica una che diventa instabile alla sua diminuzione.

1.9 Forme normali

L’idea che sta alla base del concetto di “forma normale” è quella di proiettare la dinamica di un sistema, vicino alla soglia della biforcazione, su un sottospazio chiamato “*varietà centrale*”⁴.

In questo senso possiamo considerare i gradi di libertà che appartengono alla varietà centrale come *attivi*, cioè importanti al fine della biforcazione, e gli altri come *passivi*, cioè come ininfluenti.

⁴La varietà centrale, per soluzioni di piccola ampiezza, è lo spazio generato dagli autovettori che hanno autovalori sull’asse immaginario nel punto in cui avviene la biforcazione. Per una trattazione estesa del concetto di varietà centrale si veda [2]

Lo scopo di questo approccio è quello di riprodurre qualitativamente le caratteristiche della dinamica vicino alla soglia della biforcazione.

A tale fine si opera un'espansione nei parametri, fino all'ordine che ci consente di riprodurre il comportamento qualitativo del sistema.

In conclusione le forme normali sono quindi semplici equazioni che rappresentano i “*prototipi*” di una certa biforcazione.

Vediamo adesso come possiamo ricavare tali forme a partire da un generico sistema dinamico

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu) \quad (1.11)$$

e supponiamo che $F(0, 0) = 0$, di seguito consideriamo vari casi separatamente:

Biforcazioni stazionarie

Supponiamo che

$$\frac{\partial F(0, 0)}{\partial x} = 0$$

espandendo la (1.11) nell'intorno del punto $(x, \mu) = (0, 0)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \frac{\partial F(0, 0)}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial x^2} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial x \partial \mu} \mu x + \\ & + \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial^2 \mu} \frac{\mu^2}{2} + \frac{\partial^3 F(0, 0)}{\partial x^3} \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Questa relazione vale in generale per le biforcazioni stazionarie, vediamo di studiarla in alcuni casi particolari.

Biforcazione “saddle-node”

Se supponiamo che

$$\frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial x^2} \neq 0$$

e

$$\frac{\partial F(0, 0)}{\partial \mu} \neq 0$$

l'equazione (1.12) diventa, trascurando gli ordini superiori,

$$\dot{x} = \frac{\partial F(0,0)}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x^2} \frac{x^2}{2}$$

da cui possiamo riscrivere l'equazione in modo che

$$\dot{\tilde{x}} = \epsilon_1 \tilde{\mu} + \epsilon_2 \tilde{x}^2$$

Il risultato è rappresentabile dal cosiddetto “diagramma di biforcazione”.

Nel diagramma di biforcazione si usa rappresentare l'ampiezza dei punti di equilibrio al variare del parametro di controllo: le linee tratteggiate rappresentano soluzioni instabili, mentre quelle continue rappresentano quelle stabili come mostrato in figura (1.2).

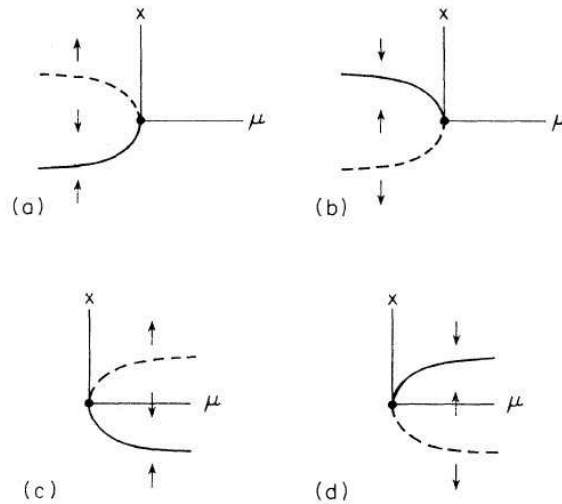


Figura 1.2: Diagramma per una biforcazione saddle-node (a) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, (b) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$, (c) $-\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, (d) $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$ [2]

Biforcazione “transcritica”

In questo caso non abbiamo la scomparsa o la comparsa di nuovi punti di equilibrio, se adesso supponiamo che

$$\frac{\partial^n F(0,0)}{\partial \mu^n} = 0$$

lo sviluppo (1.12) ci dà

$$\dot{x} = \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x^2} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x \partial \mu} \mu x + \frac{\partial^3 F(0,0)}{\partial x^3} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

da cui riscalando e trascurando gli ordini superiori

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{x}(\epsilon_1 \tilde{\mu} + \epsilon_2 \tilde{x})$$

il cui comportamento è mostrato in figura (1.3).

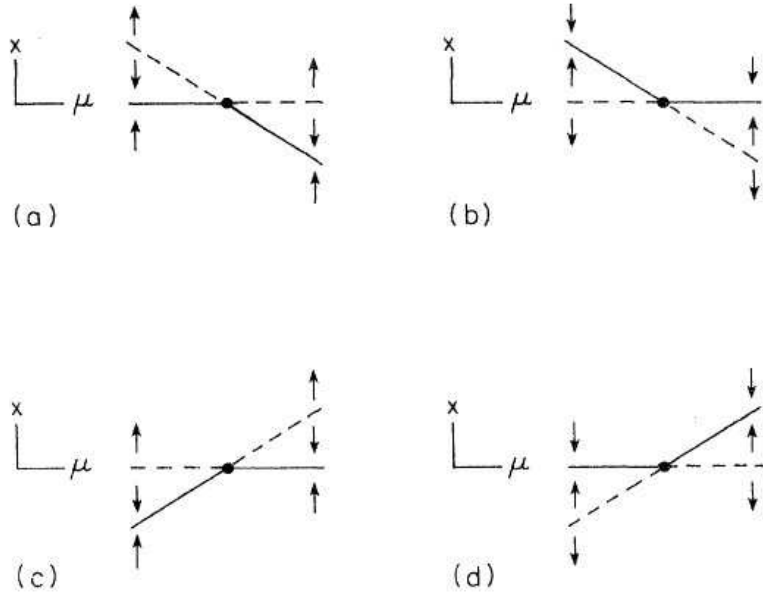


Figura 1.3: Diagramma per una biforcazione transcritica (a) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, (b) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$, (c) $-\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, (d) $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$ [2]

Biforcazione “pitchfork”

Se supponiamo adesso che valgano le ipotesi precedenti ma che $\frac{\partial^3 F(0,0)}{\partial x^3} = 0$, ad esempio se il sistema dinamico è invariante per riflessioni cioè

$$F(X, \mu) = -F(-X, \mu)$$

abbiamo, dopo aver opportunamente riscritto le equazioni,

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{x}(\epsilon_1 \tilde{\mu} + \epsilon_2 \tilde{x}^2)$$

il cui comportamento è mostrato in figura (1.4).

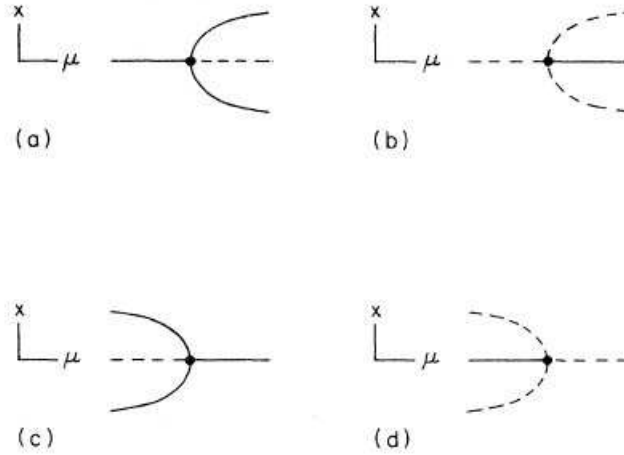


Figura 1.4: Diagramma per una biforcazione “pitchfork” (a) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, (b) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$, (c) $-\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, (d) $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$ [2]

Biforcazioni imperfette

Possiamo anche considerare il caso di una biforcazione “imperfetta”, ossia una biforcazione “pitchfork” o “transcritica” a cui venga aggiunto un termine

$$\dot{x} = F(X, \mu) + \epsilon V(X, \mu)$$

con $0 < \epsilon \ll 1$, questa perturbazione può essere qualsiasi nel senso che può non rispettare le relazioni di simmetria che ci hanno consentito di ricavare le forme normali nelle precedenti equazioni.

Il risultato può essere compreso euristicamente guardando la figura (1.5) dalla quale si può notare che alcune biforcazioni imperfette portano alla generazione di fenomeni di isteresi.

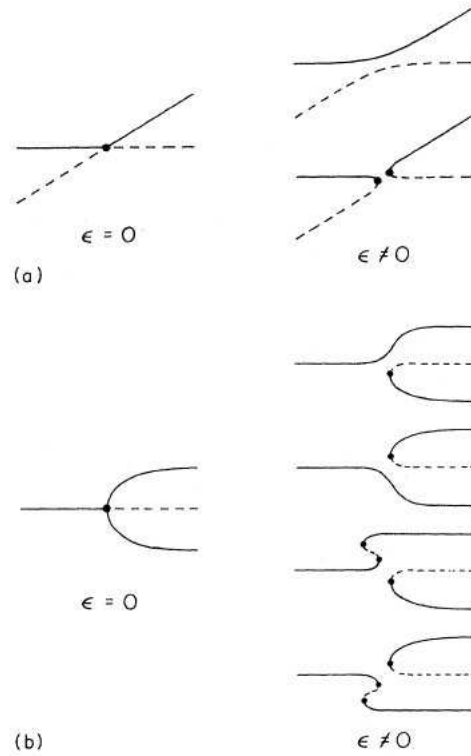


Figura 1.5: Diagrammi di alcune biforcazioni perturbate (a) biforcazione transcritica (b) biforcazione “pitchfork” [2]

1.10 Biforcazione di Hopf

La biforcazione di *Hopf* è caratterizzata dall’annullarsi della parte reale di una coppia coniugata di autovalori immaginari.

La sua forma normale è più semplice se scritta in coordinate polari

$$\dot{r} = r \left[\gamma(\mu) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\mu) r^{2j} \right] \quad (1.13)$$

$$\dot{\theta} = \omega(\mu) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\mu) r^{2j} \quad (1.14)$$

in cui $\gamma(\mu) \pm i\omega(\mu)$ è la nostra coppia di autovalori che supponiamo soddisfare

le seguenti relazioni: $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) \neq 0$ e $\frac{d\gamma(0)}{d\mu} > 0$.

Una caratteristica importante dell'equazione (1.14) è che non presenta dipendenza da θ ; questo rende la dinamica della forma normale invariante rispetto al gruppo delle rotazioni di fase, detto anche simmetria di “phase-shift”, come mostrato dal diagramma di biforcazione in figura (1.6).

Per questo motivo la biforcazione di Hopf è un fenomeno molto più “ricco” della biforcazione stazionaria e dà origine a comportamenti non lineari tempo dipendenti.

Nei prossimi capitoli vedremo che questa biforcazione ha un ruolo centrale nello studio della formazione di pattern.

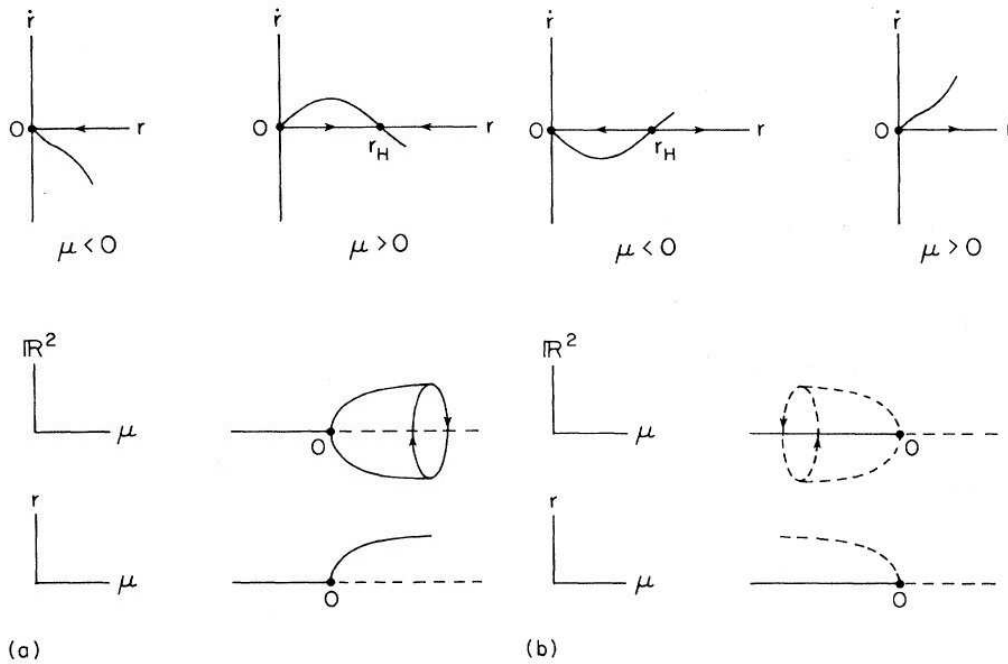


Figura 1.6: Dinamica radiale e diagramma per una biforcazione di Hopf (a) biforcazione supercritica $a_1(0) < 0$, (b) biforcazione subcritica $a_1(0) > 0$, i punti in cui $\dot{r} = 0$ sono punti di equilibrio per la parte radiale [2]

Capitolo 2

Pattern formation

2.1 Introduzione

Il fenomeno della “pattern formation” ricorre in una vasta quantità di contesti naturali, dalle macchie sul manto degli animali alle celle convettive nel sole. Sperimentalmente, i pattern sono stati studiati in vari sistemi inclusi “Rayleigh-Bernard convection” RBC, instabilità elettroconvettive nei cristalli liquidi in fase nematica (EHC), reazioni chimiche e onde di Faraday.

A dispetto delle differenze tra questi sistemi fisici, i pattern osservati possiedono varie caratteristiche in comune, e questo indica una qualche universalità che regola la formazione di queste strutture.

Il punto di partenza per la modellizzazione di un sistema che esibisce una formazione di pattern è un sistema dinamico del tipo

$$\partial_t U(x, y, t) = G(U(x, y, t), \partial_x, \partial_y, R)$$

in cui U è una quantità fisica che varia a seconda del contesto (ad es. nella RBC il campo di velocità del fluido), G può essere in generale, una qualsiasi funzione non lineare di U , delle sue derivate e di R , un parametro che possiamo variare a nostro piacimento detto *parametro di controllo*.

Noi saremo interessati a modelli del tipo

$$\partial_t U(x, y, t) = \Delta U(x, y, t) + f(U(x, y, t), R) \quad (2.1)$$

tali sistemi si chiamano sistemi reazione-diffusione.

Per un sistema come il (2.1), che in generale non può essere risolto analiticamente, la strategia da adottare è l'utilizzo di una teoria perturbativa. Uno dei metodi più usati prende il nome di “*espansione debolmente non lineare*”. Questo metodo perturbativo è rigorosamente valido solo vicino alla soglia dell'instabilità. Nonostante ciò, tramite questa teoria, si riescono a descrivere quantitativamente i sistemi vicini alla soglia e qualitativamente quelli molto lontani da essa.

2.2 Un esempio di formazione di pattern: “Rayleigh-Bernard convection”

L'instabilità di *Rayleigh-Bernard* è forse il più famoso esempio di sistema che esibisca una formazione pattern.

In questo esperimento un piccolo spessore di fluido posizionato orizzontalmente si trova in un gradiente di temperatura verticale ΔT .

In questo sistema esiste un effetto destabilizzante che consiste nella tendenza del liquido più caldo a salire.

Tale effetto è in competizione con la viscosità del fluido. Per questo motivo per piccoli gradienti termici il fluido è essenzialmente in equilibrio e l'unico fenomeno che si verifica è la conduzione termica da parte del liquido.

Possiamo quindi affermare che, in questa condizione, lo stato uniforme è stabile, in quanto piccole perturbazioni applicate ad esso, dopo un tempo sufficientemente lungo, vengono riassorbite dal sistema.

Se però il gradiente termico eccede un certo valore critico ΔT_c la viscosità non può più bilanciare la convezione e si crea un regime dinamico che genera i cosiddetti “*convection rolls*” come mostrato in figura (2.1).

Questo comportamento può essere descritto tramite la teoria delle biforcazioni, infatti al variare di un parametro di controllo abbiamo la perdita di stabilità dello stato uniforme.

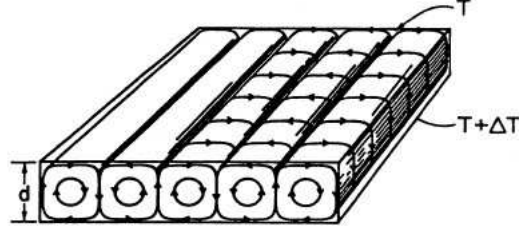


Figura 2.1: Figura che illustra schematicamente i “rolls” nella *Rayleigh-Bernard convection* [3]

Naturalmente il parametro che controlla la convezione di un fluido dipende in generale da numerosi altri fattori (ad es. la sua densità e la sua viscosità). In generale si usa definire come vero parametro di controllo del sistema il numero di Rayleigh $R = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\kappa \nu}$ dove g è l’accelerazione di gravità, α il coefficiente di espansione termica del fluido, d lo spessore verticale del “sample”, κ la diffusività termica e ν la viscosità cinematica.

Quando $R \sim 1708$ si ha la rottura dello stato uniforme; è uso riscrivere il parametro di controllo R nella seguente maniera $\epsilon = \frac{R - R_c}{R_c}$; in questo modo la biforcazione avviene per $\epsilon = 0$.

Proviamo adesso a modellare la RBC; il punto di partenza è un sistema dinamico alle derivate parziali che dipende dal parametro di controllo ϵ

$$\partial_t U = G(U, \partial_x, \partial_y, \epsilon) \quad (2.2)$$

in cui si suppone che $U = 0$ sia una soluzione per ogni valore del parametro di controllo (ricordiamo che U rappresenta in questo caso il campo di velocità del fluido) .

Uno studio basilare della stabilità può essere fatto perturbando nell’intorno della soluzione $U = 0$; classificheremo il sistema in base alle risposte del sistema linearizzato a perturbazioni della forma di una singola componente di Fourier, la cui evoluzione temporale sarà della forma

$$u(x, t) = u_o e^{ikx + \sigma t} \quad (2.3)$$

dove $\sigma \in \mathbb{C}$ e k rappresentano rispettivamente il tasso di crescita e il numero d'onda del modo.

I tassi di crescita per i vari modi possono essere calcolati trovando gli autovalori della linearizzazione di $G(U, \partial_x, \partial_y, \epsilon)$ nell'intorno di zero.

Per illustrare come funziona questo meccanismo cerchiamo di costruire un modello il più semplice possibile per la RBC.

Per fare questo richiediamo che il tasso di crescita di un modo sia quadratico nell'intorno di un certo vettore d'onda k_c e che per $\epsilon < 0$ lo stato uniforme sia stabile.

Se adesso aggiungiamo anche l'ipotesi che il sistema sia invariante per riflessione $x \rightarrow -x$, abbiamo fissato la parte lineare della nostra equazione che è della forma ¹

$$\partial_t u = \epsilon u - D(\partial_x^2 + k_c^2)^2 u \quad (2.4)$$

usando l'ansatz (2.3) nell'equazione (2.4) si trova il tasso di crescita cercato come mostrato in figura (2.2).

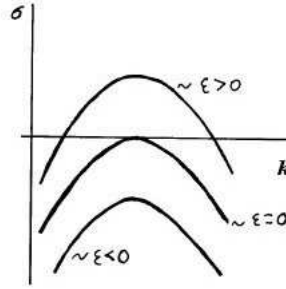


Figura 2.2: Tasso di crescita in funzione di ϵ per un sistema tipo RBC [3]

Chiaramente lo stato omogeneo è stabile se non esistono k per cui il tasso di crescita σ è positivo e questo è sempre vero per $\epsilon < 0$; per $\epsilon = 0$ c'è solo un valore k_c per cui il tasso di crescita è nullo.

¹Con questo procedimento abbiamo ritrovato la parte lineare dell'equazione Swift-Hohenberg.

Per $\epsilon > 0$ esiste una banda continua di vettori d'onda $k_- \leq k \leq k_+$ con tasso di crescita positivo.

Questo tipo di analisi può essere generalizzato ad altre situazioni; le instabilità possono essere suddivise in due tipi : stazionarie $Im\sigma(k_c) = 0$ e oscillatorie $Im\sigma(k_c) = \omega_c \neq 0$ per $\epsilon = 0$.

Noi adopereremo nel testo la seguente nomenclatura

- Tipo I_s periodica stazionaria ($\omega_c = 0, k_c \neq 0$)
- Tipo I_0 oscillatoria periodica ($\omega_c \neq 0, k_c \neq 0$)
- Tipo III_0 oscillatoria uniforme ($\omega_c \neq 0, k_c = 0$)

Il caso $\omega_c = 0, k_c = 0$ non riguarda la formazione di pattern quindi non è stato preso in considerazione.

2.3 Espansione debolmente non lineare

Vicino alla soglia di instabilità ($|\epsilon| \ll 1$) le equazioni possono essere studiate con la cosiddetta “*espansione debolmente non lineare*”.

Prendiamo un'equazione

$$L \equiv \epsilon u - \Gamma(u) \tag{2.5}$$

dove $\Gamma(u)$ è un termine non lineare²; per fissare le idee possiamo pensare alla RBC limitata a instabilità di tipo “rolls” con un certo numero d'onda k_c .

L'idea di questa metodo è quella di sviluppare la soluzione dell'equazione del moto L in termini del parametro di controllo ϵ , scrivendo il termine dominante di questa espansione come prodotto di un termine lentamente variabile (ampiezza) e di un pattern basilare.

Il nostro obbiettivo sarà quindi quello di derivare un'equazione del moto per l'ampiezza lentamente variabile (equazione di ampiezza).

²Per semplicità studieremo un pattern di tipo I_s analoghe considerazioni si possono fare per gli altri tipi di pattern.

Partiamo analizzando il tasso di crescita lineare σ mostrato in figura (2.2)

$$\sigma(\epsilon, k) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \epsilon + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2} \right)_{k=k_c} (k - k_c)^2 + .. \quad (2.6)$$

da questa formula si nota che i soli modi con un tasso di crescita positivo risiedono in un intorno di k_c di larghezza $\approx \sqrt{\epsilon}$, sono proprio questi modi che giocano un ruolo importante nel comportamento del sistema per tempi molto lunghi.

Da un'analisi dimensionale si ricava che, se le modulazioni del vettore d'onda sono dell'ordine $\epsilon^{\frac{1}{2}}$, le lunghezze sono tipicamente dell'ordine di $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$.

Analogamente i tempi, dato che il tasso di crescita aumenta linearmente con ϵ , hanno una grandezza tipica di ϵ^{-1} .

Da cui abbiamo che le scale “lente” sono per costruzione

$$X = \epsilon^{\frac{1}{2}} x$$

$$T = \epsilon t$$

Per comprendere questo meccanismo vediamo un'applicazione della “espansione debolmente non lineare” all'equazione di “*Swift-Hohenberg*” unidimensionale ³

$$\partial_t u = \epsilon u - (\partial_x^2 + k_c^2)^2 u - u^3 = \epsilon u - \mathcal{L}u - u^3 \quad (2.7)$$

separiamo le scale imponendo

$$\partial_x \longrightarrow \partial_x + \epsilon^{\frac{1}{2}} \partial_X \quad (2.8)$$

$$\partial_t \longrightarrow \epsilon \partial_T \quad (2.9)$$

dove x è la scala del pattern portante, mentre X e T sono le scale spaziali e temporali dell'equazione di ampiezza.

Sviluppiamo la funzione u in serie di $\epsilon^{1/2}$

$$u = \epsilon^{\frac{1}{2}} u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^{\frac{3}{2}} u_2 + .. \quad (2.10)$$

³Per una introduzione sull'equazione di Swift-Hohenberg si veda [3]

e inseriamo tutto nell'equazione (2.7) e cerchiamo i termini che sopravvivono a ogni ordine di ϵ .

Se ora inseriamo nell'equazione (2.7) la (6.5) e la (6.6) per l'operatore \mathcal{L} abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_x^2 + k_c^2)^2 \rightarrow (k_c^2 + \partial_x^2 + 2\epsilon^{\frac{1}{2}}\partial_x\partial_X + \epsilon\partial_X^2)^2 \\ &= L^2 + 4\epsilon^{\frac{1}{2}}L\partial_x\partial_X + \epsilon(2L + 4\partial_x^2)\partial_X^2 + O(\epsilon^{3/2})\end{aligned}$$

dove abbiamo definito per convenienza $L = k_c^2 + \partial_x^2$.

Inseriamo adesso lo sviluppo in ϵ nell'equazione (2.10), abbiamo che

$$\left\{ L^2 + 4\epsilon^{\frac{1}{2}}L\partial_x\partial_X + \epsilon(\partial_T - 1 + (2L + 4\partial_x^2)\partial_X^2) + O(\epsilon^{3/2}) \right\} \times$$

$$\left\{ \epsilon^{1/2}u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^{3/2}u_2 + O(\epsilon^2) \right\} + \epsilon^{3/2}u_0^3 + O(\epsilon^2) = 0$$

Se adesso raggruppiamo i termini ordine all'ordine $\epsilon^{1/2}$ abbiamo

$$(\partial_x^2 + k_c^2)^2 u_0$$

la cui soluzione è

$$u_0 = e^{ik_c x} A_0(X, T) + e^{-ik_c x} A_0^*(X, T)$$

in cui compare per la prima volta l'ampiezza $A_0(X, T)$ che a questo livello è completamente arbitraria.

All'ordine ϵ abbiamo

$$4(\partial_x^2 + k_c^2)\partial_x\partial_X u_0 + (\partial_x^2 + k_c^2)^2 u_1 = 0$$

il primo termine è nullo visto che $L u_0 = 0$ quindi lo sviluppo a quest'ordine non ci dà nessuna informazione in più sulla forma di $A_0(X, T)$.

All'ordine $\epsilon^{3/2}$

$$Lu_2 + 4L\partial_x\partial_X u_1 + (\partial_T - 1 + 2L\partial_x^2 + 4\partial_x^2\partial_X^2 + u_0^2)u_0 = 0$$

da cui, eliminando i termini nulli, si ha

$$L^2u_2 + [e^{ik_c x}(\partial_T - 1 - 4k_c^2\partial_x^2 + 3|A_0|^2)A_0 + c.c.] + e^{3ik_c x}A_0^3 + c.c. = 0$$

per rispettare l'equazione è necessario che il termine proporzionale a $e^{ik_c x}$ sia nullo dato che L^2u_2 non contiene nessuna dipendenza da $e^{ik_c x}$

Il risultato è

$$\partial_TA = A + 4k_c^2\partial_X^2 A - 3|A|^2 A$$

da cui riscalandolo tutte le variabili, abbiamo la cosiddetta equazione di ampiezza per un sistema unidimensionale

$$\tau_0\partial_TA = \epsilon A + \xi_0^2\partial_X^2 A - g|A|^2 A$$

In linea di principio abbiamo visto come sia possibile ricavare l'equazione di ampiezza per un'equazione molto semplice come la Swift-Hohenberg, in generale tale procedimento è molto difficile, se non addirittura impossibile, per equazioni più complicate. Nella formazione di pattern è uso assumere l'equazione di ampiezza come valida a priori e vedere quali risultati si possono trarre da questo approccio.

Noi assumeremo questa equazione cercando di darne una giustificazione di tipo euristico.

E' importante notare che nel corso di questa trattazione ci riferiremo principalmente a sistemi bidimensionali, tuttavia alcuni risultati, con le dovute cautele, sono validi anche per le equazioni unidimensionali.

2.4 Equazione di ampiezza per instabilità I_s

Analizziamo in dettaglio la forma dell'equazione di ampiezza per un'instabilità di tipo I_s con vettore d'onda k_c che avviene in un sistema spazialmente isotropo.

Analogamente a quanto visto in precedenza la soluzione è

$$U = U_0 A(x, y, t) e^{ik_c x} + c.c. + O(\epsilon) \quad (2.11)$$

in cui U_0 è una costante di proporzionalità.

In questa equazione abbiamo tacitamente assunto che il pattern sia bidimensionale e consistente di “rolls” unidimensionali perpendicolari alla direzione x .

La terza dimensione è inclusa in k_c ⁴ e $A(x, y, t) \in \mathbb{C}$ è un campo che obbedisce all'equazione di Landau-Ginzburg reale (RGL).

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A + \xi_0^2 [\partial_x - (i/2k_c) \partial_y^2]^2 A - g_0 |A|^2 A \quad (2.12)$$

Questa equazione può descrivere molti fenomeni; tuttavia derivarla dai dettagli microscopici di un preciso sistema può essere molto difficile.

Quello che deve essere enfatizzato è che la forma dell'equazione è generale e il dettaglio di un singolo sistema si manifesta solo nei valori dei suoi coefficienti.

2.4.1 Introduzione euristica dell'equazione di ampiezza per sistemi isotropi

E' possibile introdurre l'equazione di ampiezza per instabilità di tipo I_s in maniera euristica.

Cominciamo col provare a descrivere un sistema *spazialmente isotropo*: scriviamo la più semplice equazione lineare che dia origine a un tasso di crescita che rispecchi l'isotropia spaziale del sistema; scegliamo quindi un tasso di crescita che non favorisca la nascita dei modi in nessuna direzione in particolare

⁴In genere il numero d'onda critico è fissato dalla terza dimensione, che non appare esplicitamente in questa equazione e quindi possiamo affermare che solo k_c è reminiscente della struttura tridimensionale del sistema reale.

$$\sigma(q) = \tau_0^{-1} \left(\epsilon - \xi_0^2 \left(|q| - \left| \vec{k}_c \right| \right)^2 \right) \quad (2.13)$$

con $q = \left| \vec{k}_c \right| \hat{x} + \vec{k}$ e $\vec{k} = (k_x, k_y)$.

Espandendo $\left| \left| \vec{k}_c \right| \hat{x} + k \right| - \left| \vec{k}_c \right|$ per piccoli k abbiamo che

$$\sigma(q) \simeq \tau_0^{-1} \left(\epsilon - \xi_0^2 \left(k_x + \frac{k_y^2}{2k_c} \right)^2 \right) \quad (2.14)$$

se ora sostituiamo

$$\sigma \rightarrow \partial_t \quad (2.15)$$

$$k_x \rightarrow -i\partial_x \quad (2.16)$$

$$k_y \rightarrow -i\partial_y \quad (2.17)$$

riotteniamo la parte lineare dell'equazione (2.12) ⁵.

Per saturare la crescita esponenziale dei modi è necessario introdurre un termine correttivo non lineare.

Questo termine può essere ottenuto cercando un oggetto di forma semplice che preservi l'equazione sotto la trasformazione $A \rightarrow e^{i\phi} A$ che corrisponde a richiedere l'invarianza sotto traslazione del pattern.

2.4.2 Introduzione euristica all'equazione di ampiezza per sistemi anisotropi

Possiamo riprodurre il ragionamento del paragrafo precedente per un *sistema anisotropo*; la forma del tasso di crescita sarà, scegliendo, nel modo più semplice, un tasso di crescita che favorisca la crescita dei modi nella direzione del vettore d'onda critico

$$\sigma(q) = \tau_0^{-1} \left(\epsilon - \xi_0^2 (|q - k_c|)^2 \right)$$

da cui

$$\sigma(q) = \tau_0^{-1} \left(\epsilon - \xi_0^2 (k_x^2 + k_y^2) \right)$$

⁵Osservando che i modi sono della forma (2.3) questa sostituzione è naturale

e con le sostituzioni (2.15) (2.16) (2.17) e con considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente abbiamo che

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A + (\xi_x^2 \partial_x^2 + \xi_y^2 \partial_y^2) A - g_0 |A|^2 A \quad (2.18)$$

2.4.3 Interpretazione fisica dei parametri delle equazioni di ampiezza

I parametri che compaiono nell'equazione (2.12) e nella (2.18) sono, in linea di principio, ricavabili dalle equazioni fondamentali del fenomeno. Tuttavia tale calcolo è stato portato a termine soltanto per un numero molto limitato di sistemi ed è assai complicato.

In generale è molto più facile e istruttivo provare a dare una spiegazione “fisica” di tali coefficienti.

Il nostro parametro di controllo principale è ϵ che determina la transizione di fase tra lo stato uniforme e lo stato con pattern; nel caso ad esempio della EHC è correlato direttamente al potenziale V applicato al campione di cristallo liquido e alla soglia di formazione dei pattern V_c , $\epsilon = \frac{V^2 - V_c^2}{V_c^2}$ (vedi cap 5) .

Il parametro τ_0 può essere correlato ai *tempi di reazione* del sistema a una variazione improvvisa di ϵ ; se partiamo da una situazione in cui lo stato iniziale è quello omogeneo e $\epsilon < 0$ e repentinamente aumentiamo il valore in modo che $0 < \epsilon \ll 1$ il sistema comincerà a formare un'onda piana della forma $A(x, y, t) = a(t)e^{ikx}$, sostituendo la soluzione nell'equazione reale di Landau-Ginzburg abbiamo che

$$\tau_0 \frac{\partial a}{\partial t} = \epsilon a - \xi^2 k^2 a - g_0 a^3$$

se adesso supponiamo che $k \simeq 0$ e che il contributo del termine cubico possa essere trascurato nei primi istanti dell'evoluzione abbiamo che $a \propto \exp(\frac{\epsilon t}{\tau_0})$ da cui possiamo misurare τ_0 eseguendo un fit del $|A|$ in funzione del tempo.

Per misurare le “lunghezze di correlazione” ξ_x, ξ_y, ξ_0 possiamo sfruttare lo studio di strutture chiamate difetti (vedi cap 3) utilizzando la forma analitica

nota per un difetto 1D che può approssimare bene anche il profilo di una soluzione 2D

$$A(x, y = 0) = A_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{x}{\xi_x}\right) \quad (2.19)$$

e

$$A(x = 0, y) = A_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{y}{\xi_y}\right) \quad (2.20)$$

in cui l'origine degli assi è al centro del difetto. Dalla misura delle “dimensioni” del difetto è possibile risalire alle lunghezze di correlazione. Le lunghezze di correlazione sono molto importanti in particolare nei sistemi anisotropi come i cristalli liquidi.

Per quanto riguarda il parametro g_0 possiamo operare il cosiddetto “quenching” di ϵ : ossia operare cambiamenti continuamente alternati del parametro di controllo tra due valori $\epsilon_1 \sim 0$ e $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$; così facendo ci aspettiamo che il numero d'onda del modo che si viene a creare sia $k \sim 0$ e in tal caso la nostra equazione si riduce a

$$\tau_0 \frac{\partial a}{\partial t} = \epsilon - g_0 a^3$$

in questo modo una volta ricavato τ_0 possiamo ottenere il valore di g_0 .

2.4.4 L'equazione reale di Landau-Ginzburg (RGL)

L'equazione (2.12) prende anche il nome di equazione di Landau-Ginzburg reale (RGL) ed è “l'amplitude equation” di un sistema spazialmente isotropo soggetto a una instabilità di tipo I_s .

Tale equazione presenta una biforcazione di Hopf supercritica per $g_0 > 0$ dello stato uniforme al variare del parametro ϵ .

E' possibile riscrivere l'equazione (2.12) e metterla in forma “normale” ponendo

$$X = |\epsilon|^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\xi_0}$$

$$Y = |\epsilon|^{\frac{1}{4}} y \left(\frac{k_c}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T = |\epsilon| \frac{t}{\tau_0}$$

$$\overline{A} = \left(\left| \frac{g_0}{\epsilon} \right|^{\frac{1}{2}} \right) A$$

In questo modo l'equazione diventa

$$\partial_t \overline{A} = \pm \overline{A} + [\partial_x - (i/2) \partial_y^2]^2 \overline{A} - |\overline{A}|^2 \overline{A} \quad (2.21)$$

dove il segno $+$ corrisponde a $\epsilon > 0$ mentre il segno $-$ a $\epsilon < 0$

Un risultato che, a prima vista, può sembrare paradossale è che, per sistemi anisotropi, l'equazione di Landau-Ginzburg prende la forma

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A + (\xi_x^2 \partial_x^2 + \xi_y^2 \partial_y^2) A - g_0 |A|^2 A \quad (2.22)$$

e può essere riscalata

$$\partial_T \overline{A} = \pm \overline{A} + (\partial_X^2 + \partial_Y^2) \overline{A} - |\overline{A}|^2 \overline{A} \quad (2.23)$$

ponendo

$$X = |\epsilon|^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\xi_x}$$

$$Y = |\epsilon|^{\frac{1}{2}} \frac{y}{\xi_y}$$

$$T = |\epsilon| \frac{t}{\tau_0}$$

$$\overline{A} = \left(\left| \frac{g_0}{\epsilon} \right|^{\frac{1}{2}} \right) A$$

Quindi un sistema anisotropo è rappresentato da una RGL *isotropa e viceversa*.

Sistemi che sono rappresentati da un'equazione di Landau-Ginzburg isotropa sono l'EHC o la RBC eseguita su un "layer" inclinato di liquido.

2.4.5 Soluzioni di onda per RGL

E' facile verificare che la RGL ammette soluzioni $A_k(x) = a_k e^{ikx}$ con $a_k = (\epsilon - k^2)^{\frac{1}{2}}$.

Se ora vogliamo indagare la stabilità di queste soluzioni dobbiamo vedere l'effetto di una piccola perturbazione su un sistema in uno stato $A_k(x)$ analogamente a quanto visto nel cap 1.

Sviluppiamo quindi

$$A(x, t) = A_k(x) + \delta A(x, t)$$

dove

$$\delta A = e^{ikx} [\delta a_+ e^{iQx} + \delta a_-^* e^{-iQx}] \quad (2.24)$$

inserendo tutto nella RGL e linearizzando rispetto a δa_+ e δa_- otteniamo

$$\partial_t \delta a_+ = -(p^2 + U_+) \delta a_+ - p^2 \delta a_- \quad (2.25)$$

$$\partial_t \delta a_- = -(p^2 + U_-) \delta a_- - p^2 \delta a_+$$

con $p^2 = \epsilon - k^2$ e $U_{\pm} = \left[(k \pm Q_x)^2 + \frac{Q_y^2}{2k_c} \right] - k^2$

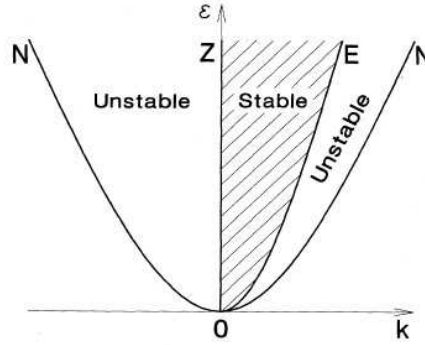


Figura 2.3: Diagramma delle instabilità: E “Eckhaus”, N “neutral”, Z “zigzag” [3]

Gli autovalori del sistema (2.25) sono

$$\sigma_k(Q) = -p^2 - \frac{1}{2}(U_+ + U_-) \pm \left[p^4 + \frac{1}{4}(U_+ - U_-)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

la condizione di stabilità è

$$\sigma_k(Q) < 0$$

e deve essere vera per tutto un intorno di $|Q| = 0$, la zona di stabilità limite si ottiene imponendo $\sigma_k(Q) = 0$ e dai calcoli abbiamo che $k_N^2 = \epsilon$; se adesso cerchiamo una zona di stabilità limite per perturbazioni lungo l'asse x , $Q = Q\hat{x}$, troviamo la cosiddetta instabilità di “*Eckhaus*” e la curva che la delimita è $k_E^2 = \frac{\epsilon}{3}$.

Se cerchiamo invece una zona di stabilità per perturbazioni lungo l'asse y , $Q = Q\hat{y}$, troviamo la cosiddetta instabilità “*zig zag*”, visualizzata in figura (2.4), dai calcoli abbiamo che la zona limite è $k_z = 0$ come mostrato in figura (2.3).

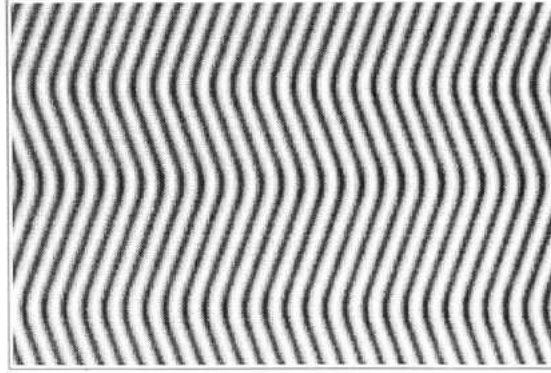


Figura 2.4: Foto di un'instabilità di tipo “zig-zag” [3]

2.5 Instabilità III_0

La stessa espansione vicino alla soglia che abbiamo fatto per le instabilità I_s possiamo farla, con le dovute differenze, per un'instabilità di tipo III_0

$$U(x, y, t) = [U_0 A(x, y, t) e^{-i\omega t} + c.c.] + O(\epsilon) \quad (2.26)$$

dove ω è la frequenza di oscillazione del pattern e l'equazione di ampiezza è, dopo aver applicato gli stessi “*scaling*” dell'equazione RGL,

$$\partial_t A = \pm A + (1 + ib) \triangle A - (1 + ic) |A|^2 A \quad (2.27)$$

con $A \in \mathbb{C}$ e con U_0 costante di proporzionalità.

Questa equazione prende anche il nome di equazione complessa di Landau-Ginzburg (CGL) e manifesta anch'essa una biforcazione di Hopf al variare del parametro di controllo principale ϵ .

I due parametri b, c dell'equazione controllano il regime dell'equazione e danno origine a comportamenti molto più complicati rispetto a quelli esibiti dall'equazione RGL; questo si può notare anche dal fatto che non è possibile riscalarla via tutti i parametri (2.27).

La forma più generale dell'equazione (2.27) possiede un termine proporzionale a $s_0 \partial_x$, tuttavia noi lavoreremo in un sistema con condizioni al contorno periodiche in cui tale termine può essere riscalato passando nel sistema di riferimento che si muove con la velocità di gruppo lineare s_0

$$\tilde{x} \rightarrow x - s_0 t$$

nel caso in cui il sistema in esame sia di dimensioni finite il termine proporzionale a s_0 gioca un ruolo importante, ma in questa tesi ci occuperemo solo di sistemi "periodici".

L'interpretazione fisica dei due coefficienti che compaiono nella CGL non è semplice come quelle viste precedentemente nella RGL.

Tuttavia i due parametri possono essere connessi alla frequenza delle onde (come vedremo in seguito) che si vengono a creare nel sistema.

In genere tuttavia queste misure sono molto difficili e non prive di insidie quindi in genere questi parametri vengono accordati in modo da riprodurre il regime sperimentale studiato.

Per uno schema dei regimi dinamici della CGL si veda (7.1).

Soluzioni d'onda per la CGL

L'equazione (2.27) ammette sia soluzioni del tipo $A(x, t) = a_0 e^{-i\Omega_0 t}$ con $a_0^2 = \epsilon$ e $\Omega_0 = c\epsilon$ che chiamate "onde viaggianti non lineari" che soluzioni del

tipo $A_k(x, t) = a_k e^{i(kx - \Omega_k t)}$ dove, $a_k = (\epsilon - k^2)$ e $\Omega_k = c\epsilon + (c - b)k^2$, che chiameremo onde rotanti.

L'equazione (2.27) ammette come soluzione anche onde stazionarie tuttavia queste sono instabili e decadono in onde viaggianti ⁶.

Il calcolo della stabilità delle onde piane è analogo a quello fatto per la RGL anche se algebricamente molto più involuto; questo risultato è anche chiamato criterio di *Eckhaus generalizzato* ed afferma che esistono onde stabili con numero d'onda k a patto che

$$k^2 < \frac{1 + bc}{3 + bc + 2c^2}$$

da questa formula si nota che esistono onde stabili a patto che

$$1 + bc > 0$$

altrimenti sono tutte instabili (criterio di Benjamin-Feir-Newell); se le onde sono tutte instabili si ha un regime cosiddetto “*caotico*”.

2.6 Instabilità I_0

L'analogo dell'equazione (2.26) per instabilità del tipo I_0 [$\omega_0 \neq 0, q_0 \neq 0$] è

$$U(x, y, t) = U_0 [A_R(x, y, t)e^{i(k_c x - \omega_c t)} + A_L(x, y, t)e^{-i(k_c x + \omega_c t)}] + c.c. \quad (2.28)$$

e le equazioni di ampiezza sono due equazioni di Landau-Ginzburg accoppiate per le due ampiezze A_R e A_L che rappresentano rispettivamente le ampiezze di onde che viaggiano verso destra e verso sinistra.

⁶Vedremo nei prossimi capitoli che la versione bidimensionale di questa equazione ammette anche soluzioni di natura differente.

Per semplicità abbiamo scritto le equazioni nel caso $1D$

$$\partial_t A_R + s_0 \partial_x A_R = \epsilon A_R + (1 + ic_1) \partial_x^2 A_R - (1 - ic_3) |A_R|^2 A_R - g_1 (1 - ic_2) |A_L|^2 A_R \quad (2.29)$$

$$\partial_t A_L - s_0 \partial_x A_L = \epsilon A_L + (1 + ic_1) \partial_x^2 A_L - (1 - ic_3) |A_L|^2 A_L - g_1 (1 - ic_2) |A_R|^2 A_L \quad (2.30)$$

Dove s_0 è la velocità di gruppo, i parametri ϵ, c_1, c_3 sono analoghi a quelli definiti per la CGL, mentre g_1 è un parametro che tiene conto dell'accoppiamento tra i modi A_L e A_R .

Le equazioni nel caso $2D$ si ottengono sostituendo nelle equazioni (2.29) (2.30)

$$\begin{aligned} s_0 \partial_x &\rightarrow s_0 \left[\partial_x - \left(\frac{i}{2k_c} \right) \partial_y^2 + \left(\frac{1}{2k_c^2} \right) \partial_x \partial_y^2 - \left(\frac{i}{8k_c^3} \right) \partial_y^4 \right] \\ \partial_x^2 &\rightarrow \left(\partial_x - \left(\frac{i}{2k_c} \right) \partial_y^2 \right)^2 \end{aligned}$$

Per maggiori dettagli sulle equazioni accoppiate di Landau-Ginzburg si veda [16]

2.7 RGL vs CGL

Le differenze tra le equazioni RGL e CGL possono sembrare minime in realtà la CGL esprime una varietà di comportamenti molto numerosa a quelli della semplice RGL.

Per quanto riguarda la dinamica della RGL è possibile determinare una funzione tale che

$$\partial_t A = - \frac{\delta F \{A, A^*\}}{\delta A^*} \quad (2.31)$$

con

$$F = \int \int dx dy \left[-\epsilon |A|^2 + \frac{g_0}{2} |A|^4 + |\xi_0 (\partial_x - (i/2k_c) \partial_y^2) A|^2 \right] \quad (2.32)$$

e per tale funzione

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq 0$$

F prende il nome di funzione di *Lyapunov* e svolge un ruolo analogo a quello svolto dall'energia libera in termodinamica.

Il processo descritto dalla RGL sarà quindi un processo di rilassamento verso il minimo di F .

Per la CGL tuttavia non è possibile⁷, in generale, trovare una funzione di Lyapunov; la dinamica è quindi molto più complicata di un rilassamento ed è questo il motivo per cui la CGL presenta una varietà maggiore di comportamenti rispetto alla RGL.

2.8 Instabilità secondarie

Abbiamo visto che le soluzioni di tipo onda possono esse stesse diventare instabili; chiameremo le nuove soluzioni stabili “instabilità secondarie”.

Queste instabilità tendono a complicare molto i pattern e rappresentano parte della complessità riscontrata negli esperimenti reali.

Nell'equazione di ampiezza I_s come abbiamo visto esistono solo due tipi di instabilità secondarie: di “Eckhaus” e quella “zig-zag”. Questo mostra che l'equazione di ampiezza reale ha un “range” di validità limitato in quanto le altre instabilità che sono osservate sperimentalmente, sono trovate solo quando vengono inclusi nel calcolo ordini superiori dello sviluppo.

2.9 Competizioni tra i vari pattern

Quando abbiamo costruito la (2.11) abbiamo fatto l'ipotesi di studiare soluzioni che consistono in un singolo “set” di “rolls” paralleli.

In generale possiamo studiare soluzioni che sono sovrapposizione di n rolls di orientazione varia

$$U = U_0 \left[\sum_{i=1}^n A_i(x, y, t) e^{iq_i x} + c.c. \right] + O(\epsilon) \quad (2.33)$$

con $|q_i| = k_c$

⁷Se $c = b$ la CGL può essere scritta in un sistema “rotante”
 $\partial_t \tilde{A} = (1 + ic) \left(\epsilon \tilde{A} - |\tilde{A}|^2 \tilde{A} + \Delta \tilde{A} \right) = -(1 + ic) \frac{\delta F\{\tilde{A}, \tilde{A}^*\}}{\delta \tilde{A}^*}$ dove $\tilde{A} = e^{i\epsilon c t} A$

se trascuriamo le variazioni spaziali del pattern l'equazione di ampiezza corrispondente è

$$\partial_t A_i = \epsilon A_i - \sum_{j=1}^n g_{ij} |A_j|^2 A_i \quad (2.34)$$

dove $g_{ij} = \zeta(\theta_{ij})$ e $\hat{q}_i \hat{q}_j = \cos \theta_{ij}$.

L'equazione (2.34) può essere utile per studiare la competizione tra i “rolls” e gli altri pattern regolari. Per $n = 2$ avremo quadrati per $n = 3$ esagoni etc., le foto di alcuni pattern sono mostrati in figura (2.5).

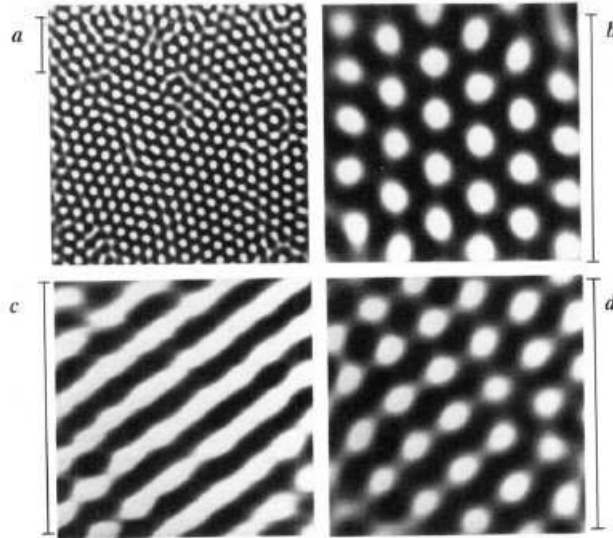


Figura 2.5: a)e b)Pattern esagonali c)Tipo “rolls” d)Pattern misto [3]

Capitolo 3

Equazione di fase e difetti topologici

3.1 Equazione di fase per la RGL

In questo capitolo esporremo la teoria dell'equazione di fase e la sua applicazione al caso dell'equazione di Landau-Ginzburg reale. Molti dei risultati esposti sono basati sull'esistenza della funzione di Lyapunov, quindi non sono, in generale, estendibili alla CGL che, come abbiamo visto prima, non ammette una funzione di tipo “potenziale”.

Per quanto riguarda la dinamica delle strutture nella CGL cercheremo di esporre qualche risultato nel cap 4., anche se dobbiamo sottolineare che le sue dinamiche sono molto complesse.

3.2 Equazione di fase per sistemi isotropi

La RGL anisotropa (2.12) descrive la dinamica di un pattern I_s attraverso il campo complesso A .

Tale dinamica può essere scomposta nella dinamica del modulo del campo $|A|$ e della sua fase ϕ .

Consideriamo una piccola perturbazione alla soluzione di onda piana $A_k(x)$ del tipo

$$A(x) = (a_k + \delta a) e^{i(kx + \delta\phi)}$$

Da un'ispezione dell'equazione di Landau-Ginzburg vediamo che una variazione dell'ampiezza δa si rilassa in un tempo dell'ordine ε^{-1} che vicino alla soglia dell'instabilità è un tempo molto lungo ma finito.

Per quanto riguarda invece $\delta\phi$, abbiamo che una perturbazione uniforme non si rilassa affatto e si traduce in una traslazione di tutti i “rolls” nella direzione x .

Una piccola perturbazione della forma $\delta\phi = \delta\phi_0 \cos(Qx)$ con $Q \rightarrow 0$ si rilassa su tempi dell'ordine di Q^{-2} .

Per perturbazioni di lunghezza d'onda $Q \ll \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ possiamo assumere che, dopo un transiente iniziale, l'ampiezza segua adiabaticamente ogni cambiamento della fase.

Possiamo implementare questa ipotesi sostituendo la soluzione perturbata nell'equazione di Landau-Ginzburg.

Dalla parte reale dell'equazione otteniamo, trascurando le derivate spaziali di δa , in cui i simboli sono quelli utilizzati nel capitolo 2.

$$a_k \delta a = -k \partial_x \delta\phi \quad (3.1)$$

mentre dalla parte immaginaria delle equazioni abbiamo

$$\partial_t \phi = \partial_x^2 \phi + \frac{k}{k_c} \partial_y^2 \phi + 2 \frac{k}{a_k} \partial_x (\delta a) \quad (3.2)$$

inserendo l'equazione (3.1) nella (3.2) abbiamo

$$\partial_t \phi = D_{\parallel}(k) \partial_x^2 \phi + D_{\perp}(k) \partial_y^2 \phi$$

in cui

$$D_{\parallel} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[\frac{\epsilon - 3\xi_0^2 k^2}{\epsilon - \xi_0^2 k^2} \right]$$

$$D_{\perp}(k) = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \frac{k}{k_c}$$

questa formula prende il nome di equazione di fase.

3.3 Equazione di fase per sistemi anisotropi

Con considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente è possibile ricavare un'equazione di fase anche per i sistemi anisotropi, come mostrato in [29]

$$\partial_t \phi = D_x(k) \partial_x^2 \phi + \frac{\xi_y^2}{\tau_0} \partial_y^2 \phi \quad (3.3)$$

dove

$$D_x(k) = \frac{\xi_x^2}{\tau_0} \left[\frac{\epsilon - 3\xi_x^2 k^2}{\epsilon - \xi_x^2 k^2} \right]$$

tipicamente si considerano situazioni in cui $3k^2 \ll \epsilon$ e in tal caso l'equazione (3.3) diventa

$$\tau_0 \partial_t \phi = \xi_x^2 \partial_x^2 \phi + \xi_y^2 \partial_y^2 \phi$$

da cui riscalandolo come mostrato nei paragrafi precedenti abbiamo

$$\partial_T \phi = \partial_X^2 \phi + \partial_Y^2 \phi$$

Nel ricavare le equazioni di fase abbiamo fatto l'ipotesi che le variazioni dell'ampiezza seguano adiabaticamente quelle della fase; questa ipotesi è più generale della stessa equazione di RGL; tale assunzione infatti vale anche nel caso in cui non si verifichi $|\epsilon| \ll 1$.

Naturalmente, visto che la RGL non è più valida, i coefficienti dell'equazione (3.3) non saranno quelli trovati precedentemente.

3.4 Difetti topologici

I difetti topologici sono regioni in cui il campo di fase subisce una discontinuità e sono associati a una rottura spontanea di una simmetria continua.

Chiameremo “*dislocazione*” un difetto che rompe la simmetria traslazionale del sistema, mentre “*disclinazione*” un difetto che ne rompe la simmetria rotazionale .

Tali strutture prenderanno il nome di *difetti topologici*; chiameremo carica associata a un difetto topologico

$$n = \frac{\int_C \nabla \phi \cdot dl}{2\pi} \quad (3.4)$$

in cui C è una qualsiasi curva che racchiude il difetto.

In un sistema come l'EHC il difetto è tipicamente una dislocazione¹ e si può identificare con una cella in cui terminano due o più rolls come mostrato in figura (3.1) .

Il numero di rolls che terminano nello stesso punto determina la carica topologica del difetto: nel caso due terminino nello stesso punto si avrà un difetto di *carica topologica* uno, nel caso ne terminino tre carica due, e così via.

La carica topologica di un difetto possiede anche un segno e questo dipende da quello della circuitazione (3.4); per convenzione definiremo un difetto di carica positiva un difetto che “somiglia” a una Y capovolta come mostrato in figura (3.1).

Se andiamo ad analizzare un sistema in cui si è formato un pattern stazionario costituito da dei rolls e da un difetto topologico possiamo fare le seguenti considerazioni: la differenza di fase del campo $A(x, y)e^{ik_c x}$, preso tra due punti qualsiasi, diviso 2π è uguale al numero di coppie di “rolls” contenute tra questi due punti.

Quindi quando due “rolls” si uniscono, il loro numero totale diminuisce di una unità e quindi la fase deve necessariamente subire una discontinuità nell'intorno di quel punto, ma poiché la fase di A è una funzione ben definita per ogni valore di A diverso da zero è necessario che nel punto in cui si trova il difetto sia verificato $|A| = 0$.

Quindi i difetti sono zone in cui il modulo del campo converge repentinamente a zero e sono punti topologicamente non banali².

¹Nella EHC il sistema non è invariante sotto rotazioni

²I difetti dell'equazione di Landau-Ginzburg reale prendono anche il nome di “vortici” noi useremo questa terminologia per distinguere i difetti della RGL da quelli della CGL che prendono la forma di “spirali”.

3.5 “Climbing” e “gliding” in sistemi anisotropi

Un difetto può compiere due tipi diversi di movimento:

- “Climbing” o Arrampicata: movimento lungo la direzione dei “rolls”
- “Gliding” o Veleggio: movimento ortogonale alla direzione dei “rolls”

La velocità di “climbing” è legata strettamente al numero d’onda di background, cioè il numero d’onda del pattern sufficientemente lontano dal nucleo del difetto.

Nello specifico se scriviamo $\phi = \bar{\phi} + qx$, le equazioni diventano, supponendo che il difetto si muova lungo l’asse y con velocità v

$$v \cdot \partial_y \bar{\phi} - D_{\parallel}(q) \partial_x^2 \bar{\phi} - D_{\perp}(q) \partial_y^2 \bar{\phi} = 2\pi D_{\parallel}(q) \partial_x \delta(x - x_d) \Theta(y - y_d) \quad (3.5)$$

dove x_d e y_d sono le coordinate del difetto e $\bar{\phi}$ è il campo del difetto e q è il numero d’onda lontano dal suo nucleo .

Il termine a destra dell’equazione tiene conto del salto di fase di 2π che avviene per $x = x_d$ e $y > y_d$ ³.

Supponiamo che $D_{\parallel}(q)$ e $D_{\perp}(q)$ siano entrambe diverse da zero, allora possiamo riscrivere l’equazione

$$X = \frac{x}{D_{\parallel}^{\frac{1}{2}}}$$

$$Y = \frac{y}{D_{\perp}^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{v}{D_{\perp}^{\frac{1}{2}}}$$

$$R = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

³Considerazioni analoghe si possono fare per moti lungo l’asse x

l'equazione (3.5) per $VR \ll 1$ ha come soluzione

$$\bar{\phi} = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (3.6)$$

l'equazione può essere risolta anche per $VR \gg 1$ e il risultato è più semplice da esprimere in funzione del suo gradiente

$$\partial_Y \bar{\phi} = \left[(V\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{X}{2R^{\frac{3}{2}}} \right] e^{-V\frac{(Y+R)}{2}} \quad (3.7)$$

Questa equazione mostra una legge di decadimento esponenziale davanti al difetto ($Y > 0$) e una legge di decadimento a potenza dietro di esso ($Y < 0$). Questo risulterà molto importante nello studio delle interazioni dei difetti; per ora limitiamoci ad accennare che due difetti di carica opposta si attraggono mentre due con carica concorde si respingono⁴.

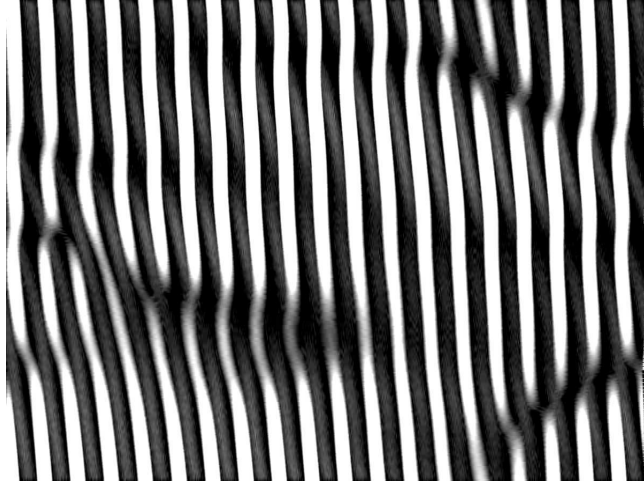


Figura 3.1: Immagine di alcuni *difetti* in una struttura periodica

3.6 Dinamica dei difetti

Il movimento dei difetti in una struttura regolare può avere varie cause: l'interazione con altri difetti, l'influenza delle condizioni al contorno, o la variazione del parametro di controllo.

⁴Per maggiori dettagli sull'interazione tra difetti si veda [3].

Analizzare i sistemi con molti difetti è complicato analiticamente, quindi affronteremo il problema del moto di un singolo difetto o di due o più difetti che interagiscono debolmente.

Da adesso in poi ci occuperemo esclusivamente di sistemi anisotropi come la EHC.

Abbiamo già visto che la RGL ammette una funzione di Lyapunov e per un sistema anisotropo tale funzione prende la seguente forma (usando i simboli del capitolo 2)

$$F = \int \int dx dy \left[-\epsilon |A|^2 + \frac{g_0}{2} |A|^4 + |\xi_x \partial_x A|^2 + |\xi_y \partial_y A|^2 \right] \quad (3.8)$$

per una funzione di Lyapunov ricordiamo che vale

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\delta F \{A, A^*\}}{\delta A^*}$$

per ottenere l'equazione del moto si eguaglia l'espressione

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \vec{v} \cdot \frac{dF(A_d)}{d\vec{x}_d}$$

dove A_d è il campo A del difetto e x_d la sua posizione, con l'espressione

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2\tau_0 \int |\partial_t A|^2 dx = -2\tau_0 \int |\vec{v} \cdot \nabla A|^2 dx$$

da cui si ottiene

$$v = \frac{-\frac{dF(A_d)}{d\vec{x}_d} \hat{e}}{2\tau_0 \int |\hat{e} \cdot \nabla A|^2 dx} \quad (3.9)$$

in cui \hat{e} rappresenta il versore della velocità del difetto.

Il denominatore della (3.9) è molto difficile da studiare analiticamente, tuttavia può essere calcolato sperimentalmente in laboratorio.

3.6.1 “Climbing” e “gliding” nell'equazione isotropa

Nel caso di “climbing”, ossia movimento di un difetto in una direzione parallela ai “rolls” (asse y), l'espressione (3.9) diventa:

$$v = \frac{-\frac{dF(A_d)}{dy_d} \hat{e}}{2\tau_0 \int |\partial_y A|^2 dx}$$

Per sistemi anisotropi si può dimostrare che la divergenza del denominatore è logaritmica e può essere corretta utilizzando l'equazione di Landau-Ginzburg completa; in questo modo otteniamo la seguente formula

$$v_y \log\left(\frac{v_y}{v_0}\right) \propto 2k \quad (3.10)$$

dove v_o è chiamata velocità di soglia e $k = k_c - q$ è la differenza tra il numero d'onda del pattern ideale e quello reale.

A causa dell'isotropia dell'equazione di Landau-Ginzburg per sistemi anisotropi il risultato (3.10) è valido per il “*climbing*”, per il “*gliding*” e per ogni altro stato di moto intermedio.

Possiamo quindi generalizzare l'equazione (3.10) ⁵

$$\frac{1}{2} \vec{v} \log\left(\frac{|\vec{v}|}{v_0}\right) = \tau \wedge \nabla \tilde{\phi} \quad (3.11)$$

dove τ è un vettore diretto lungo z di modulo pari alla carica del difetto n e il campo $\tilde{\phi}$ è il campo di fase a cui è stato sottratto il contributo del difetto come mostrato in [30] la velocità di soglia $v_0 = 3.29$ è stata ottenuta numericamente.

Quindi abbiamo costruito una teoria in cui un difetto è un oggetto simile a una particella che si muove in un campo costituito dal gradiente della fase.

La (3.11) può essere utilizzata per studiare le interazioni tra difetti in tal caso nel membro destro dell'equazione compare il gradiente del campo degli altri difetti.

Dalla forma dell'interazione (3.7) si può notare che due difetti che si muovono in senso opposto sentono un'interazione radiale del tipo $\frac{1}{\sqrt{R}} e^{-R}$ dove R è la distanza che intercorre tra i due difetti.

Questa relazione è valida fino a che $R \sim \frac{2}{v}$, fino a tale distanza l'interazione può essere considerata praticamente ininfluenza; i due difetti si muoveranno quindi con velocità data dalla (3.11).

⁵Il membro destro può essere riscritto anche nella forma $n\hat{U}\vec{Q}$ dove $\hat{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è un operatore rotazione di $\frac{\pi}{2}$ e $\vec{Q} = \nabla \tilde{\phi}$ è il numero d'onda locale [4]

Per distanze $R \leq \frac{2}{v}$ il campo di fase è dato dalla (3.6) e per ottenere la nuova interazione dobbiamo applicare il gradiente; questo porta a un'interazione radiale della forma $\frac{1}{R}$.

Il moto dei difetti nella CGL non è altrettanto semplice dato che i difetti possono compiere una molteplicità di moti diversi e addirittura formare degli stati legati, noi non esporremo la teoria ma ci limiteremo a delle osservazioni numeriche [4]⁶.

⁶Nel caso $b = c$ il moto dei difetti nella CGL si può ricondurre al moto nella RGL come mostrato in [4].

Capitolo 4

Strutture coerenti nella CGL

4.1 Studio dell'equazione CGL

In questo capitolo affronteremo lo studio delle strutture coerenti nella CGL e del loro moto; tale teoria è molto complicata e noi affronteremo solo qualche aspetto basilare del problema.

Infatti, come abbiamo visto, la CGL non ammette una funzione di Lyapunov e quindi molti dei risultati ottenuti nel capitolo precedente per il moto delle dislocazioni non sono validi.

4.2 Simmetrie nella CGL

Nello studio delle strutture presenti nella CGL assumono un ruolo fondamentale le simmetrie; queste ci consentono di ridurre lo studio del problema a un set minimo di parametri indispensabili e a trovare numerose proprietà delle soluzioni anche senza conoscerne esattamente la forma esplicita.

Esaminiamo adesso alcune simmetrie della CGL:

- simmetria di fase o di “gauge” globale

$$A \rightarrow e^{i\phi} A$$

- trasformazione di “inversione”

$$A, b, c \rightarrow A^*, -b, -c$$

grazie a questa trasformazione possiamo limitarci a studiare metà del piano (b, c) dato che l'altro si ottiene da una banale trasformazione.

- invarianza *galileiana*

Una simmetria molto importante della CGL che ha grandi riscontri nella dinamica delle strutture, è l'invarianza “galileiana” che per semplicità la esporremo per l'equazione 1D:

$$x' \rightarrow x + vt \quad (4.1)$$

$$t' \rightarrow t \quad (4.2)$$

$$A'(x', t') \rightarrow A(x, t) e^{(x + \frac{vt}{2})(i\frac{v}{2})} \quad (4.3)$$

Per capire quando è valida questa simmetria riscriviamo tutte le lunghezze di un fattore $\gamma = 1/b$ in modo da ottenere la CGL nella forma

$$\partial_t A = A + (\gamma + i) \partial_x^2 A - (1 + ic) |A|^2 A$$

ora per $\gamma = 0$ si può dimostrare usando le (4.1), (4.2), (4.3) che l'equazione è invariante sotto trasformazioni di Galileo, mentre non lo è per tutti gli altri valori.

La rottura di questa simmetria porta a implicazioni importanti per quanto riguarda il moto di alcune strutture della CGL come vedremo nei prossimi paragrafi.

Tuttavia per queste simmetrie non vale, come invece avviene in teoria di campo, il teorema di Noether [27], che afferma che a ogni simmetria corrisponde una quantità conservata.

Infatti a causa della assenza della funzione di Lyapunov nella CGL non possediamo un principio variazionale su cui basare la dinamica.

4.3 Strutture nella CGL 1D

L'equazione CGL ammette soluzioni di tipo onda solitaria, ossia soluzioni localizzate che traslano con velocità costante mantenendo la loro forma invariata nel tempo.

Queste soluzioni saranno per noi molto importanti visto che cercheremo di modellare il fenomeno dell'oscillazione dei difetti (vedi cap 5) tramite lo studio del moto di alcune di esse.

Partiamo studiando una CGL unidimensionale

$$\partial_t A = A + (1 + ib)\partial_x^2 A - (1 + ic)|A|^2 A \quad (4.4)$$

cerchiamo soluzioni uniformemente traslanti della forma

$$A(x, t) = e^{-i\omega t} \hat{A}(\xi) \quad (4.5)$$

dove $\xi = x - vt$, $\hat{A}(\xi) = a(\xi)e^{i\phi(\xi)}$ e dove v è la velocità di traslazione della struttura e ω è la frequenza temporale; a questo livello entrambe sono costanti arbitrarie reali.

Inserendo l'ansatz (4.5) nell'equazione (4.4) e sostituendo

$$q(\xi) = \partial_\xi \phi$$

$$k(\xi) = \partial_\xi a/a$$

abbiamo

$$\partial_\xi a = ka$$

$$\partial_\xi q = Q(a, q, k, b, c)$$

$$\partial_\xi k = R(a, q, k, b, c)$$

che formalmente rappresentano un sistema dinamico nella variabile pseudo-temporale ξ e le cui traiettorie nello spazio delle fasi sono le soluzioni unifor-

memente traslanti dell'equazione originale e dove R e Q^1 sono funzioni dei parametri dell'equazione originale.

Consideriamo i punti fissi che sono individuati dalla condizione

$$\partial_\xi a = \partial_\xi q = \partial_\xi k = 0$$

questi possono essere di due tipi:

1. “*non linear*” o di tipo N: $a_N = \text{cost}$, $q_N = \text{cost}$, $k = 0$ che corrispondono a una soluzione di tipo onda dell'equazione originale.
2. “*linear*” o di tipo L: $q_L = \text{cost}$, $k_L = \text{cost}$, $a_L = 0$ che corrispondono a una soluzione evanescente dell'equazione originale.

4.4 Strutture coerenti

Le *strutture coerenti* unidimensionali possono essere costruite adesso cercando traiettorie eterocliniche e omocliniche² che connettono i vari punti fissi.

Le strutture trovate sono:

- “fronts”: connette un punto fisso di tipo N a un punto fisso di tipo L
- “pulses”: connette due punti di tipo L diversi
- “domain boundaries (source, sinks)”: connette due differenti punti fissi di tipo N

¹Queste sono funzioni delle costanti b e c ; tuttavia per il nostro studio la loro forma esplicita non è necessaria

²Una traiettoria si dice omoclinica se connette asintoticamente il medesimo punto. Altrimenti la traiettoria si dirà eteroclinica.

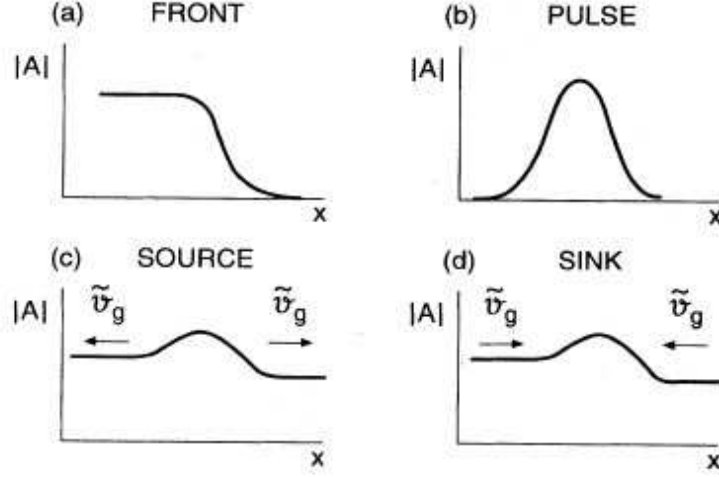


Figura 4.1: Schema delle varie strutture unidimensionali nella CGL , \tilde{v}_g è la velocità di gruppo delle onde nel sistema solidale con la struttura [3]

Sink e Source

I “sinks” e i “sources” sono soluzioni che connettono asintoticamente due soluzioni di tipo onda³.

Dato che, le soluzioni di tipo onda possono avere velocità di gruppo non nulla, possiamo avere vari tipi di strutture a seconda della direzione delle velocità delle onde raccordate.

Se le velocità sono dirette verso l’interno (nel sistema di riferimento in cui la struttura è ferma) avremo un “sink”, se invece le velocità sono dirette verso l’esterno avremo un “source”.

Quindi i “source” sono delle sorgenti che emettono onde, invece i “sink” sono come dei pozzi in cui vengono “assorbite” le onde piane e possono essere considerati degli oggetti “passivi” dato che, a causa del verso della velocità delle onde che connettono, essi non possono risiedere in zone dello spazio adiacenti.

In principio le strutture di tipo “domain boundaries” possono anche essere co-

³Noi non saremo interessati allo studio dei “front” e dei “pulse”

stituite da onde piane la cui velocità è diretta nella stessa direzione, tuttavia si può dimostrare che queste strutture non esistono nella CGL cubica.

4.4.1 Argomenti di conteggio

E' possibile studiare la molteplicità delle soluzioni traslanti facendo riferimento ai cosiddetti argomenti di "conteggio".

Deve essere qui sottolineato che questo tipo di conteggio non può provare l'esistenza di un certo tipo di soluzione né può stabilirne la dinamica, ma determina la molteplicità dei parametri da cui dipende, assumendo che le equazioni non contengano *simmetrie nascoste*.

Consideriamo per esempio delle traiettorie che vanno da un punto N fisso ad un altro L . Se N possiede n_N direzioni instabili, ci sono $n_N - 1$ parametri liberi che caratterizzano il flusso nel sottospazio $n_N - \text{dimensionale}$ spazzato dai vettori instabili, insieme con i parametri ω e v , questo condurrà a $n_N + 1$ parametri liberi.

Se L ha n_L direzioni instabili la richiesta che la traiettoria arrivi ortogonale alla varietà instabile ci dà $n = n_N - n_L + 1$ parametri liberi.

A questo punto per $n < 0$ le strutture non esistono, per $n = 0$ abbiamo un set discreto di strutture per $n \geq 1$ invece abbiamo una famiglia di soluzioni a n parametri; tuttavia possono esistere delle simmetrie "nascoste" che invalidano il ragionamento e aumentano il numero di parametri liberi.

Questa analisi prevede ad esempio che i "source" esistano solo per un numero discreto di valori della loro velocità v ; Nozaki e Bekki tuttavia hanno trovato una famiglia di soluzioni di tipo "source" che dipende con continuità da un parametro, in netto contrasto con gli argomenti di conteggio.

L'esistenza dei cosiddetti Nozaki-Bekki "hole" ha portato a concludere che la CGL cubica possieda una qualche simmetria nascosta che è causa di questo errato conteggio.

4.5 Nozaki-Bekki “hole”

La forma analitica dei sink e dei source è, in generale, sconosciuta; tuttavia esiste una sottofamiglia di source unidimensionale per cui tale forma è nota e prende il nome di *Nozaki-Bekki “hole”*.

I Nozaki-Bekki “Hole” sono soluzioni della forma

$$A_v^{NB} = \left[\hat{B} \partial_\zeta \varphi_v(k\zeta) + \hat{A}v \right] \exp[i\varphi_v(k\zeta) + i\hat{a}v - i\Omega t] \quad (4.6)$$

con

$$\varphi(k\zeta) = k^{-1} \ln(\cosh(k\zeta))$$

e

$$\zeta = x - vt$$

e dove v è la velocità della struttura dove le lettere con il “cappuccio” sono costanti che dipendono da b e c e Ω e k sono parametri che dipendono in maniera lineare da v^2 .

Per l’equazione cubica di CGL si può dimostrare che tale velocità è $v = (b - c)(q_1 + q_2)$, dove $q_{1,2}$ sono i numeri d’onda asintotici; queste strutture sono una caratteristica dell’equazione cubica CGL.

4.6 Distruzione dei Nozaki-Bekki “hole”

Aggiungiamo adesso all’equazione (4.4) un termine di ordine cinque

$$\partial_t A = A + (1 + ib) \partial_x^2 A - (1 + ic) |A|^2 A + (\delta' + i\delta'') |A|^4 A$$

questo termine è naturale considerando che la CGL cubica deriva da una “espansione debolmente non lineare”.

Le simulazioni mostrano che gli “hole” sono accelerati o distrutti per $|\delta|$ piccolo ma finito.

In particolare si ha, per δ reale, che

$$\left[\frac{\partial_t v}{v} \right] > 0 \Leftrightarrow \delta > 0$$

$$\left[\frac{\partial_t v}{v} \right] < 0 \Leftrightarrow \delta < 0$$

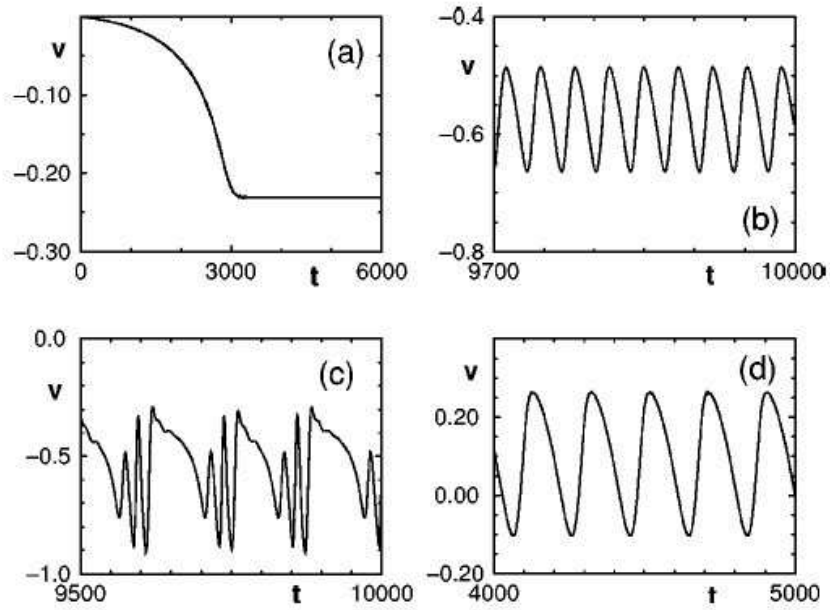


Figura 4.2: Simulazioni tratte da [4] che mostrano le velocità degli “hole” al variare dei parametri della CGL quintica. a),b),c) $b=0.5$ $c=2.3$ $\delta' = 0,0025$ d) $b=0.21, c=1.3$ $\delta' = -0,005$

dove v è la velocità della struttura.

Nell'ultimo capitolo di questa tesi cercheremo di studiare numericamente la relazione tra il parametro δ e il periodo delle oscillazioni, cercheremo poi di confrontarlo con un fenomeno fisico che avviene nell'elettroconvezione nei cristalli liquidi.

4.7 Strutture nella CGL 2D

L'equazione bidimensionale di Landau-Ginzburg possiede, oltre alle strutture quasi-1D analoghe a quelle esposte precedentemente, delle soluzioni che prendono il nome di “spirali”.

Le spirali sono l'analogo dei “vortici” della RGL e sono dei difetti topologici; la forma di una spirale stazionaria di carica topologica m in coordinate polari poste nel suo centro è

$$A(r, \theta, t) = F(r) \exp(i(-\omega t \pm m\theta + \psi(r))) \quad (4.7)$$

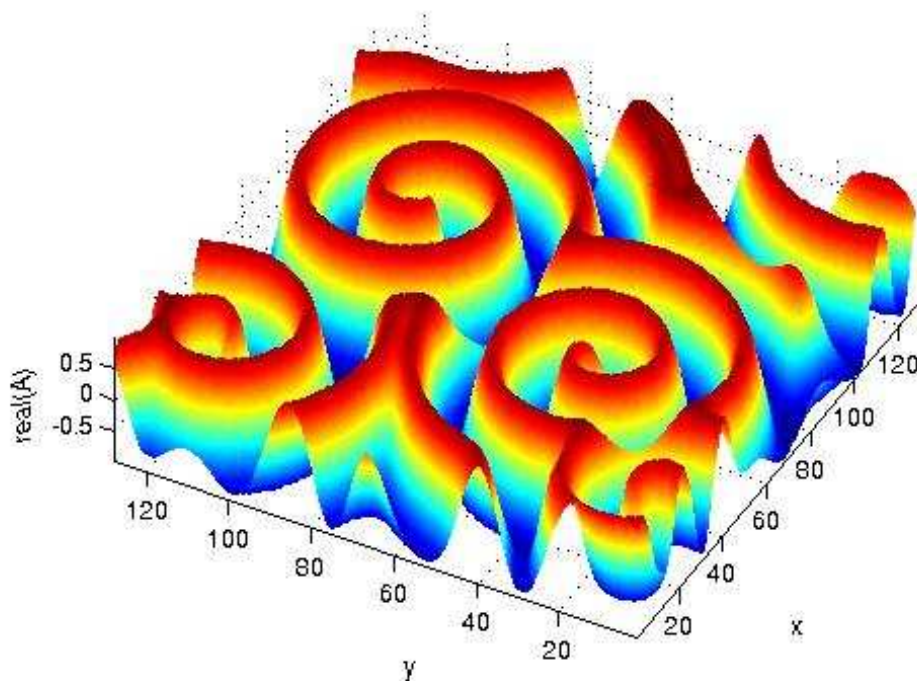


Figura 4.3: Immagine di alcune spirali, in figura il plot di $Re(A)$

dove ω è la frequenza di rotazione della spirale, $F(r) > 0$ è l'ampiezza e $\psi(r)$ è la fase.

Sostituendo la (4.7) nella CGL si possono trovare le relazioni tra i parametri b, c e la fase

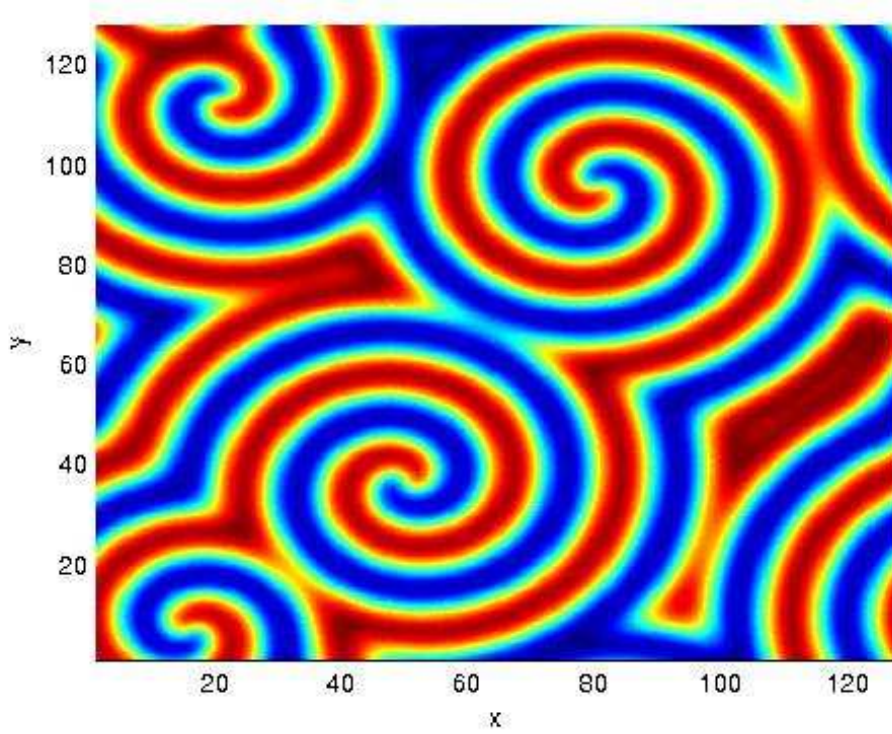


Figura 4.4: Alcune spirali nella CGL

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \partial_r \psi(r) = Q$$

e la frequenza

$$\omega = c + (b - c)Q^2$$

dove Q è il numero d'onda asintotico “selezionato” dalla spirale; oltre alle spirali, si formano anche i “sink” che sono “pozzi” che assorbono onde.

La forma di queste strutture è determinata dalla configurazione dei “sources” circostanti.

Riscaliamo ora la CGL in modo che $\gamma = \frac{1}{|b|}$

$$\partial_t A = A + (\gamma + i)\Delta A - (1 + ic)|A|^2 A \quad (4.8)$$

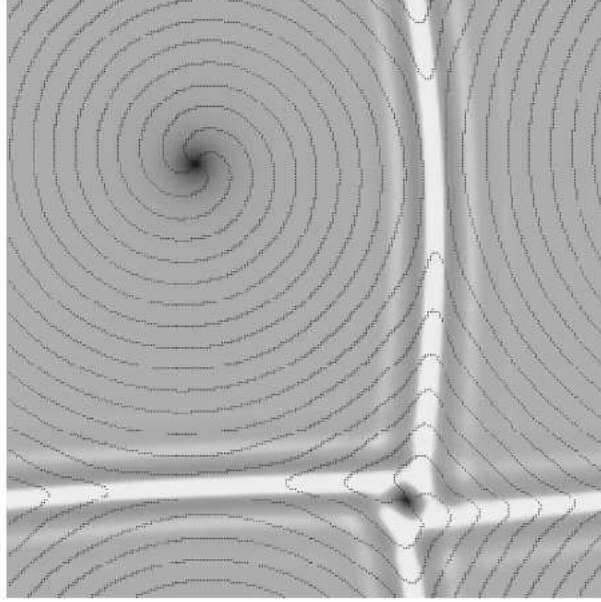


Figura 4.5: Immagine raffigurante una spirale (in alto a sinistra) e un “sink” (in basso a destra). Il plot rappresenta il $|A|$ sui cui sono state sovrapposte le linee di livello di $\arg(A) = 0, \pi$ [4]

Per $\gamma = 0$ l’equazione (4.8) possiede invarianza galileiana; questo significa che la trasformata, in senso galileiano, di una soluzione stazionaria è essa stessa una soluzione per ogni velocità v [14].

Quindi esiste un’intera famiglia di strutture che si muovono con velocità arbitraria v

$$A(r, \theta, t) = F(|\vec{r}'|) \exp \left(i \left(-\omega' t + \theta + \psi(|\vec{r}'|) - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{2} \right) \right) \quad (4.9)$$

dove $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t$ e $\omega' = \omega + \frac{v^2}{4}$.

Per $\gamma \neq 0$ il termine $\sim \gamma \Delta A$ “distrugge” l’invarianza e conduce a un’accelerazione proporzionale a γv del nucleo delle spirali.

Per $0 < \gamma \ll 1$ possiamo aspettarci che la soluzione (4.9) sia lievemente perturbata e obbedisca a una equazione del moto della forma

$$\partial_t \vec{v} + \gamma \hat{K} \vec{v} = 0 \quad (4.10)$$

dove \hat{K} è un tensore che a causa della isotropia della CGL deve soddisfare le seguenti proprietà

$$K_{11} = K_{22}$$

e

$$K_{21} = -K_{12}$$

da cui la relazione precedente può essere riscritta

$$\partial_t \hat{v} + \gamma \kappa \hat{v} = 0 \quad (4.11)$$

dove $\hat{v} = v_x + iv_y$ e $\kappa = K_{11} - iK_{21}$ è una costante immaginaria che dipende dai parametri dell'equazione e che purtroppo è difficile da calcolare analiticamente.

Risolvendo l'equazione (4.11) si ha

$$\hat{v} = \hat{v}(t=0)e^{-\gamma\kappa t}$$

da cui

$$v_x = \operatorname{Re} \left\{ \hat{v}(t=0)e^{-i\beta t} \right\} e^{-\alpha t}$$

$$v_y = \operatorname{Im} \left\{ \hat{v}(t=0)e^{-i\beta t} \right\} e^{-\alpha t}$$

dove $\alpha = \gamma \operatorname{Re}(\kappa)$ e $\beta = \gamma \operatorname{Im}(\kappa)$.

Dalle precedenti relazioni si vede che in generale il nucleo compierà una traiettoria a spirale di raggio $|\hat{v}(t=0)| e^{-\alpha t}$.

Da simulazioni numeriche si osserva che le spirali stazionarie esistono solo per valori $\gamma > \gamma_c$, sotto questa soglia sono instabili rispetto all'accelerazione e compiono un moto descritto, per piccoli valori di γ , dall'equazione

(4.10), come mostrato nella [4] da cui è tratto il diagramma di figura (4.6) in cui $\gamma = \frac{1}{b}$.

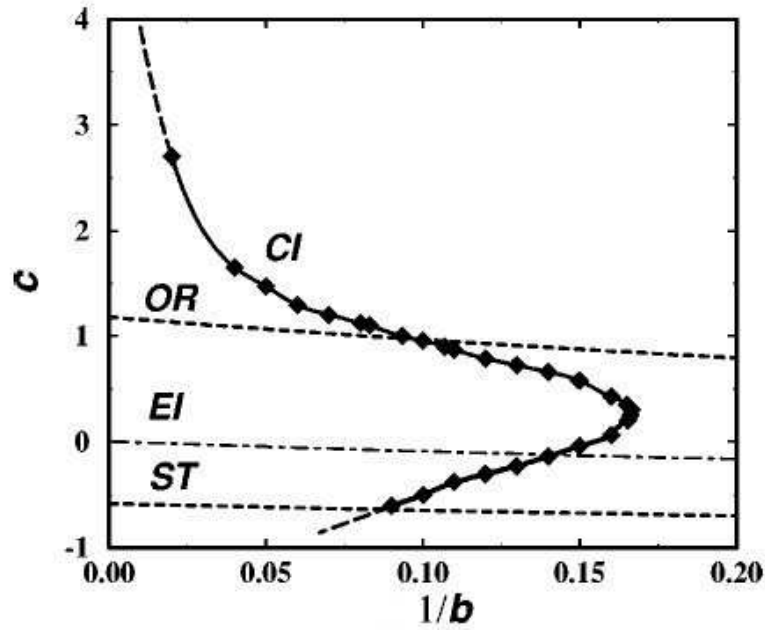


Figura 4.6: Diagramma di stabilità di una spirale: “core instability” (CI) instabile verso sinistra, EI “Eckhaus instability”, “strong turbulence” (ST), “Oscillatory regime” (OR) instabilità verso il basso. A sinistra della curva CI le spirali stazionarie sono instabili rispetto a accelerazioni [4].

Capitolo 5

Elettroconvezione nei cristalli liquidi

5.1 Cristalli liquidi

Il termine “cristallo liquido” denota una famiglia di mesofasi che consistono di molecole che presentano una anisotropia; a causa di questa anisotropia microscopica una sostanza come un cristallo liquido avrà una direzione preferenziale macroscopica descritta da un vettore \hat{n} che chiameremo direttore.

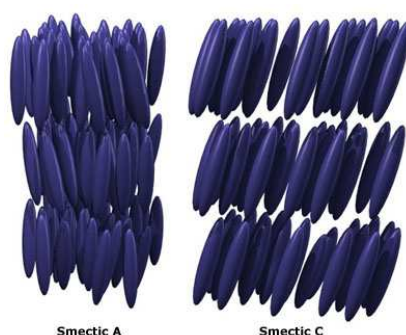


Figura 5.1: Cristalli liquidi in fase smettica

Le varie mesofasi differiscono tra loro nell'orientamento posizionale dei centri

delle molecole. Noi saremo interessati a una particolare fase che prende il nome di fase “nematica” figura (5.2).

Questa fase è la “più simmetrica” tra i cristalli liquidi ed è l’esempio più semplice di un liquido uniassiale anisotropo.

Sempre a causa dell’anisotropia molte quantità fisiche di un cristallo liquido assumono una natura di tipo tensoriale; nella fattispecie per la costante dielettrica avremo

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\perp} \delta_{ij} + \varepsilon_a \hat{n}_i \hat{n}_j \quad (5.1)$$

una relazione analoga vale per la conducibilità elettrica

$$\sigma_{ij} = \sigma_{\perp} \delta_{ij} + \sigma_a \hat{n}_i \hat{n}_j \quad (5.2)$$

dove $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ e $\sigma_a = \sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}$ e $\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \sigma_{\parallel}, \sigma_{\perp}$ sono rispettivamente la costante dielettrica e la conducibilità parallela e ortogonale all’asse individuato dal direttore.



Figura 5.2: Cristalli liquidi in fase nematica

5.2 Elettroconvezione nei cristalli liquidi nematici

I cristalli liquidi manifestano fenomeni di convezione analoghi a quelli visti nella RBC se sottoposti a opportune condizioni.

Descriviamo in breve un esperimento volto a indagare la natura delle instabilità.

Prendiamo un piccolo volume di cristallo liquido confinato tra due lastre trasparenti piane di vetro, tipicamente di lato 10mm , la cui separazione è dell'ordine dei $d \sim 10 - 100\mu$.

Le lastre in genere sono trattate in modo da favorire l'allineamento del direttore lungo la direzione x (figura (5.3)); in tal caso parleremo di allineamento “*planare*”, altrimenti se il direttore è parallelo all'asse z l'allineamento sarà chiamato “*omeotropico*”.

Noi ci occuperemo dei cristalli liquidi in configurazione planare, poiché in questo assetto il sistema è anisotropo nel piano x - y ed è rappresentato da una equazione di Landau-Ginzburg isotropa (vedi cap 2).

Poniamo degli elettrodi sulle due facce di vetro che delimitano lo strato di liquido e applichiamo una piccola differenza di potenziale.

Finché la differenza si mantiene sotto una certa soglia V_c il cristallo rimarrà in uno stato uniforme; superato V_c si creeranno dei moti convettivi del tutto analoghi a quelli visti nella RBC, che daranno origine a dei “*rolls*”, vedi figura (5.3).

Come appare da questa breve descrizione le analogie con la RBC sono evidenti tuttavia ci sono ottimi motivi, sia teorici che sperimentali, per preferire lo studio della EHC a quello della RBC.

Nella EHC si riescono a raggiungere infatti maggiori “*aspect ratio*” ossia rapporti maggiori tra le dimensioni del sample di cristallo e il suo spessore; per questo motivo si vengono a generare anche 1000 “*rolls*” perfettamente allineati; in tali condizioni sarà possibile pensare il nostro sistema come “infinito” nelle due dimensioni trasversali e l'influenza delle condizioni al bordo sarà minima.

Dal punto di vista sperimentale, abbiamo una facile accessibilità dei parametri di controllo (frequenza, voltaggio) e scale ridotte sia temporalmente che spazialmente rispetto alla RBC.

Infine i pattern sono molto semplici da osservare visto che i moti interni al cristallo danno origine a modulazione dell'indice di rifrazione.

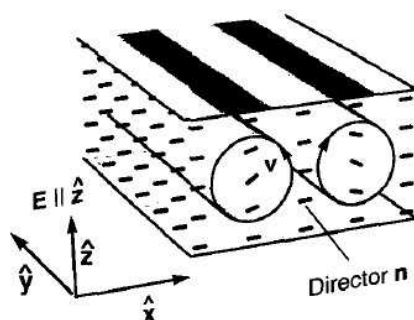


Figura 5.3: Schema dei moti convettivi nella EHC [3]

Tuttavia le equazioni complete da studiare per spiegare la EHC sono molto complicate e quindi per descrivere il comportamento del sistema sarà necessario ricorrere a un metodo perturbativo.

Il metodo da noi usato è quello della “amplitude equation” (come esposto nel cap 2), e una fenomenologia base è descritta dalla semplice RGL per sistemi anisotropi.

Come abbiamo notato precedentemente, questo metodo ci consente di descrivere il fenomeno attraverso un’equazione universale in cui solo i parametri sono reminiscenti della vera natura del fenomeno. Tuttavia il calcolo esatto di questi parametri, a partire dalle equazioni basilari della teoria, è molto complicato ed è stato portato a termine solo per un numero limitato di sistemi.

Nella nostra opinione, si deve considerare il metodo dell’equazione di ampiezza come un “toy model” che può spiegare alcuni aspetti basilari del problema che stiamo studiando; tuttavia non è che un punto di partenza per la spiegazione completa del fenomeno.

L’universalità delle equazioni di ampiezza può essere compresa euristicamente notando che molto probabilmente tali equazioni sono delle “forme normali” che descrivono la biforcazione che avviene vicino alla soglia dell’instabilità primaria.

In linea di principio quindi l’equazione (2.22) vale vicino alla soglia dell’instabilità primaria $|\epsilon| \ll 1$ e non sempre è in grado di spiegare le biforcazioni

secondarie riscontrate nei sistemi reali.

Questo risultato non deve sorprendere in quanto la RGL possiede una funzione di Lyapunov e sicuramente non può spiegare una vasta fenomenologia dato che ha un singolo attrattore.

Possiamo affinare la nostra analisi utilizzando equazioni di ampiezza sempre più complicate aggiungendo termini non lineari di grado superiore; dobbiamo tuttavia notare che ricavando l'equazione di ampiezza abbiamo supposto una separazione tra le scale spaziali (lenta e veloce) e quelle temporali. Quindi non sarà possibile in generale riprodurre tutti gli effetti nelle nostre equazioni a meno di non introdurre termini che accoppiano le scale di lunghezza e le scale temporali (termini non adiabatici).

5.3 “Williams rolls”

I rolls nella EHC prendono anche il nome di domini Williams (WD) o rolls di Williams dal nome dello scienziato che per primo li osservò nel 1963.

La strumentazione per la rilevazione dei pattern nella EHC è quella mostrata in figura (5.4).

Sperimentalmente si osserva che la spaziatura dei “rolls” è circa dell'ordine dello spessore del “layer” d ; per questo motivo il k_c contiene le informazioni sulla dimensione trasversale del sistema.

Il cristallo è posto in un termostato per evitare le variazioni delle costanti fondamentali contenute nelle equazioni di ampiezza dovute a sbalzi termici.

Un sistema come quello descritto nel paragrafo precedente mostra fenomeni convettivi se sottoposto a una differenza di potenziale sia continua che alternata.

In genere è consuetudine stimolare la convezione usando una differenza di potenziale alternata perché i pattern sono più regolari; così facendo otteniamo un ulteriore parametro di controllo: la frequenza di oscillazione del campo elettrico.

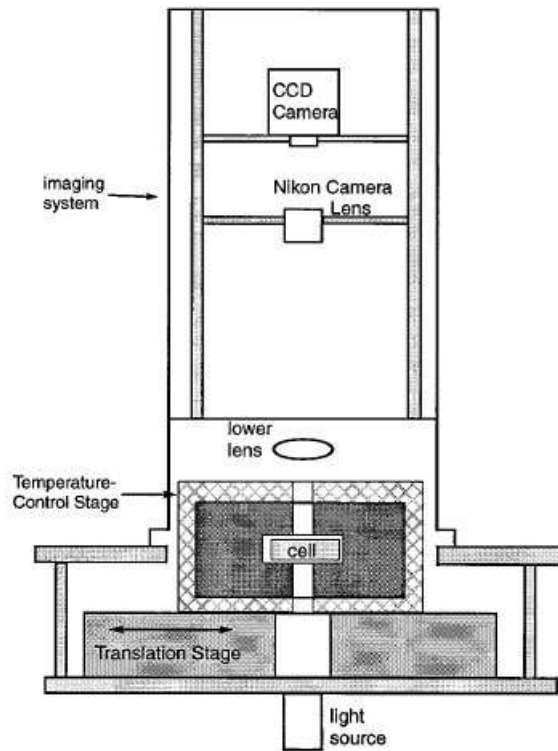


Figura 5.4: Schema dell'apparato sperimentale [12]

La convezione avviene tuttavia solo se si verificano certe relazioni tra la RMS del potenziale e la sua frequenza come riportato in figura (5.5) .

5.4 Fenomenologia dei pattern e instabilità secondarie

Come abbiamo visto precedentemente nella EHC è possibile rompere lo stato di equilibrio aumentando il potenziale oltre una certa soglia V_c .

Le prime strutture che incontriamo dopo la rottura dello stato stazionario sono i domini di *William* (WD) figura (5.6).

Se aumentiamo ulteriormente la differenza di potenziale abbiamo l'insorgen-

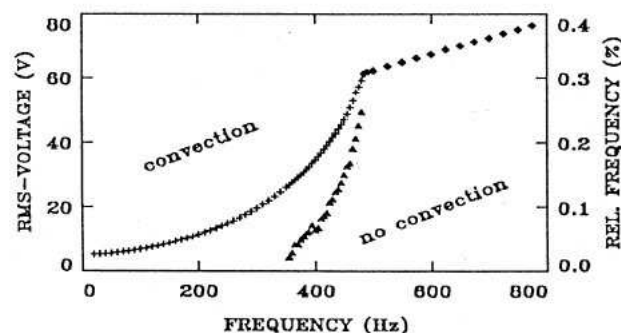


Figura 5.5: Schema dei pattern al variare della frequenza e del RMS del voltaggio applicato [3]

za di instabilità secondarie e dai WD che diventano instabili si creano i “fluctuating William domain” (FWD) figura (5.6) .

Aumentando ancora il voltaggio si vengono a creare delle strutture chiamate “cellular convection” o GP, e infine, superando una certa soglia abbiamo un regime di tipo turbolento chiamato DSM(Dinamic Scattering Mode).

Alcuni pattern molto interessanti da studiare sono i “propagating WD” che si osservano oltre una soglia di frequenza del voltaggio esterno e che sono WD non stazionari (TWD).

Noi ci occuperemo solo delle instabilità di tipo WD, FWD e TWD che sono le tipologie più comuni e la cui descrizione rappresenta uno dei maggiori successi della teoria dell’equazione di ampiezza.

Una particolarità degli WD è che possono presentarsi non ortogonali al direttore; in tal caso prenderanno il nome di “rolls obliqui”. Tuttavia, visto che un sistema anisotropo non distingue tra sinistra e destra, sono possibili sia rolls di tipo “zig” che di tipo “zag” come mostrato in figura (5.7).

Le osservazioni mostrano che sono possibili anche pattern che consistono in sovrapposizioni di “rolls” “zig” e “zag” che chiameremo “zig-zag” vedi figura (2.4).

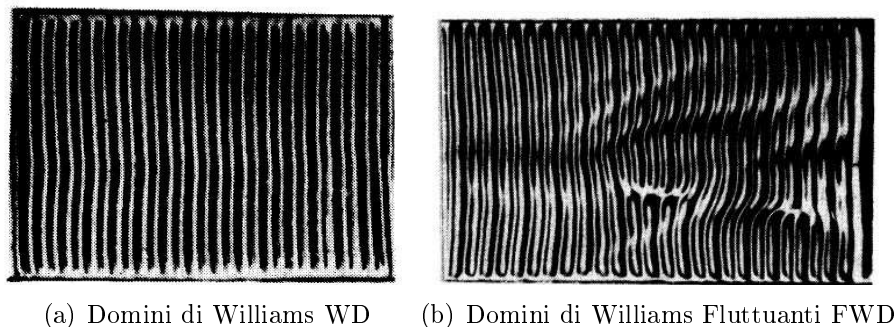


Figura 5.6: Foto dei domini di Williams [12]

5.5 Oscillazioni dei difetti topologici

Come abbiamo precedentemente osservato, sopra la soglia dell'instabilità primaria in un cristallo liquido si possono formare dei difetti o dislocazioni la cui natura è spiegata relativamente bene dall'equazione di ampiezza RGL.

Sperimentalmente si osserva un moto di tipo *oscillatorio* da parte di queste dislocazioni con periodi molto lunghi (dell'ordine dei 150 secondi) che non sono spiegati dall'equazione cubica di Landau-Ginzburg.

Le oscillazioni avvengono, anche se con ordini di grandezza diversi, in entrambe le direzioni ("climbing" e "gliding") come mostrato in figura (5.8).

La natura di questo fenomeno è tuttora sconosciuta e tuttavia esso non avviene nella RBC; la spiegazione potrebbe, quindi, risiedere nella anisotropia del sistema. Il nostro intento è quello di provare a dare una spiegazione basilare del fenomeno includendo un termine di ordine cinque nell'equazione complessa unidimensionale e studiando alcuni regimi dell'equazione bidimensionale.

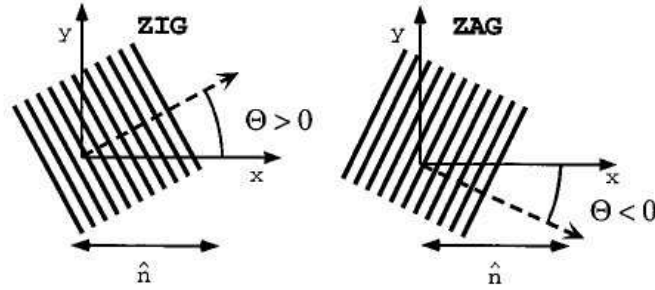


Figura 5.7: Rolls di tipo “zig” e “zag”

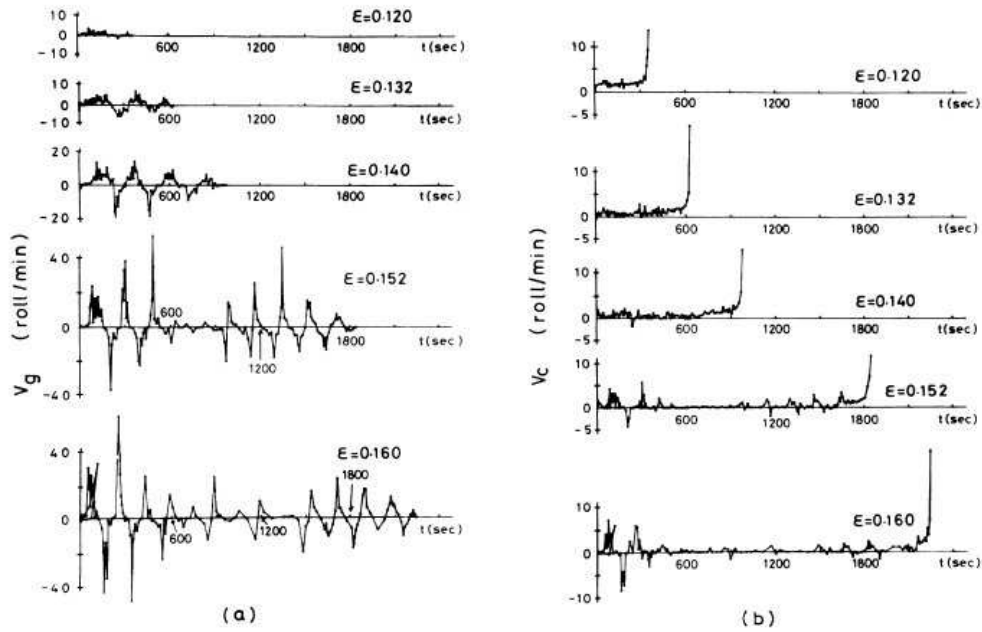


Figura 5.8: a) Velocità di “gliding” b) Velocità di “climbing” [12]

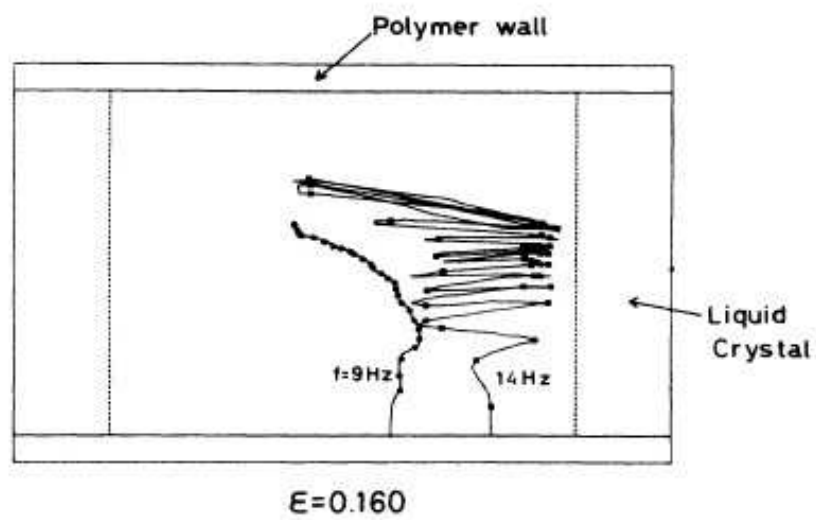


Figura 5.9: Traiettoria compiuta da un difetto oscillante per frequenze di 9 e 14 Hz del campo esterno [12]

Capitolo 6

Algoritmi per la simulazione

Come abbiamo visto il flusso integrale per la CGL non è noto, è quindi naturale sviluppare degli algoritmi efficienti per risolvere numericamente le equazioni di ampiezza descritte nei capitoli precedenti.

In generale è possibile risolvere tali equazioni con il metodo delle “differenze finite”; tuttavia tale metodo è impreciso e computazionalmente molto lento.

Proporremo in seguito due metodi entrambi basati su *algoritmi spettrali* (cioè basati sulla trasformata di Fourier) che risultano essere molto efficienti e con i quali sono state implementate le nostre simulazioni.

6.1 “Split-step”

Questo algoritmo è noto in letteratura anche col nome di “leap-frog” [9] e noi lo applicheremo alla soluzione di un’equazione di Landau-Ginzburg complessa bidimensionale

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (1 + ib)\nabla^2 A + A - (1 + ic)|A|^2 A \quad (6.1)$$

soggetta a condizioni al contorno periodiche nel quadrato $[0, 2\pi]^2$, dove b e c sono costanti reali.

6.2 “Splitting” dell’equazione

L’equazione (6.1) è della forma

$$\frac{\partial A}{\partial t} = H A = (T + V) A$$

dove T e V sono due operatori la cui somma sia H .

La soluzione dell’equazione si può scrivere a partire da una condizione iniziale $A(t = 0)$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = e^{tH} A(0)$$

con ovvio riferimento al propagatore di Schrodinger tempo dipendente.

Ora sappiamo che in generale

$$e^{t(T+V)} \neq e^{tT} e^{tV}$$

tuttavia se siamo interessati a una formula di tipo approssimato possiamo scrivere

$$e^{t(T+V)} = e^{tT} \cdot e^{tV} + O(t^2)$$

oppure

$$e^{t(T+V)} = e^{tV/2} \cdot e^{tT} \cdot e^{tV/2} + O(t^3) \quad (6.2)$$

questa prende il nome di formula di Trotter.

Quindi abbiamo visto che possiamo scrivere l’evoluzione temporale dell’equazione completa sotto forma di prodotti delle evoluzioni delle sottoequazioni a meno di $O(t^3)$.

Definiamo

$$\zeta_T(t) = e^{tT}$$

e

$$\zeta_V(t) = e^{tV}$$

A questo punto se cerchiamo un algoritmo di ordine $O(t^3)$ dobbiamo solo spezzare l’equazione (6.1) in due equazioni facilmente risolvibili.

Se scegliamo

$$T = (1 + ib) \nabla^2 A \quad (6.3)$$

$$V = A - (1 + ic)A|A|^2 \quad (6.4)$$

possiamo risolvere analiticamente le due equazioni.

Se prendiamo la (6.4) e scomponiamo la dinamica di $A = Re^{i\theta}$ nella dinamica del modulo e della fase abbiamo che

$$\frac{dR}{dt} = (R - R^3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -cR^2$$

La prima equazione si integra moltiplicando entrambi i membri per R e studiando l'evoluzione in funzione di R^2 da cui abbiamo

$$R(t) = \frac{R(0)e^t}{\sqrt{1 - R^2(0) + R^2(0)e^{2t}}}$$

la seconda sostituendo il risultato della prima e poi integrando il tutto

$$\theta(t) = \theta(0) - \frac{c}{2} \ln(1 - R^2(0) + R^2(0)e^{2t})$$

da cui l'evoluzione di A secondo l'equazione (6.4) è:

$$A = \frac{R(0)e^t}{\sqrt{1 - R^2(0) + R^2(0)e^{2t}}} e^{i[\theta(0) - \frac{c}{2} \ln(1 - R^2(0) + R^2(0)e^{2t})]} \quad (6.5)$$

L'equazione (6.3) può invece essere risolta in trasformata di Fourier in maniera naturale, dato che il sistema è periodico per costruzione

$$A(\vec{x}, t) = \sum_{k_x, k_y = -\infty}^{\infty} f_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

e l'equazione (6.4) si riduce a un sistema di equazioni

$$\frac{df_k}{dt} = -|\vec{k}|^2 (1 + ib) f_k \quad \forall \vec{k}$$

dove $\vec{k} = (k_x, k_y)$, che ha come soluzione

$$f_k(t) = f_k(0) e^{-|\vec{k}|^2 (1 + ib)t} \quad \forall \vec{k} \quad (6.6)$$

Con le due soluzioni (6.5), (6.6) possiamo costruire l'algoritmo (6.2).

Naturalmente per risolvere l'equazione dobbiamo provvedere a fare una discretizzazione spaziale dividendo la variabile spaziale in intervalli $\Delta x = \frac{2\pi}{N}$;

questo corrisponde in trasformata di Fourier a porre $f_k = 0$ per tutte le frequenze dello spettro con $k > N/2$.

Quindi assumeremo che il numero N sia sufficientemente grande da poter trascurare l'errore dovuto alla discretizzazione e che quindi l'unico errore dell'algoritmo è quello che deriva dalla (6.2) ¹.

Possiamo riassumere schematicamente un singolo “time-step” dell'algoritmo :

$$A(t + \Delta t) = \zeta_V\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \zeta_T(\Delta t) \circ \mathcal{F} \circ \zeta_V\left(\frac{\Delta t}{2}\right) A(t)$$

dove F e F^{-1} sono rispettivamente la trasformata e l'antitrasformata di Fourier².

6.3 “Exponential time-step”

Esponiamo ora un metodo alternativo, sempre basato sulle trasformate di Fourier [11], per risolvere equazioni del tipo

$$\frac{\partial A}{\partial t} = cA + F(A, t) \quad (6.7)$$

dove $F(A, t)$ è una qualsiasi funzione non lineare.

Partiamo moltiplicando entrambi i membri per e^{ct} e integriamo tra 2 valori temporali t_n e $t_{n+1} = t_n + h$.

Integrando per parti il membro sinistro dell'equazione abbiamo

$$A(t_{n+1}) = A(t_n)e^{ch} + e^{ch} \int_0^h e^{-c\tau} F(A(t_n + \tau), t_n + \tau) d\tau \quad (6.8)$$

si noti che, per il momento, non si sono fatte approssimazioni.

L'unico errore di questo metodo è contenuto nel calcolo numerico dell'integrale che compare nell'equazione (6.8).

Se approssimiamo l'integrando

¹Numericamente si osservano delle fluttuazioni numeriche che possono compromettere le misurazioni già per valori $\frac{L}{N} \sim 5$.

²Le trasformate di Fourier sono state eseguite utilizzando l'algoritmo FFT implementato in Matlab

$$F = F_n + \tau \frac{(F_n - F_{n-1})}{h} + O(h^2)$$

dai calcoli dell'integrale contenuto nella (6.8) abbiamo che

$$\begin{aligned} A(t_{n+1}) = A(t_n)e^{ch} + F(A(t_n)) \left(\frac{(1+hc)e^{ch} - 1 - 2hc}{hc^2} \right) + \\ + F(A(t_{n-1})) \left(\frac{1+hc - e^{ch}}{hc^2} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

6.4 Applicazione dell' "exponential time-step" all'equazione di Landau-Ginzburg

L'equazione di Landau-Ginzburg può essere ricondotta alla forma (6.7).

Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri dell'equazione (6.1) abbiamo

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = -(1+ib) |k|^2 \hat{A} + \hat{A} - (1+ic) \mathcal{F}(|A|^2 A)$$

dove $\hat{A} = \mathcal{F}(A)$ è la trasformata di Fourier di A .

possiamo identificare $c = -(1+ib) |k|^2 + 1$ una volta fatto questo si applica lo studio svolto nel paragrafo precedente.

Da notare che la trasformata Fourier del termine non lineare può essere calcolata solo numericamente.

Questo metodo è tanto più efficiente quanto più la costante c è grande in valore assoluto e negativa: questa condizione è ciò che vogliamo dato che, in linea di principio, i k dell'equazione vanno da zero all'infinito.

Per $|c| \gg 1$ otteniamo gli sviluppi

$$A \sim -\frac{F}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{dF}{dt}$$

mentre per $c \rightarrow 0$ abbiamo una divergenza illusoria; infatti, se sostituiamo lo sviluppo (6.9) con il suo limite, otteniamo i coefficienti di "Adams-Bashforth" come mostrato in [11], quindi lo sviluppo diventa

$$A(t_{n+1}) = A(t_n)e^{ch} + \frac{3}{2}hF(A(t_n)) - \frac{h}{2}F(A(t_{n-1}))$$

Capitolo 7

Risultati delle simulazioni

7.1 Introduzione

In questo capitolo saranno mostrati i risultati delle risoluzioni numeriche delle equazioni di ampiezza sia reali (RGL) che complesse (CGL).

Per quanto riguarda lo studio dell'equazione complessa 1D saranno mostrati alcuni fotogrammi che illustrano i regimi principali e le loro proprietà.

L'aggiunta di un termine di ordine cinque nella CGL 1D porta, come mostrato in [4], a delle *accelerazioni dei Nozaki Bekki "hole"* che in alcuni "range" di parametri possono compiere dei moti periodici; per questo fenomeno sono stati misurati i periodi al variare del coefficiente del termine quintico per poi confrontarli con un fenomeno che avviene tipicamente nei cristalli liquidi: le oscillazioni spaziali dei difetti. Cercheremo di capire se questo comportamento dei Nozaki Bekki "hole" può in qualche modo spiegare *l'ordine di grandezza* delle oscillazioni che abbiamo illustrato in (cap 5.5).

Per quanto riguarda invece l'equazione bidimensionale sono stati studiati i vari regimi della CGL cercando di verificare numericamente le previsioni teoriche riguardanti le interazioni tra difetti topologici di carica opposta.

Infine sono stati studiati i tassi di nucleazione e annichilazione dei difetti in funzione dei parametri dell'equazione complessa.

In tutte le simulazioni bidimensionali è stato scelto di utilizzare le lunghezze

di correlazione $\xi_x = 3$ e $\xi_y = 1$ perché questo è il rapporto che si misura tipicamente in un cristallo liquido.

Inoltre è stato scelto, per non incorrere in errori numerici, di limitare le simulazioni a “campioni” di lunghezza $L = 100 - 200$ e $N = 128 - 256$ per l'equazione bidimensionale e di 512 per quella unidimensionale, in modo che il parametro $\frac{L}{N} < 1$.

Per valori di $\frac{L}{N} \sim 5$ si possono osservare infatti effetti numerici che modificano sensibilmente le traiettorie dei difetti topologici, dando come falso risultato un'oscillazione spaziale nella direzione relativa alla lunghezza di correlazione maggiore.

Il numero di punti del reticolo è stato scelto potenza di due in quanto la “Fast Fourier Transform” è particolarmente efficiente su reticoli così costituiti.

Infine dobbiamo dire che molti comportamenti dell'equazione della CGL compaiono solo se l'equazione parte da opportune condizioni iniziali; infatti le singole soluzioni delle equazioni non hanno un “raggio di attrazione” infinito quindi la loro comparsa o meno dipende dalle condizioni di partenza del sistema.

Queste considerazioni illustrano il limite dello studio numerico di un'equazione come la CGL, questo tuttavia attualmente è uno degli strumenti più validi che abbiamo per scoprire il comportamento di questo sistema.

Un'ultima considerazione riguarda il rapporto tra gli esperimenti e questa teoria fenomenologica; negli esperimenti infatti per identificare i difetti e studiarne il moto, si usa “demodulare” il pattern portante da quello rappresentato dalla soluzione dell'equazione di ampiezza.

Col nostro approccio questo non è necessario dato che noi possiamo osservare direttamente l'equazione di ampiezza. Quindi abbiamo ridotto lo studio dei difetti nella EHC a quelli nelle equazioni di ampiezza; come abbiamo notato prima infatti c'è una separazione completa delle scale; nel nostro approccio, il valore del numero critico del pattern portante non può avere nessuna influenza sul moto dei difetti.

7.2 Equazione complessa di Landau-Ginzburg unidimensionale

Storicamente le simulazioni unidimensionali hanno avuto un ruolo molto importante soprattutto a causa del fatto che è possibile rappresentare l'evoluzione temporale di un sistema in un plot bidimensionale; questo, ad esempio, ha portato alla scoperta delle *strutture coerenti*; inoltre molti sistemi possono a tutti gli effetti essere trattati come sistemi unidimensionali nonostante il sistema fisico sia bidimensionale o tridimensionale.

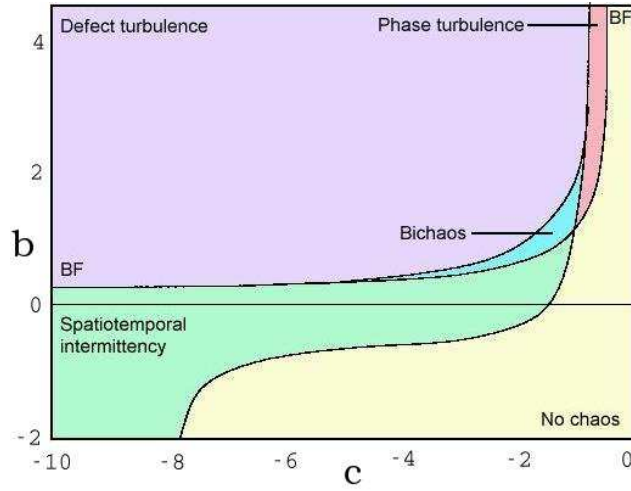


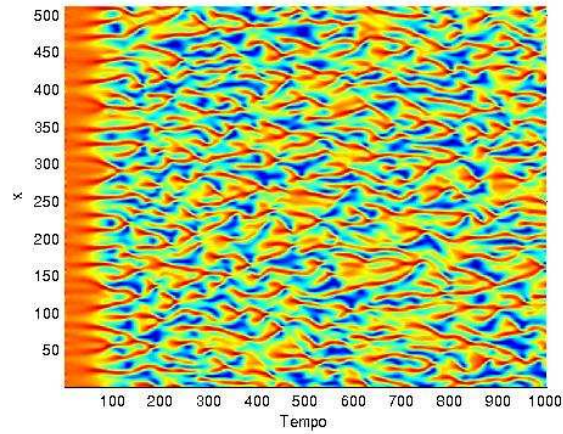
Figura 7.1: Diagramma di fase dell'equazione complessa di Landau-Ginzburg 1D. La regione chiamata “Bichaos” manifesta sia fenomeni di “turbolenza mediata da difetti” che “turbolenza della fase” a seconda delle condizioni iniziali. La linea BF rappresenta la curva limite dell'instabilità di Benjamin-Feir: aldisopra di questa curva tutte le onde piane sono instabili [26].

Noi abbiamo effettuato studi di alcuni regimi significativi dell'equazione di Landau-Ginzburg complessa unidimensionale

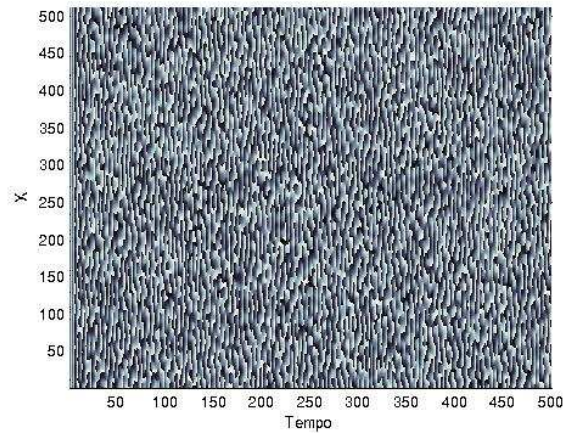
$$\partial_t A = A + (1 + ib)\partial_x^2 A - (1 + ic)|A|^2 A \quad (7.1)$$

con $N = 512$ e $dt = 0.1$ seguendo il diagramma di fase della CGL che è stato ricavato nella [15] ed è mostrato in figura (7.1); vediamo le caratteristiche di alcuni regimi descritti nel diagramma di fase:

- Turbolenza mediata da difetti $b, c = 2, -2$



(a) modulo di A



(b) fase di A

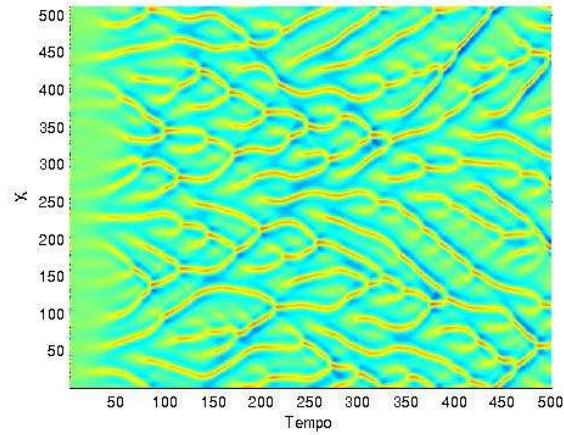
Figura 7.2: Immagine del regime “turbolenza mediata da difetti”

Questo regime è caratterizzato da difetti (regioni blu), cioè punti in cui $|A| = 0$, in figura (7.2) si possono notare la creazione e la distruzione continua di essi; inoltre osservando la fase del “sample” si notano continui salti in corrispondenza della posizione di un difetto topologico.

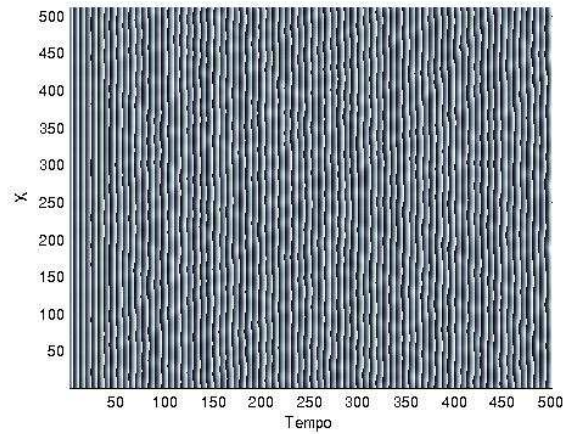
Dalle simulazioni abbiamo che tale regime è persistente almeno per 500 istanti

di tempo simulato, come è testimoniato dall'andamento del numero di difetti in funzione del tempo che è circa costante (figura (7.4)).

- Turbolenza della fase $b, c = 2, -1$



(a) modulo di A



(b) fase di A

Figura 7.3: Immagine del regime “Turbolenza della fase”

In questo regime l'ampiezza non è dinamicamente attiva e non raggiunge mai il valore 0, quindi non abbiamo la creazione di nessun difetto; la fase, invece, è dinamicamente attiva e non subisce discontinuità come mostrato in (7.3).

Partendo da uno stato con un certo numero di difetti si nota che il loro numero tende a zero dopo un certo tempo (figura (7.5)).

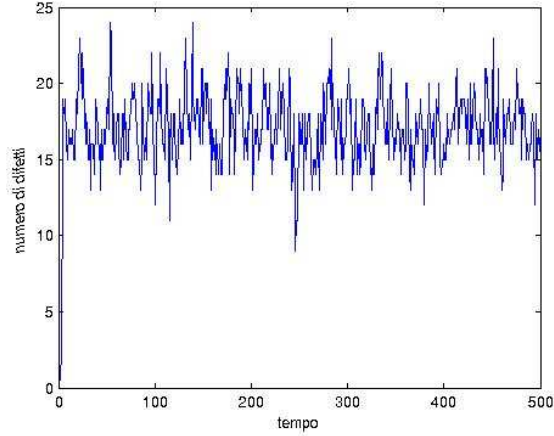


Figura 7.4: Numero di difetti in funzione del tempo per il regime “turbolenza mediata da difetti”

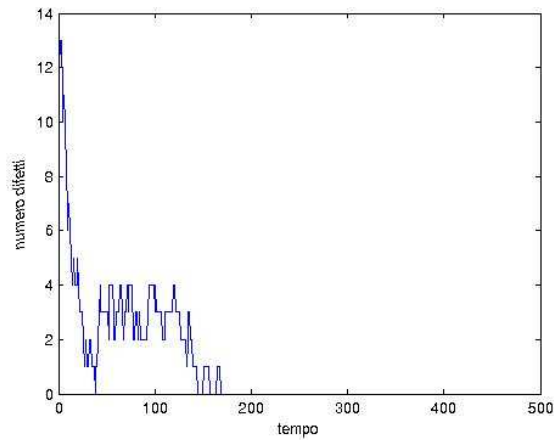
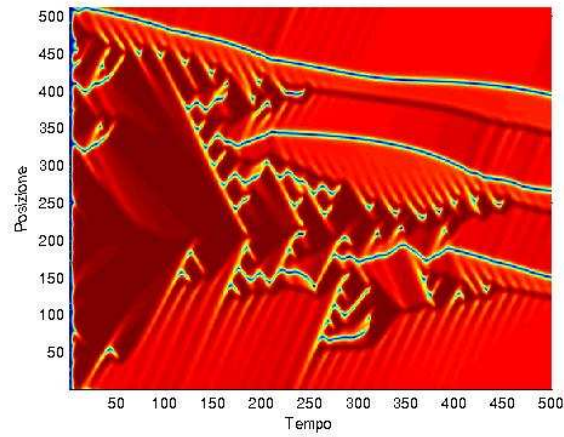


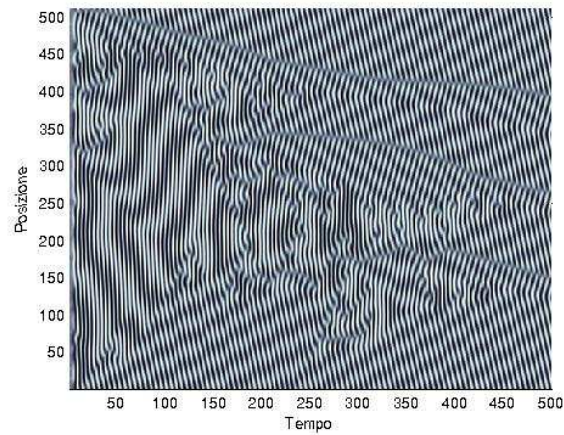
Figura 7.5: Numero di difetti in funzione del tempo per il regime “turbolenza della fase”

- No “chaos” $b, c = 0, 1.5$

Oltre alle onde piane, l’equazione (7.1) ammette varie strutture coerenti; come si vede nella figura (7.6) sono presenti delle strutture stazionarie che in questo caso sono stabili.



(a) modulo di A



(b) parte reale di A

Figura 7.6: Grafico di $|A|$ in cui si notano (in blu) alcune strutture coerenti di tipo “hole”, alcune di esse, come si vede vengono distrutte nel corso dell’evoluzione. In una dimensione infatti i difetti non necessariamente devono apparire e scomparire in coppie

- Intermittenza spazio-temporale $b, c = 0, -3$

Questa è un regime intermedio tra la “turbolenza mediata dai difetti” e la fase “no chaos”. Molte condizioni iniziali sono attratte da onde piane, è tuttavia possibile trovare delle condizioni iniziali che generano comportamenti di intermittenza come quelli trovati nel regime “*turbolenza mediata dai difetti*”

7.2.1 Instabilità di Eckhaus generalizzata

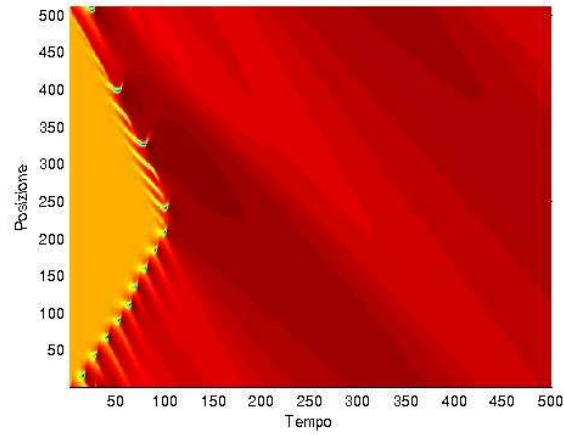
Come abbiamo visto nel capitolo 2, nel regime non caotico non tutte le onde piane sono stabili, ma lo sono solo quelle il cui numero d'onda k rispetta il “criterio di Eckhaus generalizzato” :

$$k^2 < \frac{1 + bc}{3 + bc + 2c^2}$$

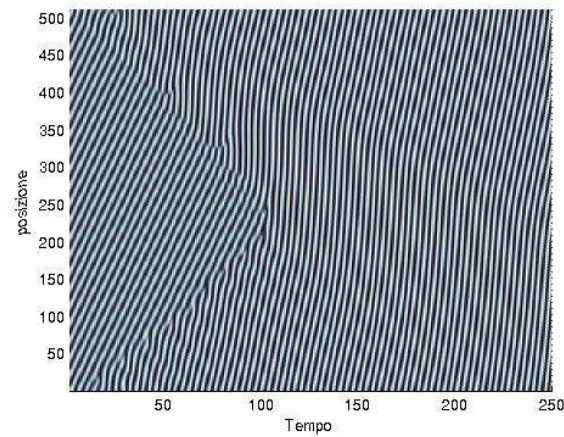
le onde che non rispettano questa relazione sono instabili e tendono a decadere in onde “Eckhaus stabili”; il fenomeno interessante che avviene in questi casi è che il sistema per diminuire il proprio numero d'onda, genera dei difetti che saranno quindi “mediatori” nel raggiungimento dell'equilibrio.

Ad esempio, per il caso unidimensionale, questo può essere visualizzato guardando l'evoluzione che parte da uno stato “*Eckhaus instabile*”.

Per $b, c = 1, 2$ abbiamo un numero d'onda limite pari a ~ 0.48 , se partiamo da un'onda piana con numero d'onda $k = 0.7$ abbiamo l'evoluzione mostrata in figura (7.7).



(a) modulo di A



(b) parte reale di A

Figura 7.7: Evoluzione temporale a partire da uno stato “Eckhaus instabile” di un’onda, si può notare la comparsa di alcuni difetti che sono mediatori nel raggiungimento della stabilità

7.2.2 Oscillazioni nel modello unidimensionale

Come abbiamo precedentemente detto (cap 4) aggiungendo un termine quintico all’equazione cubica di CGL 1D, si osservano, per valori molto piccoli e negativi del parametro δ , dei moti oscillatori dei Nozaki-Bekki “hole”.

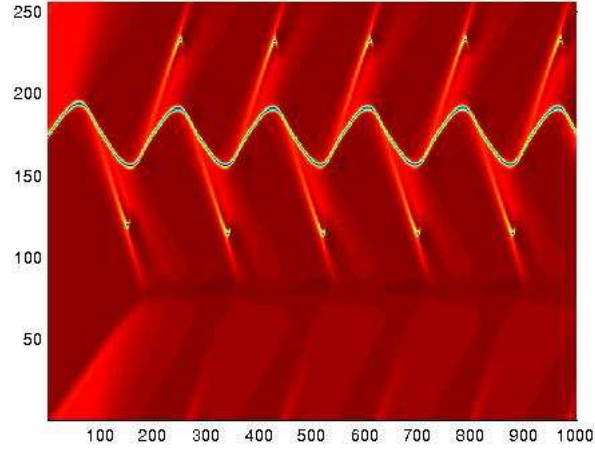


Figura 7.8: In figura vediamo la traiettoria oscillatoria di un difetto visualizzata tramite l'evoluzione temporale di $|A|$, in ascissa abbiamo il tempo e in ordinata la posizione del difetto

In questo approccio tratteremo il termine quintico come una perturbazione, cioè supporremo che valgano ancora le consuete leggi di scala e che i regimi dell'equazione rimangano invariati.

La nostra equazioni diventa quindi

$$\partial_t A = A + (1 + ib)\partial_x^2 A - (1 + ic)|A|^2 A + \delta |A|^4 A$$

Se adesso fissiamo, $b = 0.21$ e $c = 1.3$, abbiamo delle oscillazioni regolari come mostrato in [4]. Abbiamo studiato numericamente al variare del parametro $\delta < 0$ il periodo, i valori che si ottengono sono riportati in tabella (7.1).

Confronto con gli esperimenti

Se supponiamo che valgano le leggi di scala mostrate nel capitolo 2, possiamo riottenere dai tempi simulati i tempi “reali” usando la conversione:

$$t \rightarrow \tau_0 \frac{t}{|\epsilon|}$$

Valore di δ	Periodo	Periodo in secondi
-0.01	1	63 sec
-0.007	1.39	88 sec
-0.005	1.7	107.1 sec
-0.0025	2.4	151.2 sec
-0.0001	3.9	245.7 sec

Tabella 7.1: Relazione tra δ e il periodo dell'oscillazione. Il periodo è stato misurato usando come unità di misura il periodo ottenuto per $\delta = -0.01$, che equivale a 180 istanti di tempo simulato

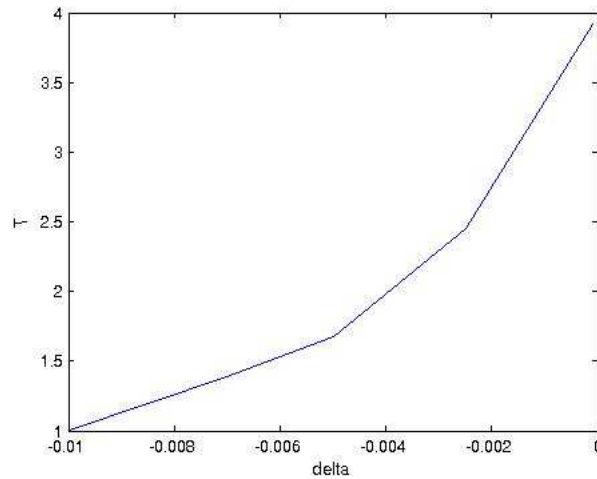


Figura 7.9: Grafico dell'andamento del periodo in funzione di δ

per un cristallo liquido (MBBA) a temperatura $T = 23,4\text{ }^{\circ}\text{C}$

$$\tau_0 \sim 0.056\text{sec}$$

dall'esperimento illustrato nel capitolo 5 $\epsilon = 0.160$, questo porta a un fattore di conversione di 0.35 è il fattore per cui dobbiamo moltiplicare i periodi per ottenere i tempi in secondi mostrati in tabella (7.1).

Questo indica che le oscillazioni sono dello stesso ordine di grandezza di quelle misurate, tuttavia prima di poter dire che questo modello può rappresentare il fenomeno in questione, si dovrebbero eseguire degli esperimenti volti a misurare il coefficiente δ .

Inoltre per quanto visto nel capitolo 5, per sua natura stessa il fenomeno è bidimensionale, dato che le oscillazioni avvengono in entrambe le direzioni, quindi questa può essere una spiegazione soltanto parziale.

7.3 Equazione reale di Landau-Ginzburg bidimensionale

La RGL è l'equazione utilizzata "classicamente" nella descrizione delle *instabilità* I_s , in particolare è stata impiegata con successo nella descrizione della RBC (nella sua versione per sistemi isotropi) e nella EHC nella versione da noi studiata.

Noi abbiamo eseguito delle simulazioni dell'equazione di Landau-Ginzburg reale

$$\partial_t A = A + \xi_x^2 \partial_x^2 A + \xi_y^2 \partial_y^2 A - |A|^2 A$$

su un dominio quadrato di lato $L = 100$ e $\xi_x = 3$ e $\xi_y = 1$ su un reticolo di $N = 128 * 128$ punti, con discretizzazione temporale $dt = 0.1$ e con un $k_c = 2$. Le condizioni al contorno sono periodiche e mentre quelle iniziali random.

Come abbiamo visto precedentemente, il campo fisico, secondo "l'espansione debolmente non lineare", è

$$U \propto e^{ik_c x} A + c.c.$$

Come si vede la RGL può spiegare un processo di annichilazione tra 2 difetti topologici di carica opposta come mostrato in figura (7.13); più avanti in questo capitolo ci occuperemo di studiare più approfonditamente la forma dell'interazione.

Tuttavia i difetti, in questa equazione possono apparire solo come un transiente, infatti il sistema non è in grado di produrre le fluttuazioni necessarie alla loro nascita, quindi per spiegare fenomeni come la continua creazione e annichilazione di difetti si deve far ricorso alla CGL che manifesta fenomeni di "*chaos spazio-temporale*".

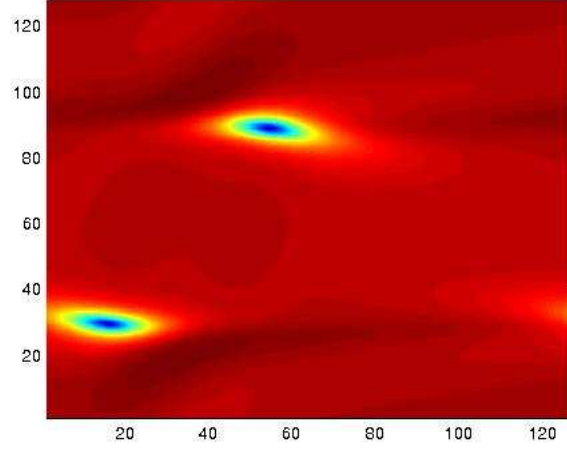


Figura 7.10: Foto di $|A|$ in cui si possono notare due difetti topologici

7.4 Equazione complessa di Landau-Ginzburg bidimensionale

L'equazione complessa di Landau-Ginzburg può essere vista come la più semplice estensione della RGL che consenta modulazione al pattern portante nello spazio e nel tempo.

$$\partial_t A = A + (1 + ib)(\xi_x^2 \partial_x^2 A + \xi_y^2 \partial_y^2 A) - (1 + ic) |A|^2 A$$

Noi la utilizzeremo come equazione di ampiezza per i pattern non stazionari, sebbene, rigorosamente parlando, per descrivere pattern oscillatori nello spazio e nel tempo avremmo dovuto usare le equazioni (2.29) e (2.30).

Tuttavia abbiamo ipotizzato, per motivi di semplicità, di studiare un regime chiamato “single mode” $g_1 > 1$ in cui una delle due equazioni viene “soppressa” e l'equazione che descrive l'evoluzione del pattern è una CGL.

In opposizione al regime “single mode” abbiamo un regime chiamato “bimodale” in cui entrambe le equazioni di ampiezza hanno un ordine di grandezza paragonabile e in cui dobbiamo realmente far uso dell'equazione di ampiezza I_0 .

In questo senso, questa tesi può essere considerata come uno studio feno-

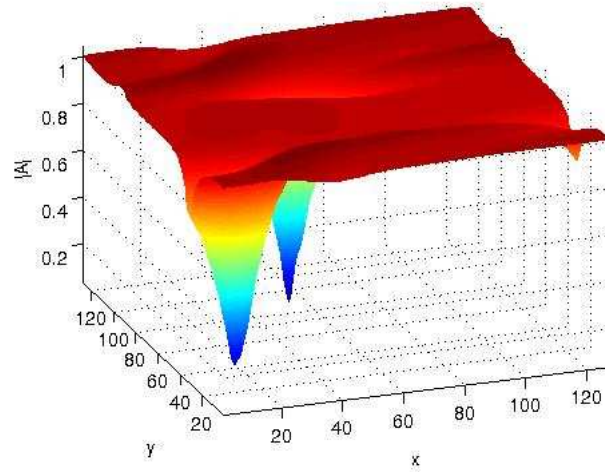


Figura 7.11: Disegno raffigurante il $|A|$ che evidenzia la presenza di due difetti

menologico della CGL come un'equazione di ampiezza, che estende la RGL mantenendone però gli aspetti basilari.

Noi ci siamo concentrati principalmente sullo studio dei difetti e sul loro moto nella CGL, quindi illustreremo nei paragrafi successivi i metodi e gli algoritmi che ci hanno consentito di studiare tale comportamento.

Una differenza sostanziale tra i difetti topologici della RGL e della CGL sta nel fatto che nella RGL i difetti hanno la forma di “vortici” mentre nella CGL prendono la forma di “spirali” (cap 4), noi tuttavia siamo interessati a degli oggetti di topologia non banale, quindi questa differenza non cambia la maggior parte delle considerazioni da noi fatte.

Identificazione dei difetti

Per misurare la traiettoria dei difetti è stato impiegato un algoritmo che provveda al loro riconoscimento e alla loro identificazione nel corso dell'evoluzione temporale.

Un sistema, in cui sono presenti dei difetti, appare, se osserviamo $|A|$, come mostrato in figura (7.10), ossia una sorta di “sfondo” piatto in cui sono presenti delle voragini.

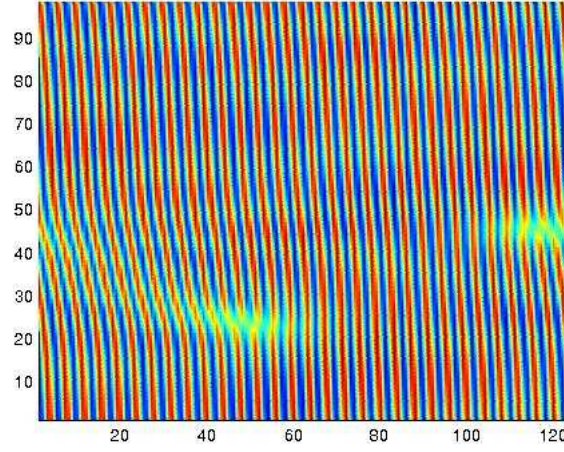


Figura 7.12: Pattern con $k_c = 2$ ottenuti disegnando U in cui si nota la presenza di due difetti

Per riconoscere tali strutture è stata impiegata una funzione che identifica oggetti formati da almeno 4 pixel¹. In questo modo è stato possibile trovare a ogni istante la posizione dei difetti sullo schermo e contare il loro numero. Tuttavia il problema di determinare l'identità di un singolo difetto, durante la sua evoluzione temporale, è in linea di principio irrisolvibile senza fare l'ipotesi che la velocità di ciascuno sia minore di una certa soglia; tale soglia è stata determinata empiricamente attraverso l'osservazione e il test dell'algoritmo. L'errore di misura della posizione di questo algoritmo, se adeguatamente correlato a osservazioni, è stato ridotto alla sola dimensione del nucleo del difetto che come visto prima dipende dalle lunghezze di correlazione.

La forma del nucleo è quella mostrata in (2.19) e in figura (7.14) possiamo vedere il suo "profilo" ; la dimensione del nucleo è dell'ordine della lunghezza di correlazione (per la stima dell'ordine di grandezza del nucleo dei difetti nella CGL questa formula può essere ritenuta comunque valida).

Quindi supporremo che l'errore dell'algoritmo sia doppio della lunghezza di correlazione più grande $\pm 2\xi_x \cong \pm 6$.

L'errore nel conteggio del numero dei difetti dell'algoritmo è difficile da sti-

¹Questo algoritmo è basato sulla funzione "bwlabel" implementata in Matlab

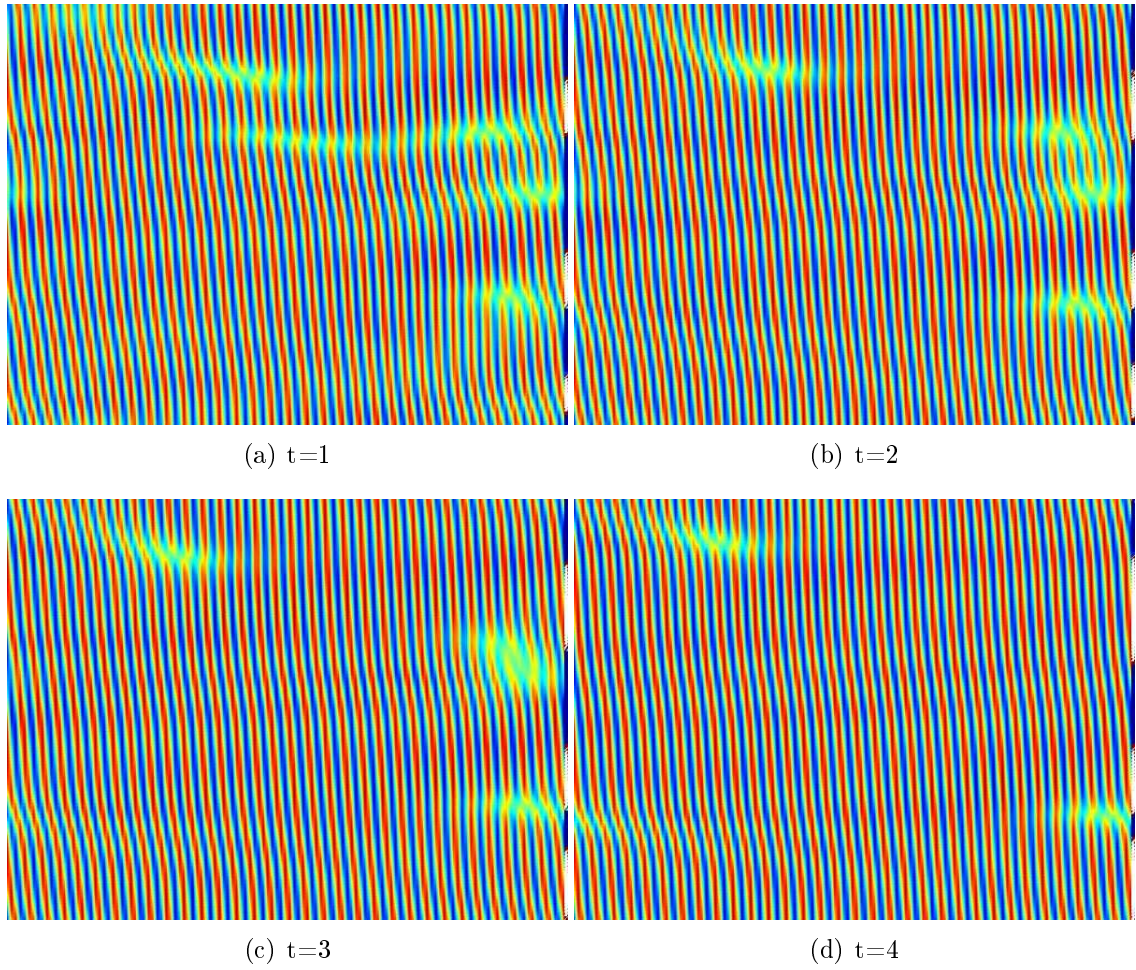


Figura 7.13: Interazione tra difetti topologici di carica opposta nella RGL

mare possiamo supporre che gli unici errori derivino dal conteggio di coppie di difetti che stanno per annichilirsi o che sono appena state nucleate, in questo caso possiamo supporre tuttavia che questo fenomeno non avvenga per più di tre coppie alla volta quindi possiamo stimare un errore di conteggio dei difetti ± 3 .

Condizioni iniziali

Nello studio numerico di un'equazione come la CGL è molto importante scegliere le *condizioni iniziali* da cui il nostro sistema evolve.

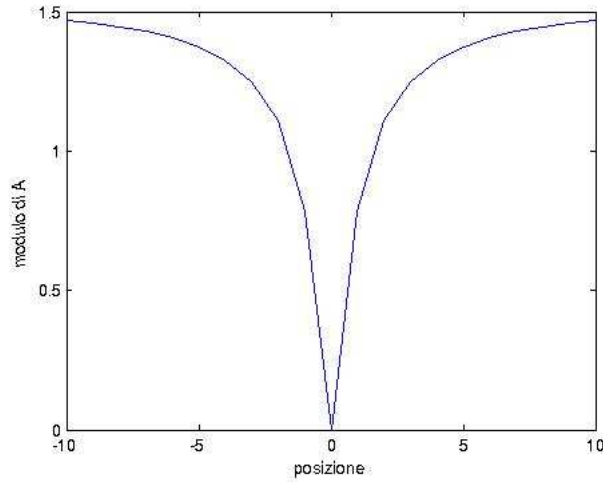


Figura 7.14: Immagine raffigurante il profilo di un difetto nell'equazione reale con $\xi_x = 1$

Infatti per studiare le interazioni è necessario selezionare una condizione iniziale che porti alla nascita di pochi difetti. In caso contrario il moto di ciascun difetto risentirà eccessivamente delle interazioni con i difetti circostanti e sarà molto difficile prendere misure significative.

Per selezionare delle condizioni iniziali ottimali esistono dei criteri di massima che possono essere generalizzati per creare il numero desiderato di dislocazioni.

Se ad esempio vogliamo creare un difetto topologico, possiamo fare in modo tale da imporre una condizione iniziale che generi un “salto di fase” di 2π ; al centro di questo salto di fase il sistema, per coerenza, evolverà in pochi istanti in un difetto topologico di carica unitaria.

Per fare questo possiamo, ad esempio, selezionare le condizioni iniziali nella seguente maniera: dividiamo la matrice iniziale in 4 quadranti e in ogni quadrante assegniamo i seguenti valori costanti come mostrato in figura (7.15) e in tabella (7.2):

Questo meccanismo può essere generalizzato per generare due difetti: dividiamo la matrice come mostrato in tabella (7.3)

Tuttavia questi metodi non danno i risultati desiderati se si stanno utilizzando

$\text{Re}(A)=0, \text{Im}(A)=1$	$\text{Re}(A)=1, \text{Im}(A)=0$
$\text{Re}(A)=-1, \text{Im}(A)=0$	$\text{Re}(A)=0, \text{Im}(A)=-1$

Tabella 7.2: Condizioni iniziali che favoriscono la nascita di un difetto topologico

$\text{Re}(A)=0, \text{Im}(A)=1$	$\text{Re}(A)=1, \text{Im}(A)=0$	$\text{Re}(A)=0, \text{Im}(A)=1$
$\text{Re}(A)=-1, \text{Im}(A)=0$	$\text{Re}(A)=0, \text{Im}(A)=-1$	$\text{Re}(A)=-1, \text{Im}(A)=0$

Tabella 7.3: Condizioni iniziali che favoriscono la nascita di due difetti topologici

do condizioni al contorno periodiche: infatti con tali condizioni il “campione” è come prolungato periodicamente “infinite volte” e quindi vicino ai bordi si vengono a creare delle discontinuità che danno origine a nuovi difetti; si avrà quindi un difetto “indesiderato” per ogni lato del “campione”.

Utilizzando delle condizioni di raccordo è comunque possibile salvare in parte questo metodo e utilizzare queste condizioni iniziali per studiare l’interazione tra due o più difetti.

Tuttavia studiare un singolo difetto in un sistema con condizioni al contorno periodiche è impossibile a causa conservazione della fase, che impone che i difetti compaiano in coppie.

Per altri tipi di condizioni iniziali quali le condizioni “no flux” o condizioni nulle ai bordi, questi metodi funzionano come sopra esposti².

7.5 Moto delle dislocazioni nella RGL e nella CGL

Come abbiamo già visto, le evoluzioni temporali delle equazioni RGL e CGL sono qualitativamente molto diverse: la RGL ammette una funzione di Lyapunov e quindi la sua evoluzione è di rilassamento verso un punto di minimo,

²L’unico accorgimento da prendere è l’aggiunta di un rumore di tipo random che impedisca al nostro algoritmo di divergere a causa delle repentine discontinuità sui bordi delle zone

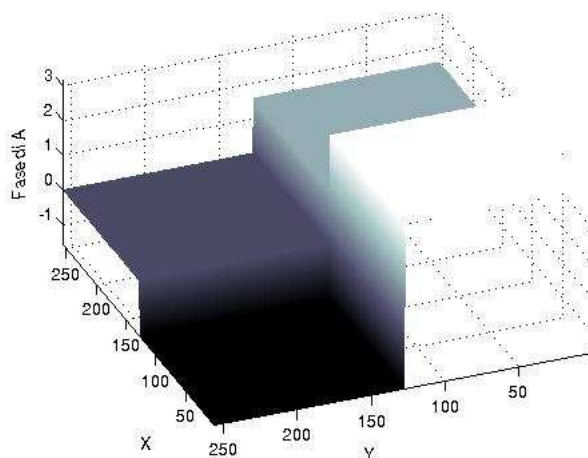


Figura 7.15: Disegno della *fase* utilizzata per generare un difetto

mentre per la CGL una tale funzione non esiste quindi la sua evoluzione sarà in generale più complicata.

E' naturale aspettarsi, con questi presupposti, che anche la dinamica delle strutture coerenti presenti in queste equazioni sia molto diversa e quindi lo scopo che ci proponiamo in questo capitolo è quello di studiare le interazioni e i moti dei difetti nelle due equazioni per vari regimi.

7.5.1 Interazione dei difetti nella RGL

Come abbiamo visto precedentemente, la RGL può spiegare l'interazione e l'annichilazione di due difetti topologici; per studiare tale interazione noi abbiamo seguito la traiettoria di due coppie di difetti che interagiscono fino ad annichilirsi.

La teoria esposta nel capitolo 3 ci dice che due difetti topologici che interagiscono dovrebbero, da prima avvicinarsi a velocità costante fino a una distanza dell'ordine di $d \sim \frac{1}{v}$ (dove v è la velocità del difetto); sotto questa distanza l'interazione dovrebbe diventare della forma $\frac{1}{d}$.

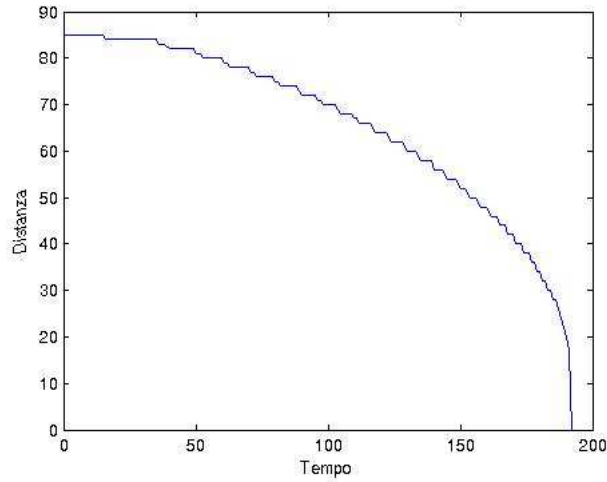


Figura 7.16: Distanza al variare del tempo di due difetti che si annichilano nella RGL

7.5.2 Fit analitici

Abbiamo provato a verificare per il caso $b = c = 0$ (RGL), tramite dei fit analitici, la validità delle relazioni esposte nel cap 3; secondo la teoria il moto dovrebbe essere uniforme fino a che la distanza tra i due difetti non è dell'ordine di $d \sim \frac{1}{v}$.

Fino a tale distanza la forma della legge oraria sarà del tipo

$$d = vt + d_0$$

dai fit analitici abbiamo che $v = -0.3 \pm 0.01$ e $d_0 = 127 \pm 1$; da questi risultati si ricava la distanza a cui si deve sentire l'interazione è $\frac{2}{v} \sim 7$.

<i>Distanza</i>	<i>Parametri</i>	<i>Chi - quadro - ridotto</i>
$d \gg \frac{1}{v}$	$v = -0.3 \pm 0.01$ e $d_0 = 127 \pm 1$	1.2
$d \ll \frac{1}{v}$	$a = 11.2 \pm 0.3$	0.95

Tabella 7.4: Tabella dei coefficienti ottenuti dai fit analitici

Per distanze minori di $\frac{1}{v}$ l'interazione è stata considerata della forma $\frac{1}{d}$, da cui abbiamo la legge oraria risolvendo l'equazione $\dot{d} = -\frac{a}{d}$ che conduce a $d = \sqrt{d_1 - 2at}$, con d_1 costante arbitraria.

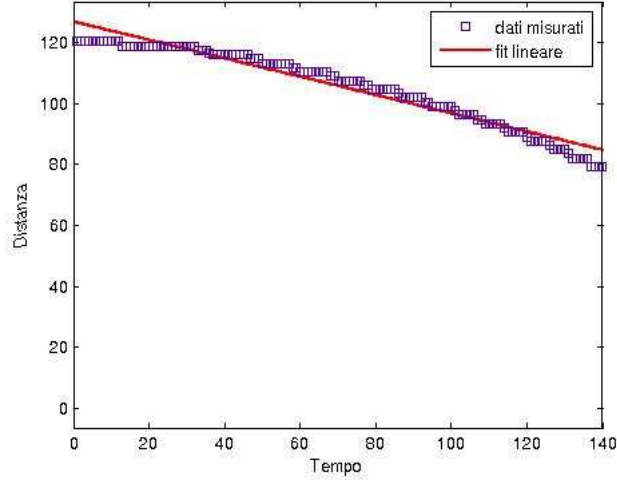


Figura 7.17: Fit analitico della distanza tra due difetti al variare del tempo $d \gg \frac{1}{v}$

Se adesso, per eseguire il fit analitico, imponiamo che d sia uguale a zero al tempo 193, istante in cui i due difetti si annichilano, abbiamo che la legge oraria diventa

$$d = a\sqrt{193 - t}$$

da cui eseguendo un fit rispetto al parametro a , abbiamo che $a = 11.2 \pm 0.3$. Questi dati mostrano un buon accordo tra la teoria e le simulazioni.

7.5.3 Interazione di difetti nella CGL

Per valori b e c generici il moto dei difetti può essere molto vario; riassumiamo i principali comportamenti con un schema:

- zona “Bejamin-Feir” instabile $1 + bc \leq 0$

In questo regime la nucleazione di nuovi difetti avviene in maniera continua e studiare il moto di un solo difetto non è possibile perché il sistema genera e distrugge continuamente nuove dislocazioni.

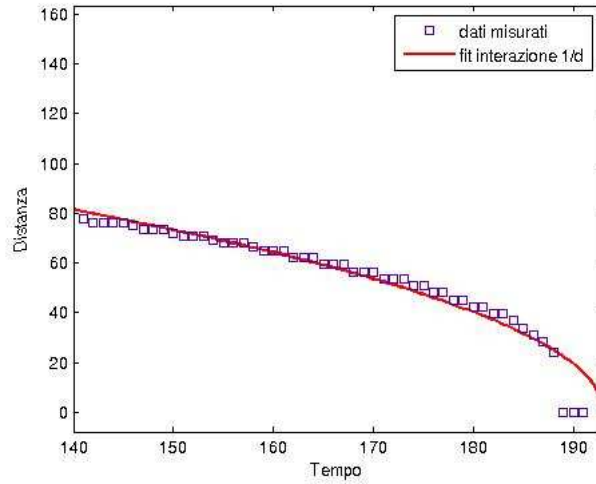


Figura 7.18: Fit analitico della distanza tra due difetti al variare del tempo $d \ll \frac{1}{v}$

- zona “Benjamin-Feir” stabile $1 + bc > 0$

Questa zona può a sua volta essere divisa in due sottozone: “intermittenza spazio temporale” e “no chaos”.

Nella prima si verificano comportamenti debolmente caotici; quindi si possono creare, a seconda delle condizioni iniziali, anche numerosi difetti. Quindi abbiamo gli stessi problemi che avevamo nel regime “Benjamin-Feir” instabile. Invece nella zona “no chaos”, il tasso di nucleazione dei difetti è nullo e quindi studi sul loro moto sono possibili.

Anche in tale zona, tuttavia, il moto può essere molto vario:

- in una zona detta “regime oscillatorio” i difetti stazionari sono instabili nei confronti di accelerazioni e il loro moto è una spirale per valori di $b \sim 7$ come mostrato in cap 4 e riassunto in figura (4.6).
- lungo la curva $b = c$ il moto torna a essere descritto da una funzione di Lyapunov quindi ci aspettiamo che il comportamento del sistema sia analogo a quello della RGL, tuttavia, come vedremo anche in questo caso ci sono delle differenze.

- in altre zone il moto e' di origine più complicata ed e' fortemente influenzato dalla disposizione delle strutture elencate nel capitolo 4

Questa varietà di moti illustra quanto sia difficile ottenere delle misure significative dell'interazione nelle varie zone della CGL, per questo motivo ci siamo limitati qui a dare una breve descrizione euristica di alcuni tra i comportamenti più comuni.

7.5.4 Interazione di difetti nella CGL per $b = c$

La dinamica della CGL per $b = c$ è regolata dalla funzione di Lyapunov che svolge il ruolo di potenziale. In questo caso ci aspettiamo quindi che la dinamica non sia qualitativamente troppo diversa da quella della RGL.

La [4] mostra che in questo caso la formula (3.11) può essere generalizzata a

$$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \ln \left[\frac{(1+b^2)v_0}{|v|} \right] = U \left[(1+b^2) \vec{Q} + \frac{b}{2} \vec{v} \right] \quad (7.2)$$

in cui abbiamo utilizzato i simboli del capitolo 3 (ricordiamo che U è una rotazione di $\frac{\pi}{2}$). Si nota che il termine $\frac{b}{2} \vec{v}$ aggiunge un contributo tangenziale alla velocità, questo si manifesta nel fatto che due difetti non si incontreranno lungo la congiungente delle loro traiettorie come mostrato in figura (7.19) e in generale tenderanno ad annichilirsi spiraleggiando (7.21) .

7.5.5 Numero dei difetti topologici al variare dei parametri b e c

Adesso osserveremo alcuni regimi della CGL e studieremo come varia il numero di difetti che si vengono a creare partendo da condizioni iniziali random.

Il numero di difetti che si vengono a creare sembra in questo caso una proprietà del sistema in esame piu' che di una configurazione iniziale.

Le dimensioni del sistema da noi studiato sono $L = 200$, $N = 256$ e con discretizzazione temporale $dt = 0.1$

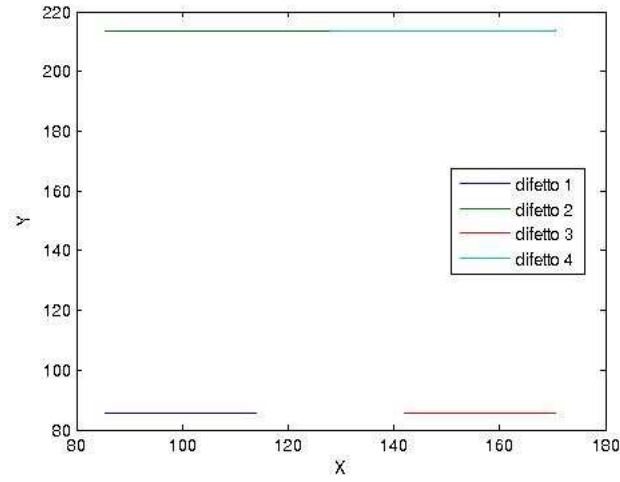
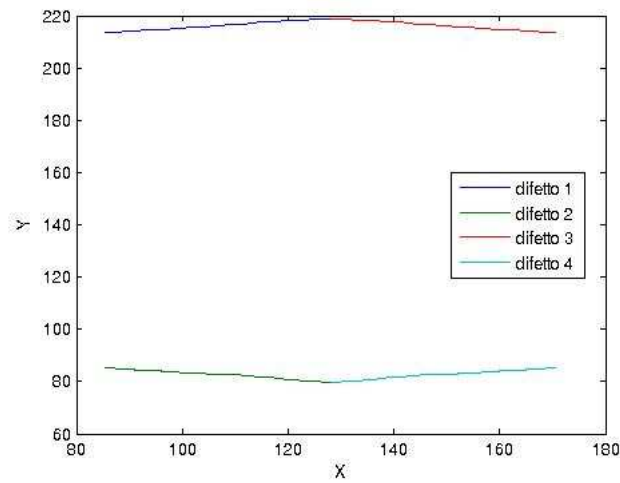
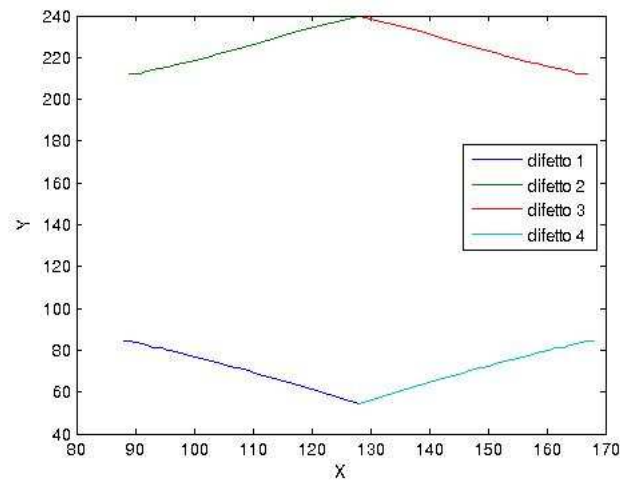
(a) $b=c=0$ (b) $b=c=1$ (c) $b=c=6$

Figura 7.19: Traiettorie di alcuni difetti nella CGL 2D al variare di $b = c$, le figure evidenziano un incremento proporzionale a $b = c$ della “curvatura” in accordo con la (7.2)

Regime $bc + 1 > 0$

In questo regime il comportamento tipico del sistema è che i difetti tendono a scomparire come mostrato in figura (7.22), tuttavia esiste un regime intermedio che prende il nome di “intermittenza spazio-temporale” (figura (7.1)) in cui è possibile avere continua nucleazione e annichilazione di difetti. Tale regime dal punto di vista della nucleazione di nuovi difetti può essere considerato al pari del regime $1 + bc \leq 0$

Regime $bc + 1 \leq 0$

In questo regime si può considerare che la “rate” di nucleazione sia costante e che la “rate” di annichilazione sia proporzionale alla densità di difetti.

In pratica possiamo cercare una relazione che descriva il numero $n(t)$ di difetti al variare del tempo nella seguente maniera

$$\frac{dn(t)}{dt} = c - kn(t) \quad (7.3)$$

dove c è la rate di nucleazione e k è il coefficiente di annichilazione per numero di difetti.

Integrando la (7.3)

$$n(t) = Ae^{-kt} + \frac{c}{k}$$

se poi imponiamo che al tempo zero non ci siano difetti, come nelle nostre simulazioni, abbiamo che

$$n(t) = \frac{c}{k}(e^{-kt} - 1) \quad (7.4)$$

Verifica del modello

Nella zona “Benjamin-Feir” stabile $1 + bc > 0$, sufficientemente lontano “dall’intermittenza spazio-temporale” abbiamo un decadimento di tipo esponenziale del numero dei difetti, dato che la “rate” di nucleazione è nulla.

$$\frac{dn(t)}{dt} = -kn(t)$$

risolvendo questa equazione abbiamo che

$$n(t) = Ze^{-kt} \quad (7.5)$$

dai fit notiamo un buon accordo tra questo “toy model” e l’equazione dove Z è una costante arbitraria.

parametri dell’equazione	Z	k	$Chi - quadro - ridotto$
$b = 1, c = 0$	13.3 ± 0.9	0.038 ± 0.003	1.3
$b = 1, c = 2$	13.1 ± 1	0.037 ± 0.004	1.83
$b = 2, c = 2$	14.6 ± 1	0.048 ± 0.004	1.35

Tabella 7.5: Parametri estratti dai fit analitici

Fuori dalla zona “Benjamin-Feir stabile” l’equazione che descrive il nostro fenomeno è la (7.4).

La curva che usiamo per eseguire il fit dei dati

$$n(t) = a(1 - e^{-kx})$$

<i>Parametri dell’equazione</i>	a	k	$Chi - quadro - ridotto$
$b = -1, c = 1$	53 ± 1	0.05 ± 0.005	4.5
$b = -2, c = 1$	60 ± 1	0.14 ± 0.02	3.7
$b = -1, c = 2$	102 ± 2	0.28 ± 0.05	6.4

Tabella 7.6: Tabella che mostra i dati dei fit in funzione dei parametri dell’equazione

Da questi fit è chiaro che il nostro modello può solo spiegare l’ordine di grandezza e l’andamento del numero di difetti al variare del tempo. Questo probabilmente può essere ricondotto al fatto che scrivendo la (7.3) abbiamo implicitamente considerato che l’unico fattore che interviene nella annichilazione è la densità di difetti. Come sappiamo tuttavia i difetti interagiscono in maniera complicata e in alcuni regimi possono formare addirittura coppie legate.

7.6 Regime di intermittenza spazio temporale

Il regime chiamato “intermittenza spazio-temporale” è una fase intermedia rispetto alla “turbolenza mediata da difetti” e al regime in cui non si manifesta “chaos”.

Infatti in questa fase è possibile, a seconda della condizione iniziale, sia osservare un comportamento di tipo “turbolenza mediata da difetti” che un comportamento in cui non compare nessun tipo di chaos.

Il comportamento turbolento in questa fase sembra essere però “più ordinato”: infatti è possibile notare una sorta di ordinamento spaziale dei difetti che sembrano “vibrare” nell’intorno di una posizione di equilibrio.

In questo regime l’algoritmo precedentemente utilizzato per determinare la posizione dei difetti non è sufficientemente affidabile a causa dell’elevata quantità di strutture presenti nel campione, come mostrato in figura (7.26).

Abbiamo applicato un semplice metodo per verificare questa ipotesi: abbiamo selezionato una piccola regione di un’immagine contenente un difetto, e abbiamo calcolato la sua intensità; seguendo l’evoluzione temporale dell’intensità di questo piccolo campione si può evidenziare un’eventuale moto periodico che corrisponde a una variazione di intensità periodica.

La dimensione del campione deve essere scelta in modo da essere più grande del nucleo del difetto e molto minore dell’intero sistema.

A questo punto se il sistema oscilla con una frequenza propria anche l’intensità media di questa regione dovrà anche lei avere la medesima periodicità. Per rendere più evidente questo fenomeno abbiamo eseguito le trasformate di Fourier di queste intensità in modo da capire quali siano le frequenze di oscillazione del sistema.

Come possiamo vedere dalle figure (7.28) tutte le frequenze hanno un picco verso un determinato valore, con una piccola banda di frequenze ammesse circostanti, questo indica una tendenza del sistema ad avere delle frequenze proprie di oscillazione.

Tuttavia a causa tempi di computazione molto lunghi non è stato possibile fare ulteriori misurazioni, per verificare la vera periodicità di questo feno-

meno, infatti sono necessarie sequenze dati molto lunghe con una precisione elevata.

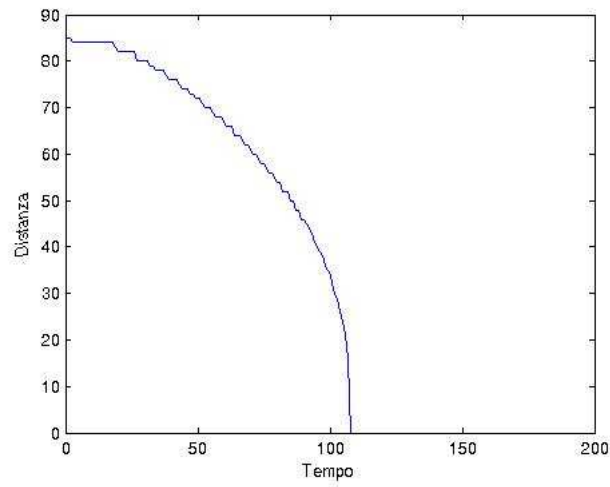
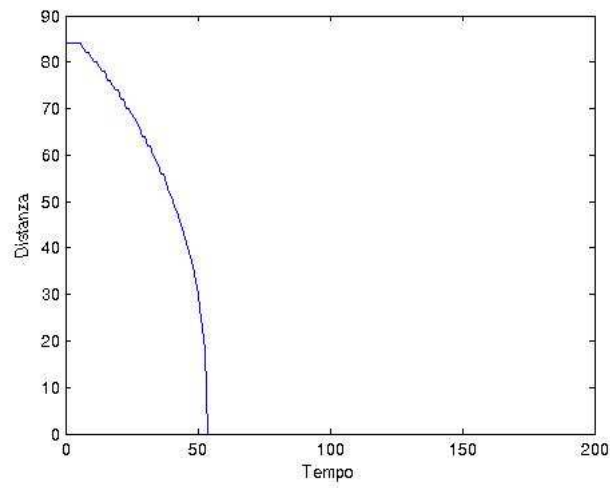
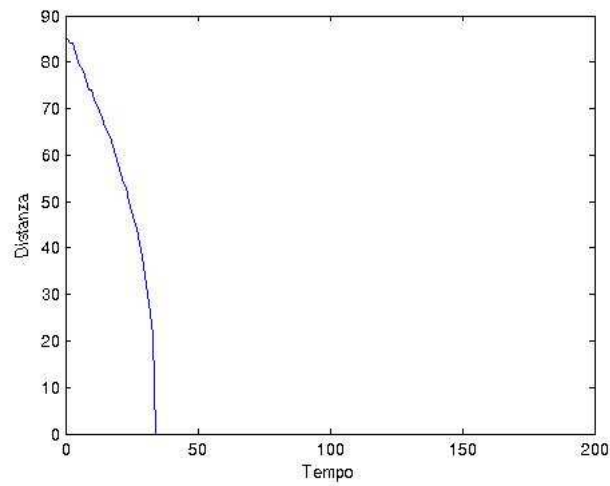
(a) $b=c=1$ (b) $b=c=2$ (c) $b=c=3$

Figura 7.20: Distanze di una coppia di difetti difetti interagenti al variare del tempo nella CGL 2D con $b = c$

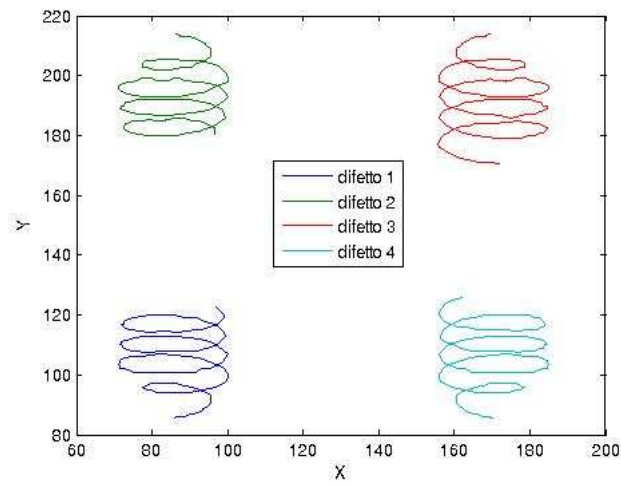


Figura 7.21: Traiettorie di quattro difetti nella CGL per $b = 2, c = 0$

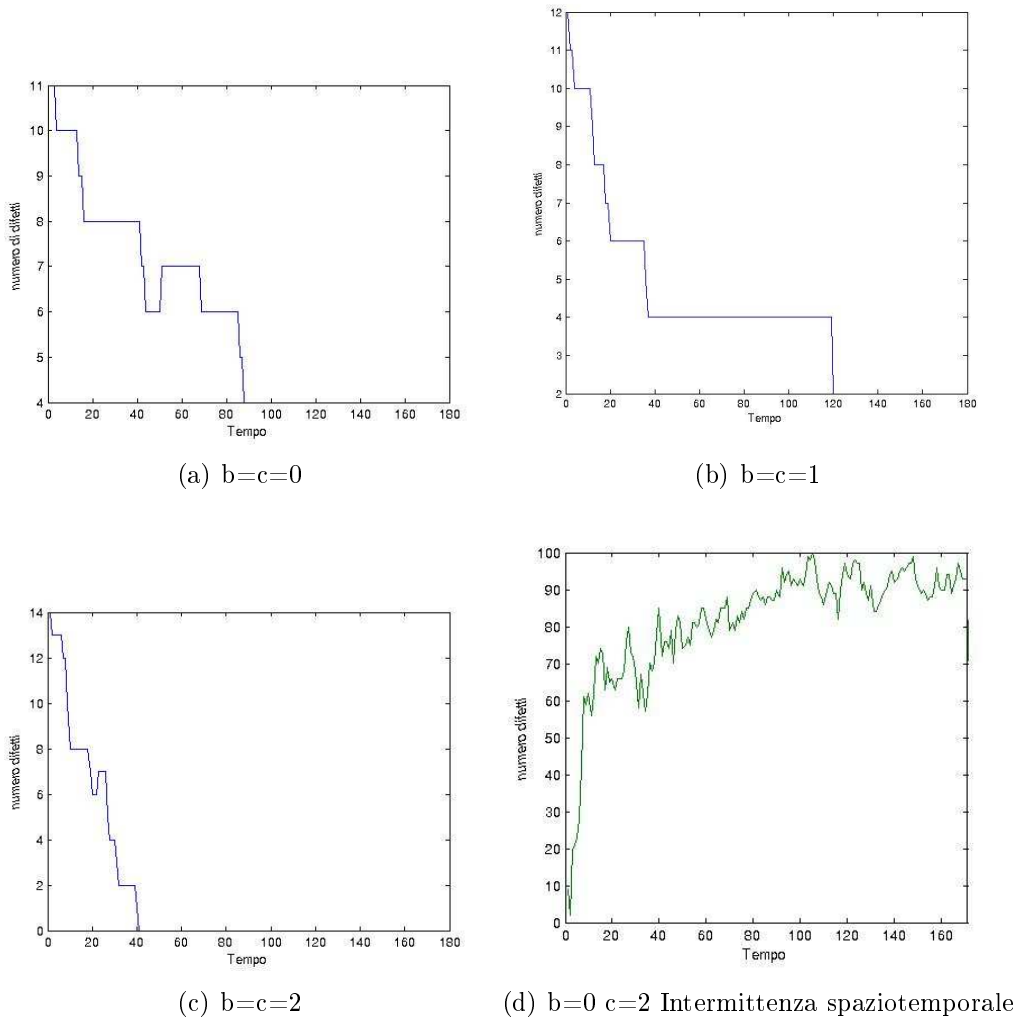


Figura 7.22: Numero di difetti al variare del tempo nel regime di Benjamin-Feir $1 + bc > 0$

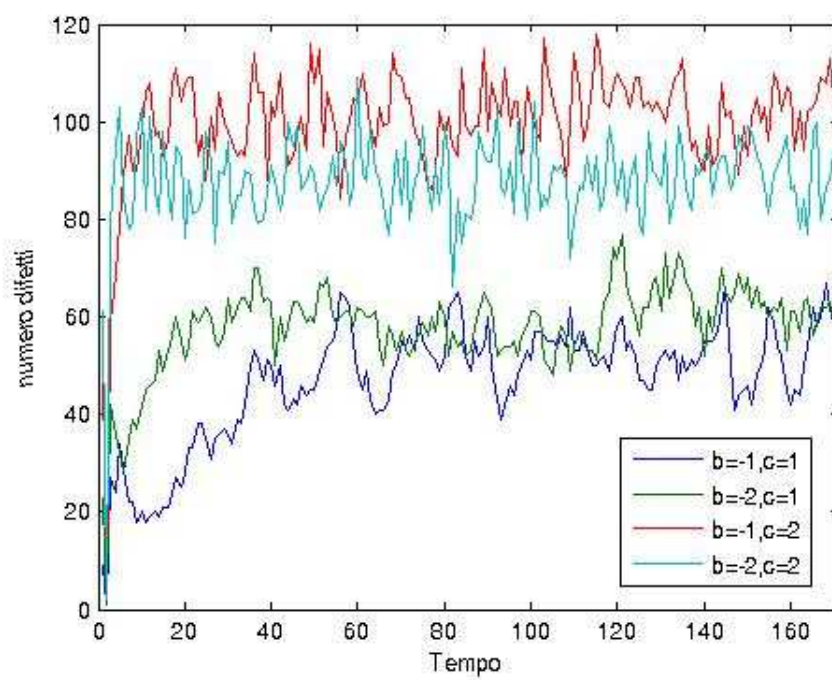


Figura 7.23: Difetti al variare del tempo partendo da condizioni iniziali random al variare di b e c

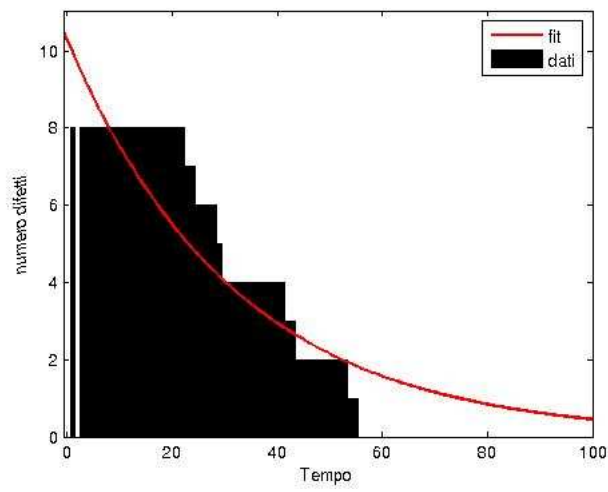
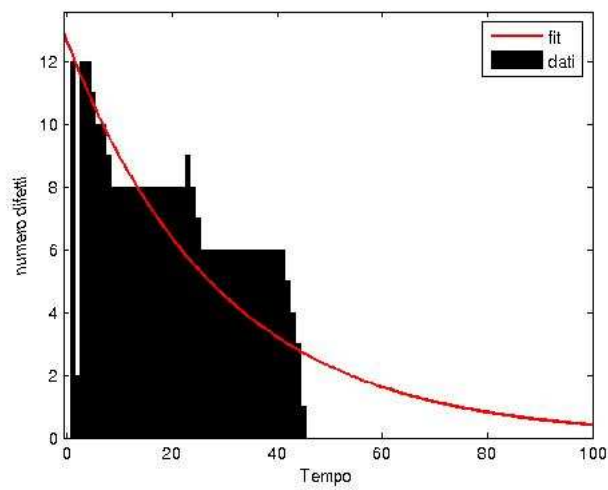
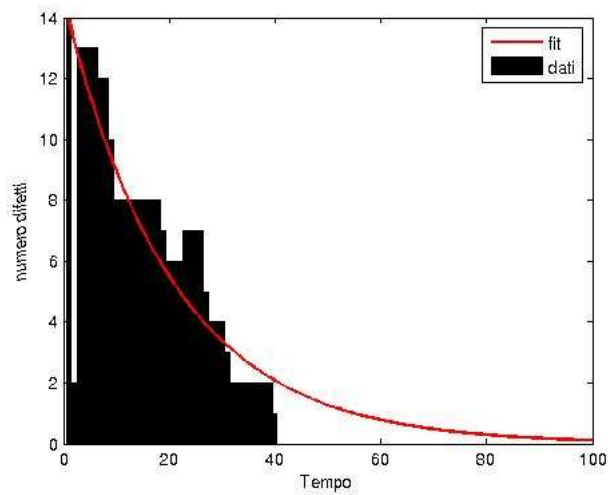
(a) $b=1, c=0$ (b) $b=2, c=1$ (c) $b=2, c=2$

Figura 7.24: Fit del numero di difetti in funzione del tempo

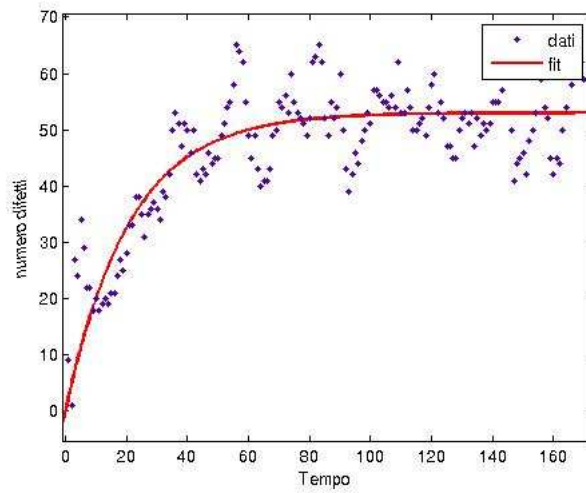
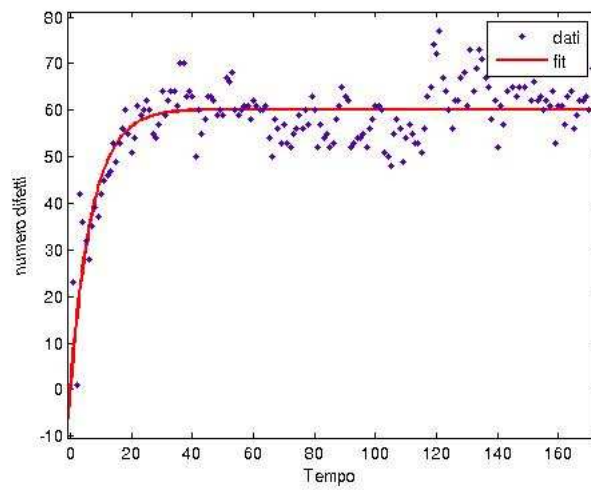
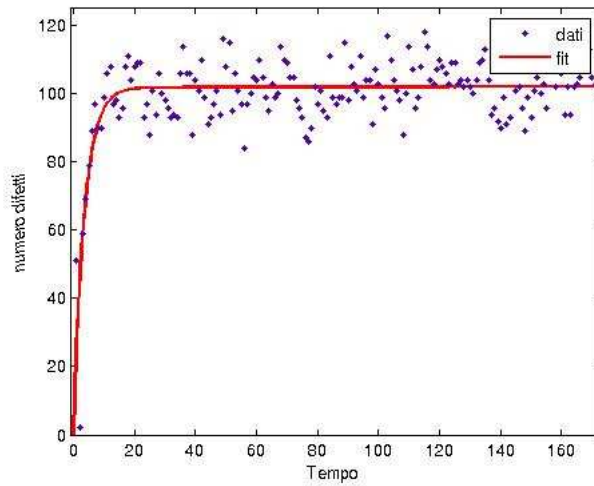
(a) $b=-1, c=1$ (b) $b=-2, c=1$ (c) $b=-1, c=2$

Figura 7.25: Difetti nel regime Benjamin-Feir instabile

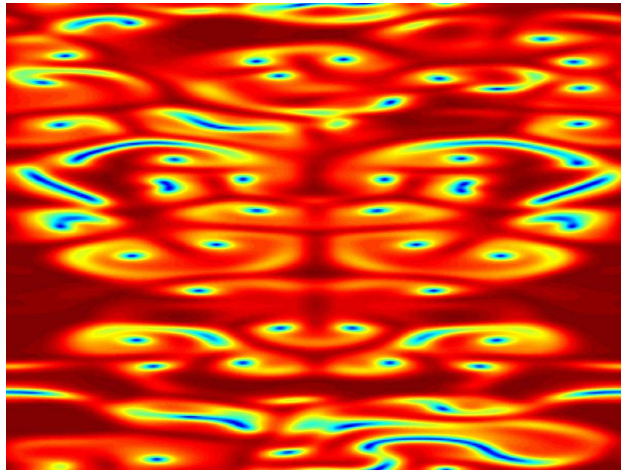


Figura 7.26: Immagine $|A|$ nel regime di “intermittenza spazio-temporale”, in figura si notano vari difetti, le strutture “allungate” sono coppie di difetti che stanno nascendo o che si stanno elidendo

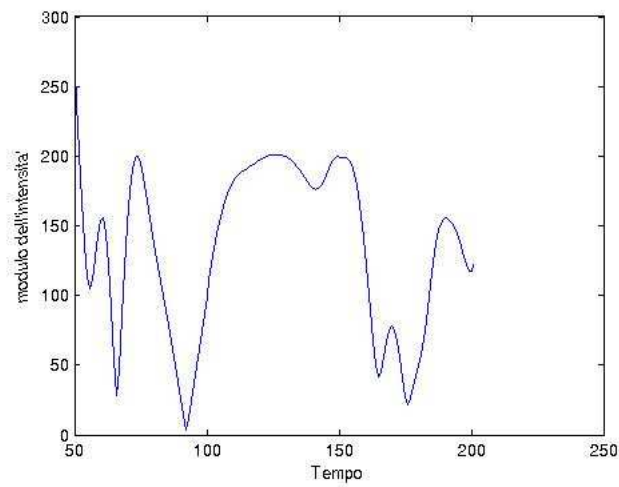
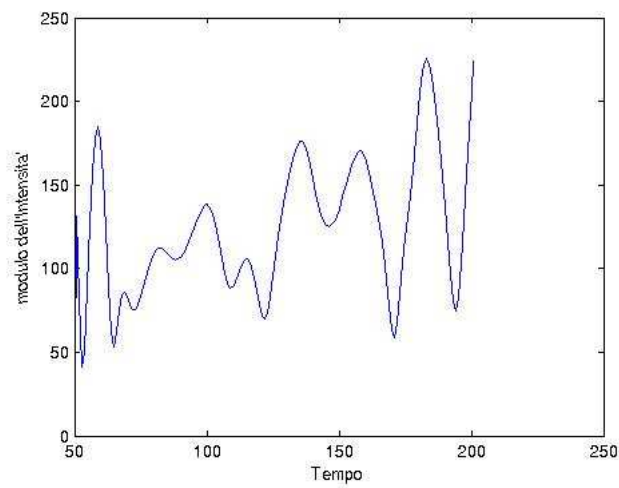
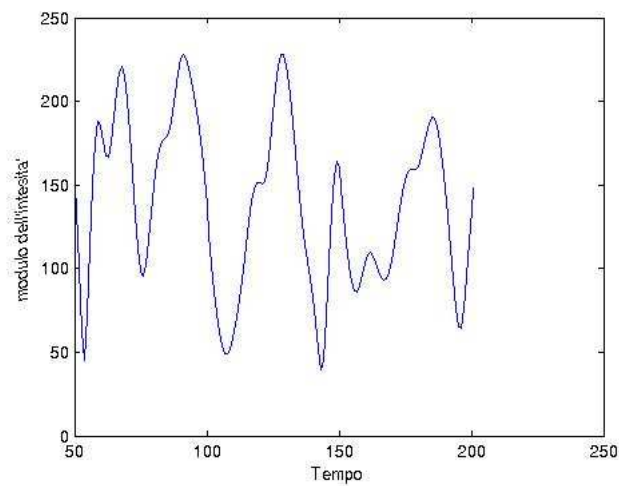
(a) $c=2.1$ $b=0.1$ (b) $c=2.1$ $b=0$ (c) $c=2.3$ $b=0$

Figura 7.27: Intensità di una regione scelta al variare del tempo

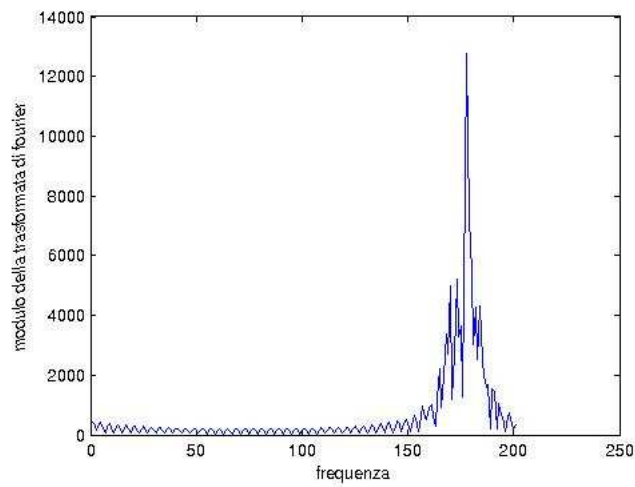
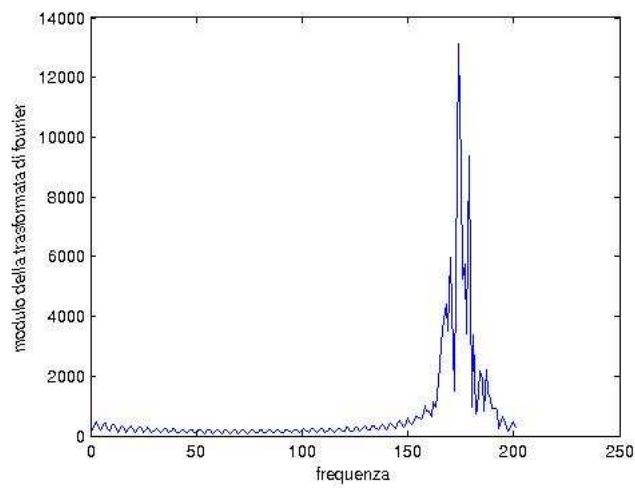
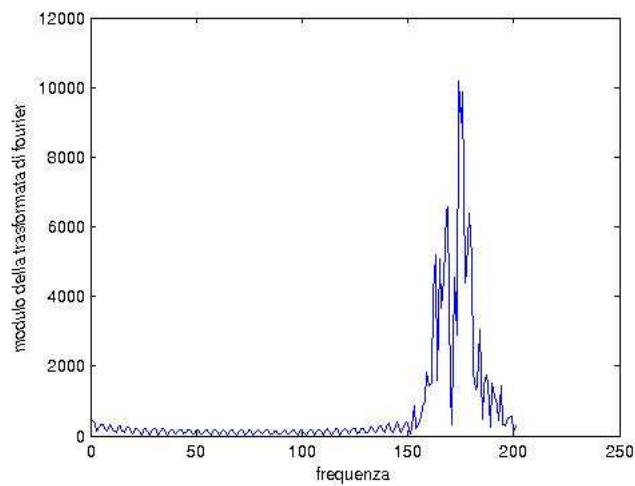
(a) $c=2.1$ $b=0$ (b) $c=2.1$ $b=0.1$ (c) $c=2.3$ $b=0$

Figura 7.28: Trasformata di Fourier temporale delle intensità

Conclusioni

In questo lavoro è stato mostrato un possibile tipo di modellazione di un sistema che esibisce pattern.

Questo approccio è estremamente semplificativo della dinamica e si basa sull'assunzione che vicino alla soglia della biforcazione esistano due scale che evolvono in maniera indipendente.

Questa assunzione dà buoni risultati in molti casi ma, come abbiamo visto, fallisce nella spiegazione degli effetti non “adiabatici” cioè degli effetti che accoppiano le due scale.

Tuttavia si deve tener conto che nel caso della EHC e della RBC le equazioni complete del fenomeno, oltre a non essere completamente note sono computazionalmente irrisolvibili, dato che tra esse compare l'equazione di “Navier Stokes”; da qui si comprende l'importanza di un approccio come quello dell'equazione di ampiezza, che anche se parziale, è uno dei pochi strumenti che, al momento, abbiamo per dare una descrizione di questi sistemi. Inoltre il significato di queste equazioni è probabilmente molto più profondo di quello attualmente compreso dato che sono praticamente universali nell'ambito della formazione di pattern.

Con questo approccio noi abbiamo tentato di spiegare alcuni fenomeni che avvengono nell'EHC prima cercando di capire quali comportamenti è in grado di spiegare la RGL e poi, per necessità, provando a “espandere” il nostro modello base includendo coefficienti complessi.

I benefici di introdurre questa equazione sono molteplici: infatti la CGL esprime una varietà di comportamenti superiori che meglio si adattano a descrivere comportamenti debolmente caotici come quelli mostrati dagli esperimenti

reali. Infatti uno dei problemi della RGL è che non ammette nucleazione di nuovi difetti se non come transiente per raggiungere uno stato più stabile.

Quindi uno dei primi risultati è stato quello di ottenere un'equazione che in un certo intervallo di valori potesse spiegare la creazione spontanea dei difetti da parte del sistema.

Tuttavia, così facendo, perdiamo la teoria semplice che avevamo nel caso della RGL che ammette una funzione di tipo potenziale.

La CGL manifesta infatti una grande varietà di comportamenti e noi ci siamo proposti di mostrarne solo alcuni e di analizzare il moto delle dislocazioni in alcune situazioni particolari in cui esiste una teoria con cui confrontare le osservazioni numeriche. Naturalmente tutto questo in un futuro dovrà essere suffragato da un intenso confronto con gli esperimenti, che aiuterà a comprendere quanto il moto delle dislocazioni nella CGL rispecchi il moto delle dislocazioni nei sistemi reali. Inoltre è necessario compiere uno studio approfondito delle equazioni in gioco per cercare di migliorare oltre che numericamente anche analiticamente la comprensione della CGL. Noi ci siamo in particolare concentrati sullo studio del numero di difetti nei vari regimi della CGL.

Lo studio numerico tuttavia, come è logico aspettarsi, presenta molte insidie ed è per questo un'arma a doppio taglio: osservare fenomeni al variare del parametro infatti non ci garantisce mai di aver studiato tutte le possibili aree del piano e soprattutto è possibile incorrere in fenomeni che si verificano solo per motivi numerici.

Un'ultima parola va spesa per spiegare la motivazione che ci ha portato a scegliere l'EHC come sistema di riferimento per studiare la formazione di pattern. Questo può essere spiegato dicendo ad esempio che dal punto di vista sperimentale questo sistema è economico e maneggevole, inoltre a causa della sua anisotropia è rappresentato da un'equazione "più semplice" di quella per sistemi isotropi e soprattutto è molto studiata in letteratura.

L'aspetto affascinante di questo argomento è che è possibile applicare questi studi in vari rami della scienza e quindi un eventuale fallimento di questa teoria nello spiegare uno specifico sistema si può manifestare come un lavoro

utile in un'altra ramo della scienza.

Ringraziamenti

Sarebbe impossibile ringraziare tutte le persone che nel corso di questi anni hanno contribuito alla mia formazione sia come uomo che come studente, quindi farò solo alcuni dei nomi delle persone che mi sono state più vicine in questi anni e che sono riuscite a sopportarmi. Debbo ringraziare innanzitutto i miei genitori e miei parenti più stretti che mi sono stati sempre vicini in questa mia avventura e poi tutti gli amici (vecchi e nuovi) che nel corso di questi anni mi hanno aiutato nelle mie decisioni: Francesco C. , Francesco B. , Francesco A., Matteo, Giulia, Michele, Marco, Alice, Luca, Alessandro e in fine Roberta, Vjola e Eliana e in generale tutti (o quasi) gli allievi e istruttori del corso di Kung-fu del CUS. Un particolare ringraziamento va al prof. Torcini per la sua disponibilità.

Un ultimo ringraziamento spetta infine (nuovamente) a Roberta che, con molto zelo, mi ha aiutato a rendere più leggibile questa tesi.

A tutte queste persone vanno i miei sinceri ringraziamenti sperando di poter io stesso restituire quanto ricevuto.

Bibliografia

- [1] Andrea Milani e Giacomo Mazzini “Sistemi dinamici”
- [2] John David Crawford “Introduction to bifurcation Theory”, Rev of Modern Physics vol 63 No 4 October 1991
- [3] M.C. Cross e P.C. Hohenberg “ Pattern formation outside of equilibrium “ Reviews of Modern Physics,1993
- [4] Igor S.Aranson e Lorenz Kramer “ The world of the complex Ginzburg-Landau equation” Reviews of Modern Physics,Volume 74, 2002
- [5] W. Pesch , U Behn “Electrohydrodynamic Convection in Nematics”
- [6] Richard Williams “ Domain in liquid Crystals” The journal of chemical physics volume 39 number 2, 1963
- [7] M.Kaiser and W.Pesch “Amplitude equations for electrodynamic instability in nematic liquid crystal” Physical review E 1993
- [8] L.Kramer and W.Pesch “Convection instabilities in nematic liquid crystal” Annu. Rev. Fluid. Mech. 1995 515-41
- [9] Daniel Goldman e Lawrence Sirovic “ A novel method for simulating the complex Ginzburg-Landau equation” Quarterly of Applied Mathematics Volume LIII number 2 june 1995 pag 315-333
- [10] Alessandro Torcini , Helge Frauenkron , Peter Grassberg “ A novel integration scheme for partial differential equations : An application to the complex Ginzburg-Landau equation” Physica D 103 1997 605-610

- [11] S.M. Cox and P.C. Matthews “Exponential time differencing for Stiff System” *Journal of computational Physics* 176 ,430-455 (2002)
- [12] SHOichi Kai, Nobuyuki Chizumi, and Mitsuhiro Kohno,” Spatial and temporal behavior of pattern formation and defect motions in the electrohydrodynamic instability of nematic liquid crystal”, *Physical review A* ,vol 40 number 11 1989
- [13] Stefan Popp et al.,”Localized Hole solution and spatio temporal chaos in the 1D complex Ginzburg Landau Equation” *Phys. rev. letters*. Volume 70 number 25, 21 june 1993
- [14] ”Core instability and Spatiotemporal Intermittency of Spiral Waves in Oscillatory Media” *Phys Rev Lett* 1994 number 15 Volume 72
- [15] H. Chaté,”Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation” , *Nonlinearity* 7:185-204, 1994 Per il diagramma di fase dell’equazione di Landau-Ginzburg complessa
- [16] Martin van Hecke , Cornelis Storm , Wim van Saarloos,”Sources, sinks and wavenumber selection in coupled CGL equations and experimental implication for counter-propagating wave systems” , *Physica D* 134 1999 1-47
- [17] Hideki Yamazaki, Shoichi Kai and Kazuyoshi Hirakawa,”Spatial fourier analysis of convective cells in the region from the Williams domain to the grid Pattern” , *Journal of the physical Society of Japan* vol 52 n 6 June 1983
- [18] Michael Scherer and Guenter Ahlers,”Temporal and spatial properties of fluctuation below a supercritical primary bifurcation to travelling oblique-roll electroconvection” , , *Phys rev E* vol 65
- [19] Pismen and Rodriguez,”Mobility of singularities in the dissipative Ginzburg Landau equation” , , *Phys rev A* vol 42 number 4 1990

- [20] Michael Dennin, David Cannel, Guenter Ahlers,"Pattern of electroconvection in meatic liquid crystal", , Phys rev E vol 57 number 1, jan 1998
- [21] Satoru nasuno , Osamu sasaki ,"Secondary instabilities in electroconvection in nematic liquid crystal" , and Shoichi Kai, Phys rev A Volume 46 number 8 1992
- [22] Ingo Rehberg , Steffen Rasenat and Victor Steinberg,"Traveling Waves and defect intiated turbulence in Electroconvecting Nematics" , Phys rev letters vol 62 number 7 1989
- [23] Steffen Rasenat , Erez Braun and Victor Steinberg ," Eckhaus instability and defect nucleation in two dimensional anisotropic system", Phys rev A vol 43 number 10 1991
- [24] Steffen Rasenat and Victor Steinberg,"Experimental studies of defect dynamics and interaction in electrohydrodynamic convection", Phys rev A vol 42 number 10 1990
- [25] Martin van Hecke "Coherent and Incoherent structures in system described by 1D CGLE: Experiments and Identification" , 2002 www.arxiv.org article number 0110068
- [26] <http://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/pmxdmw/tutorial/coherent.html>
- [27] Zee A. "quantum theory in a nutshell" Princeton 2003
- [28] <http://mathworld.wolfram.com/Routh-HurwitzTheorem.html>
- [29] Pino D'amico , Leone Fronzoni , Ivan Maione, Luigi Palatella " Experimental defect dynamic driven by a phase gradient in liquid crystal electro-convective patterns" 2004 , Physica D 197 364-367
- [30] Rodriguez e Pismen "Motion of interacting defect in the ginzburg landau Model"