

Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2004/05
parte 4

Francesco Fuso¹
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 3a - 02.01.05

¹tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

Indice

Nota per i lettori	iv
1 Introduzione	1
1.1 Dimensioni ed unità di misura	2
1.2 Grandezze e prefissi	2
1.3 Precisione e cifre significative	3
2 Moto del punto	5
2.1 Cinematica	5
2.1.1 Velocità	6
2.1.2 Accelerazione	7
2.1.3 Esercizio: cavalli che si rincorrono	9
2.2 Posizione di un punto e moto in più dimensioni	10
2.2.1 Esercizio: il moto parabolico	10
2.3 Vettori	11
2.3.1 Alcune operazioni con i vettori	13
2.3.2 Esercizio: la caccia al tesoro	14
2.3.3 Esempio: composizione delle velocità	15
2.4 Moto circolare uniforme	16
2.4.1 Moto armonico	18
3 Forze, equilibrio, movimento	21
3.1 Massa e densità di massa	21
3.2 Legge di Newton	22
3.2.1 Esercizio: tre forze applicate allo stesso punto materiale	23
3.3 Forza peso	23
3.3.1 Esercizio: lancio di una pietra	24
3.4 Reazione vincolare e terzo principio della dinamica	25
3.4.1 Esercizio: stabilità di un corpo su una guida semicircolare (FAC)	25
3.4.2 Esercizio: moto su un piano inclinato	27
3.4.3 Esercizio: la carrucola mobile	28
3.5 Forza di Archimede	29
3.5.1 Esercizio: il pallone aerostatico	30

3.5.2	Esercizio: il densimetro per liquidi	30
3.6	Forza centripeta	31
3.6.1	Esercizio: la fionda	31
3.7	Forza gravitazionale	32
3.7.1	Esercizio: il peso su un altro pianeta	33
3.8	Forza elettrica	33
3.8.1	Esercizio: l'atomo planetario	34
3.9	Forza elastica	35
3.9.1	Esercizio: le piccole oscillazioni del pendolo	37
3.10	Forze d'attrito	39
3.10.1	Attrito statico	39
3.10.2	Esercizio: spingere o tirare	40
3.10.3	Esercizio: piano inclinato con attrito statico	40
3.10.4	Esercizio: l'auto che sbanda in curva	41
3.10.5	Attrito dinamico	42
3.10.6	Esercizio: frenata a ruote bloccate	42
3.10.7	Attrito dipendente dalla velocità	43
3.10.8	Esercizio: velocità limite di un paracadutista	44
3.11	Momento delle forze	45
3.11.1	Esercizio: due bambini sull'altalena a dondolo	46
3.11.2	Esempi di leve	47
3.12	Cenni di statica e dinamica del corpo rigido (FAC)	48
3.12.1	Esercizio: il moto di un tuffatore (FAC)	49
3.12.2	Moto rotatorio del corpo rigido (FAC)	49
3.12.3	Esercizio: il rullo compressore	50
3.12.4	Esempio: equilibrio dei corpi rigidi	51
4	Lavoro, energia, conservazioni	52
4.1	Lavoro meccanico	52
4.1.1	Esercizio: lavoro sul piano inclinato	53
4.2	Energia cinetica	54
4.2.1	Esercizio: la frenata a ruote bloccate rivisitata	54
4.3	Lavoro della forza peso	55
4.3.1	Esercizio: velocità e montagne russe	56
4.4	Energia potenziale gravitazionale	56
4.4.1	Esercizio: lavoro del sollevatore di pesi	57
4.5	Potenziale elettrostatico (FAC)	57
4.5.1	Esercizio: velocità di un elettrone	59
4.6	Energia elastica	59
4.6.1	Esercizio: velocità della "molla"	60
4.7	Conservazione dell'energia	61
4.7.1	Esercizio: il giro della morte	61
4.7.2	Esercizio: piano inclinato con attrito dinamico (FAC)	62

4.7.3	Esempio: dissipazione di energia nelle oscillazioni smorzate (FAC)	63
4.8	Il primo principio della termodinamica	64
4.8.1	Esercizio: mangiare e faticare	65
4.9	Potenza	65
4.9.1	Esercizio: potenza e velocità	66
4.10	Quantità di moto	66
4.10.1	Conservazione della quantità di moto	67
4.10.2	Esercizio: il rinculo	67
4.10.3	Esercizio: il fuoco d'artificio	68
4.11	Urti	69
4.11.1	Esercizio: il pallone contro la parete	71
4.11.2	Esercizio: urto centrale tra palline del biliardo (FAC)	72
4.11.3	Esercizio: pesce grande mangia pesce piccolo	73
4.11.4	Esercizio: il crash test	74
5	Temperatura e calore	75
5.1	Pressione	75
5.1.1	Esercizio: la forza sul coperchio della pentola a pressione	77
5.2	Temperatura	77
5.2.1	Dilatazione termica	78
5.2.2	Esercizio: rotaie ferroviarie	79
5.2.3	Esercizio: variazione della densità con la temperatura	79
5.2.4	Termometri a dilatazione	79
5.2.5	Dilatazione termica dei gas	80
5.2.6	Temperatura assoluta (in gradi Kelvin)	80
5.3	Legge dei gas perfetti	82
5.3.1	Esercizio: trasformazioni di un gas	84
5.4	Origine microscopica di pressione e temperatura (FAC)	86
5.5	Lavoro delle forze di pressione	88
5.5.1	Esercizio: lavoro nella dilatazione termica di un gas, di un liquido e di un solido	89
5.6	Temperatura e calore	90
5.6.1	Esercizio: una trasformazione adiabatica	91
5.6.2	Capacità termica, calore specifico ed energia interna	91
5.6.3	Esercizio: il thè freddo	94
5.6.4	Esercizio: cottura "alla pietra"	94
5.6.5	Esercizio: la bomba calorimetrica	95
5.6.6	Esercizio: potenza e riscaldamento di un gas	96
5.6.7	Calore nelle transizioni di fase (FAC)	96
5.6.8	Esercizio: il thè freddo con ghiaccio	97
5.7	Cenni sul secondo principio della termodinamica (FAC)	98

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce dalle lezioni del Modulo di Fisica per il corso di Matematica e Fisica per studenti di STPA (e TACREC), non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario o di scuola media superiore. Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, senza discorsi, senza tabelle e con pochissime figure¹, è soprattutto quello di fornire una sorta di “programma esteso” del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Nota importante: a partire dalla Versione 2b, alcune parti del testo, alcuni esercizi ed alcune note a piè di pagina, indicate con il simbolo **FAC**, sono da ritenersi di studio *facoltativo* per gli studenti dei corsi di laurea STPA e TACREC.

Revisioni:

1. Versione 1, 14.09.04: non rilasciata;
2. Versione 2, 18.10.04: cap.1, cap.2 con revisioni sostanziali;
3. Versione 2b, 22.10.04: cap.1, cap.2 con correzioni minori, cap.3; introdotta indicazione delle parti facoltative;
4. Versione 2c, 30.10.04: modifiche minori ai parr.2.4.1, 3.9, 3.10.6 ed altre aggiunte facoltative; aggiunto es.3.10.1; cap. 4;
5. Versione 2d, 08.11.04: correzione di errore di stampa nella soluzione del par.4.7.1; dichiarato FAC il par.4.7.2;
6. Versione 3, 10.12.04: modifiche minori ai parr.3.11, 4.3, 4.9; cap. 5;
7. Versione 3a, 02.01.05: qualche correzione di battitura al cap. 5; cap. 6; cap. 7

¹A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 5

Temperatura e calore

Molti processi fisici che si verificano in natura o che sono il prodotto dell'attività umana coinvolgono variazioni di temperatura e scambi di calore tra corpi (estesi). Il loro studio richiede in generale un approccio diverso rispetto a quello impiegato nella meccanica, e anche l'introduzione di nuove grandezze fisiche utili per descrivere quantitativamente tali processi.

La pressione e la temperatura sono due di tali nuove grandezze; esse possono essere considerate delle *variabili di stato*, cioè grandezze che caratterizzano *macroscopicamente* lo stato di un sistema (il quale, dal punto di vista *microscopico*, è costituito da moltissimi elementi - si pensi ad atomi e molecole che formano una certa quantità di gas) e pertanto sono utili per descrivere il comportamento “collettivo” del sistema. In questo capitolo, dedicato alla presentazione di alcuni elementi di termologia e termodinamica, inizieremo proprio con la definizione di queste grandezze, per poi passare all'esame di alcune situazioni fisiche in cui sono coinvolte temperatura, pressione ed energia (cioè, calore).

5.1 Pressione

La pressione è una grandezza *scalare* che serve a caratterizzare dal punto di vista macroscopico un fluido. Ricordiamo che un fluido è un sistema costituito, in genere, da un gran numero di elementi, che, a differenza dei corpi rigidi, non hanno una configurazione spaziale relativa *fissata e costante* nel tempo. In altre parole, le distanze relative tra i costituenti del fluido stesso, cioè i volumetti infinitesimi in cui esso può essere suddiviso (al limite, tali volumetti racchiudono un singolo atomo, o una singola molecola, cioè entità elementari del fluido) possono cambiare con il tempo, sia per effetto di processi indotti dall'esterno che per effetto di *fluttuazioni* intrinseche al sistema. Come già accennato, tradizionalmente i fluidi si suddividono in due categorie: liquidi e gas. La differenza fondamentale è nell'efficacia delle interazioni tra i vari costituenti, che sono generalmente più “intense” nei liquidi. Per entrambi le interazioni non sono in grado di definire e mantenere una “forma” propria, cioè una distribuzione spaziale definita per i vari elementi, e quindi la forma dipende da quella del “contenitore”. Per i liquidi, però, la comprimibilità è particolarmente bassa (trascurabile nel caso dei liquidi ideali di cui tratteremo nel prossimo

capitolo), cioè i liquidi hanno un “volume” proprio (e invece i gas non hanno neppure questo)¹.

Consideriamo allora un fluido a contatto con una superficie di area S .² In *condizioni di equilibrio*, cioè quando i volumetti in cui possiamo suddividere il fluido non hanno movimento relativo, il fluido eserciterà una *forza* \vec{F} sulla superficie, e questa eserciterà sul fluido una forza uguale ed opposta vettorialmente, secondo il principio di azione e reazione³.

Si verifica che la forza che un fluido in condizioni di equilibrio esercita su una superficie è sempre *ortogonale* a questa. La pressione P è definita proprio come il rapporto tra il modulo della forza e la superficie: $P = F/S$. Notate che forza e pressione sono concetti differenti fra loro: in particolare, la forza è *vettoriale*, mentre la pressione è *scalare*. In effetti, il modulo della forza esercitata da un fluido su una superficie è, per superfici di piccola estensione (al limite, infinitesime), indipendente dall’orientazione della superficie stessa, e quindi nel concetto di pressione “non c’è bisogno” di specificare direzioni.

Osservate che, anche se la pressione è una grandezza utilissima per trattare i fluidi, i concetti che ad essa sono associati si possono impiegare anche con i solidi, cioè i corpi rigidi. Per esempio, una puntina da disegno può facilmente penetrare in una tavola di legno a causa dell’elevata forza che la sua punta produce. Se premete con il vostro dito esercitando una data forza F_{testa} sulla testa della puntina da disegno, che supponiamo abbia superficie S_{testa} , state applicando una pressione $P = F_{testa}/S_{testa}$. In condizioni di equilibrio, cioè subito prima che la puntina cominci a penetrare nel legno, questa pressione è anche quella esercitata dalla punta, che supponiamo abbia superficie S_{punta} , sul legno. Allora la punta esercita una forza F_{punta} sulla tavola di legno che si ottiene risolvendo l’equazione: $P = F_{testa}/S_{testa} = F_{punta}/S_{punta}$. Poiché normalmente la superficie della punta è molto minore di quella della testa (anche cento volte minore), si vede che, anche applicando una piccola forza alla testa, si ottiene in punta una forza rilevante, in grado di penetrare, ad esempio, nelle fibre del legno.

La pressione ha dimensioni di una forza divisa per una superficie. Nel sistema mKs essa si misura in N/m^2 , unità a cui si dà il nome di Pascal, simbolo Pa. Per ragioni storiche e pratiche, esistono numerose unità di misura alternative, che vale la pena di ricordare, come l’atmosfera (simbolo atm) ed il bar con i suoi sottomultipli (specie il millibar, mbar), per i quali vale l’equivalenza $1 \text{ atm} \approx 1 \text{ bar} \approx 10^5 \text{ Pa}$.⁴ Inoltre si usa di frequente anche l’unità di misura detta torr, nota anche come “millimetri di mercurio”, con l’equivalenza $760 \text{ torr} \approx 10^5 \text{ Pa}$. Il motivo per cui ha senso misurare la pressione in termini di una

¹Vale la pena di ricordare che normalmente le diverse **fasi** della materia possono coesistere tra loro. Ad esempio, se mettete una pentola con dell’acqua sul fornello sapete benissimo che avrete coesistenza della fase liquida e di quella gassosa, che, in questo caso, si chiama più propriamente fase di **vapore**, dato che il gas “vapore acqueo” deriva dalla vaporizzazione del liquido “acqua”.

²Può trattarsi ad esempio della superficie di un recipiente che contiene il fluido, oppure di una superficie delineata idealmente all’interno del fluido stesso, nel qual caso il volumetto considerato è circondato ancora dal fluido.

³**FAC**In uno dei prossimi paragrafi vedremo quale sia l’origine *microscopica* delle forze che danno luogo alla pressione di un fluido

⁴La pressione atmosferica sulla faccia della terra, a livello del mare, è di circa 1 atm, cioè circa 10^5 Pa .

lunghezza (più precisamente, dell'altezza di una colonna di mercurio, o di altra sostanza) sarà chiarito nel prossimo capitolo, nella parte in cui ci occuperemo soprattutto di liquidi in equilibrio.

Torniamo a ragionare sul fatto che la forza esercitata da un fluido in equilibrio su una superficie non dipende dall'orientazione di questa. In effetti, se così non fosse, il fluido non potrebbe essere in equilibrio, dato che esisterebbero delle forze che metterebbero in moto relativo i vari volumetti in cui possiamo suddividere il fluido. Osservate che, per un fluido contenuto in un recipiente, le pareti del recipiente esercitano sul fluido una pressione, cioè, scelta una data superficie del fluido, una forza su questa superficie uguale ed opposta vettorialmente a quella esercitata dal fluido. In questo modo, a patto di avere un recipiente sufficientemente robusto, si ha che tutte le forze sono equilibrate fra loro e non c'è movimento né all'interno del fluido, né per il recipiente.

5.1.1 Esercizio: la forza sul coperchio della pentola a pressione

La pentola a pressione è un sistema studiato per permettere l'ebollizione dell'acqua a temperature più alte di quelle a cui l'acqua bolle a pressione ordinaria (circa 100 gradi centigradi). Per questo scopo, all'interno della pentola a pressione si possono sviluppare pressioni maggiori di quella atmosferica. Supponendo che la pressione interna sia $P_{int} = 3$ atm, e che il coperchio (di massa trascurabile) abbia una superficie $S = 400$ cm², quanto vale approssimativamente la forza esercitata sul coperchio?

Soluzione. All'esterno della pentola la pressione è pari alla pressione atmosferica, che supponiamo $P_{atm} \approx 10^5$ Pa. Questa pressione esercita una forza diretta verso l'interno della pentola, che vale $F_{atm} = P_{atm}S$. La pressione interna, invece, genera una forza diretta verso l'esterno della pentola, che vale $F_{int} = P_{int}S$. Le due forze hanno verso opposto, e la risultante è $F = (P_{int} - P_{atm})S$ (positiva se diretta verso l'esterno, negativa altrimenti). Numericamente, facendo molta attenzione a convertire tutte le unità del testo in unità coerenti fra loro, si ottiene $F \approx 10^5$ N, un valore molto alto che dovrebbe farvi prestare la massima attenzione quando avete a che fare con apparecchi che lavorano ad alta pressione.

5.2 Temperatura

La temperatura, oltre ad essere una grandezza di vasto impiego pratico, ha un ruolo fondamentale nel definire lo stato di un sistema termodinamico, ed interviene nel definire la fase del sistema stesso (pensate all'acqua, che, in funzione della temperatura, può assumere fase solida, liquida o gassosa). A differenza della pressione, che ha un'interpretazione meccanica diretta, la temperatura è una grandezza che richiede di essere definita in modo specifico⁵. Meglio ancora, la definizione di temperatura, delle modalità operative di misura

⁵**FAC** Accenneremo in seguito alla circostanza che anche la temperatura è, a livello microscopico, legata a proprietà meccaniche del sistema.

e della sua unità di misura sono strettamente legate a dei fenomeni che si verificano in natura, in particolare alla dilatazione termica.

5.2.1 Dilatazione termica

Il fenomeno della dilatazione termica fa parte dell'esperienza comune di ciascuno di noi. Le "dimensioni" di un corpo dipendono dalla temperatura a cui esso si trova, a prescindere dalla sua fase (solida, liquida o gassosa). In altre parole, il volume di solidi, liquidi e gas è funzione della temperatura, generalmente di tipo *monotono crescente* (cioè le dimensioni aumentano con l'aumentare della temperatura⁶).

Iniziamo con il considerare la variazione delle *dimensioni lineari* di un sistema; detta l_0 la lunghezza alla temperatura T_0 , in molti casi si riscontra sperimentalmente che la lunghezza $l(T)$ alla temperatura (generica) T vale:

$$l(T) = l_0(1 + \lambda(T - T_0)) , \quad (5.1)$$

dove λ è detto *coefficiente di dilatazione termica lineare*, con dimensioni dell'inverso della temperatura. Il suo valore, che dipende sia dal materiale considerato che dalle condizioni in cui si verifica il fenomeno, si può trovare nelle tabelle per diversi sistemi di natura solida, liquida o gassosa. Per avere un'idea, nei solidi è tipicamente $\lambda \sim 10^{-5} - 10^{-6} 1/^\circ C$, cioè l'aumento di temperatura di un grado centigrado produce un allungamento dell'ordine di uno (o alcuni) milionesimi della lunghezza del corpo considerato. Occorre poi sottolineare che il valore di λ dipende dalla temperatura e che la semplice dipendenza lineare espressa dall'Eq.5.1 vale solo per ristretti intervalli di temperatura, che ovviamente devono essere lontani dalle temperature di transizione di fase.

La variazione delle dimensioni con la temperatura comporta, almeno per i solidi ed i liquidi, che hanno un volume proprio, una corrispondente variazione del volume. Supponendo ancora di trovarsi nelle condizioni in cui l'aumento di dimensione è lineare con la temperatura, si avrà: $V(T) = V_0(1 + \lambda_V(T - T_0))$, dove $V(T)$ e V_0 rappresentano il volume rispettivamente alla temperatura T e T_0 , e λ_V è il coefficiente di *dilatazione volumica*. Esiste una semplice relazione che lega i coefficienti di dilatazione volumica e lineare: $\lambda_V \simeq 3\lambda$; questa relazione può essere dimostrata considerando, ad esempio, un cubo di materiale (solido) di spigolo l . Si ha in questo caso $V(T) = l(T)^3 = l_0^3(1 + \lambda(T - T_0))^3$. Poiché numericamente λ è un valore molto piccolo, sviluppando il cubo del binomio si trova che il termine più importante, quello di grado minore in λ , è proprio uguale a 3λ , cioè $l_0^3(1 + \lambda(T - T_0))^3 \simeq V_0(1 + 3\lambda(T - T_0))$.

⁶Notate che, ovviamente, una variazione delle dimensioni tipiche del sistema si ha anche in corrispondenza delle transizioni di fase, pensate ai tubi dell'acqua che si spaccano quando l'acqua diventa ghiaccio. Inoltre l'andamento crescente può avere delle eccezioni, soprattutto in prossimità di transizioni di fase, ed ancora il caso dell'acqua, in cui il volume minimo si ha attorno alla temperatura di circa 4 gradi centigradi, è un buon esempio.

5.2.2 Esercizio: rotaie ferroviarie

Avrete notato che tra una rotaia ferroviaria e la successiva esiste una (piccola) separazione, che è proprio quella responsabile del caratteristico rumore (“tum-tum, tum-tum”) del treno in moto. Il motivo tecnico per cui si lascia questa separazione è legato alla dilatazione termica. Supponendo che ogni rotaia sia lunga $l = 50.000$ m (alla temperatura $T_0 = 0^\circ\text{C}$), che l'acciaio di cui è costituita abbia un coefficiente $\lambda = 1.000 \times 10^{-5}$, e che l'escursione termica preveda una massima temperatura $T = 50.000^\circ\text{C}$, quanto deve valere almeno la separazione Δl tra due rotaie successive per evitare che, col caldo, esse si “incastrino” l'una nell'altra (e si sollevino con grave rischio per i treni che le percorrono)?

Soluzione. Per effetto della dilatazione termica lineare, la lunghezza della rotaia alla temperatura T vale $l = l_0(1 + \lambda(T - T_0)) = 50.025$ m. Dunque occorre una separazione pari ad almeno $\Delta l = l - l_0 = 2.5$ cm per evitare problemi.

5.2.3 Esercizio: variazione della densità con la temperatura

In uno dei capitoli precedenti, abbiamo definito la densità in massa di un corpo (omogeneo) come $\rho = m/V$, dove m e V rappresentano rispettivamente la massa ed il volume. Abbiamo anche affermato che la densità dipende sicuramente dalla temperatura. Supponendo che il corpo subisca una dilatazione termica volumica secondo quanto stabilito sopra, come varia ρ con la temperatura?

Soluzione. Per ipotesi, si ha $V(T) = V_0(1 + 3\lambda(T - T_0))$. Poichè si suppone, ragionevolmente, che la massa non cambi con T , si ha: $\rho(T) = m/(V_0(1 + 3\lambda(T - T_0))) = \rho_0/(1 + 3\lambda(T - T_0))$, dove ρ_0 è la densità alla temperatura T_0 . Quindi $\rho(T)$ generalmente decresce con l'aumentare della temperatura.

5.2.4 Termometri a dilatazione

Storicamente, la definizione di temperatura è stata sempre strettamente collegata al metodo che adottato per la sua misura. Tuttora sono di uso molto frequente i *termometri a mercurio*, che si basano essenzialmente sul fenomeno della dilatazione termica (per il mercurio, che è un metallo liquido a temperatura ambiente, si ha $\lambda_V \sim 10^{-4}$). Le relazioni sopra scritte, che sono abbastanza bene verificate dal mercurio in un intervallo di temperatura di oltre un centinaio di gradi, stabiliscono una relazione *lineare* tra temperatura e dimensioni. Dunque, misurando le variazioni di dimensioni (la lunghezza della colonnina di mercurio contenuta in un capillare) è possibile dedurre in modo diretto le variazioni di temperatura corrispondenti. Affinchè la misura sia completamente determinata, cioè la temperatura possa essere definita, occorre *tarare* (o calibrare) il termometro. Nella scala Celsius o centigrada, questo si ottiene imponendo i valori di 0°C e 100°C a due *punti fissi* relativi alle transizioni di fase dell'acqua (pura), cioè il punto di fusione del ghiaccio e quello di ebollizione dell'acqua⁷.

⁷Per completezza, ricordate che esistono altre scale, per esempio la Fahrenheit, in cui agli stessi punti fissi vengono imposti i valori rispettivamente di 32°F e 212°F .

È chiaro che così facendo, oltre a creare uno strumento per la misura, abbiamo anche dato una definizione *operativa* dell'unità di misura °C; è anche chiaro che potremmo utilizzare un altro materiale per costruire un altro tipo di termometro, ad esempio l'alcool, che è anche frequentemente usato (il suo coefficiente di dilatazione è superiore a quello del mercurio, per cui un termometro ad alcool è generalmente più "sensibile" di uno a mercurio). Quindi è evidente che, nel caso della temperatura, la modalità di misura ha dei risvolti importanti sulla definizione della grandezza considerata.

5.2.5 Dilatazione termica dei gas

Oltre ad usare diversi tipi di liquidi (o anche di solidi) per realizzare un termometro, è ovviamente possibile impiegare anche dei gas. Anzi, in questo caso il coefficiente di dilatazione termica risulta ancora maggiore che per i liquidi (che a sua volta è maggiore che per i solidi) e quindi la "sensibilità" risultante è ancora più elevata, cioè piccole variazioni di temperatura possono essere facilmente rilevate. Con i gas occorre naturalmente un po' di cura in più, dato che è necessario far lavorare il termometro in un intervallo di temperature ben lontane dal punto di liquefazione (cioè dalla temperatura in cui il gas diventa liquido) e bisogna servirsi di recipienti in grado di variare il loro volume (un gas, non avendo volume proprio, deve per forza essere contenuto in un recipiente se si vuole misurarne il volume).

Storicamente, i gas sono stati ampiamente impiegati per scopi termometrici, ed è proprio in questo ambito che nei secoli scorsi sono state compiute delle osservazioni particolarmente significative. È stato osservato sperimentalmente che il coefficiente di dilatazione volumica (che in questo caso si indica spesso con α), per dilatazioni che avvengono *mantenendo costante la pressione*⁸, è approssimativamente lo stesso per una vasta categoria di gas, e vale $\alpha = 1/273.15 \text{ } 1/^\circ\text{C}$. Più precisamente, ai gas per i quali il coefficiente di dilatazione ha esattamente questo valore è stato dato il nome di **gas perfetti**⁹.

5.2.6 Temperatura assoluta (in gradi Kelvin)

Sulla base di quanto è stato verificato sperimentalmente, si ha quindi che, per un gas perfetto, il volume $V(T)$ alla temperatura generica T vale:

$$V(T) = V_0(1 + \alpha(T - T_0)) , \quad (5.2)$$

⁸Per mantenere costante la pressione nel corso di una dilatazione, cioè di un'*espansione* di un gas, occorre fare in modo che le forze per unità di superficie che agiscono sul gas rimangano le stesse qualsiasi sia il volume occupato. Ad esempio, questa condizione si può ottenere immaginando di contenere il gas in un recipiente dotato di un tappo scorrevole a contatto con la pressione esterna: in questo modo ci si garantisce che la pressione rimanga sempre pari alla pressione esterna (ad esempio, la pressione atmosferica).

⁹Molti gas comuni si comportano, in condizioni ordinarie di temperatura e pressione, in modo abbastanza simile ai gas perfetti. Dal punto di vista microscopico, un gas perfetto è generalmente caratterizzato da deboli interazioni fra gli elementi, atomi o molecole, che lo costituiscono tra di loro e con le pareti dei recipienti che li contengono. Quindi un gas perfetto può essere descritto come composto da atomi, o molecole, (relativamente) liberi di muoversi, cioè di occupare diverse posizioni.

dove V_0 è il volume alla temperatura T_0 (notate che questa equazione è del tutto analoga a quella scritta sopra per la dilatazione volumica, solo che abbiamo rimpiazzato il simbolo λ_V con α). L'Eq.5.2 si può anche riscrivere, moltiplicando e dividendo per α il secondo membro, come:

$$V(T) = V_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + T - T_0\right). \quad (5.3)$$

A questo punto possiamo decidere di “creare” una nuova scala di temperatura, cioè una nuova unità di misura, ponendo $T = T + 1/\alpha$, cioè stabilire di misurare le temperature in una scala in cui al valore in gradi centigradi viene aggiunto $1/\alpha = 273.15$ °C; possiamo inoltre scegliere la temperatura $T_0 = 0$, cioè riferire il volume V_0 a questa temperatura, ed otteniamo:

$$V(T) = V_0\alpha T. \quad (5.4)$$

Questa legge, che prevede un andamento lineare del volume con la temperatura, è nota come *legge di Gay-Lussac*, ed è rispettata da numerosi gas (che quindi, si dice, si comportano da gas perfetti) in intervalli piuttosto ampi di temperatura, purché i mantenga costante la pressione durante la dilatazione.

Notate che l'operazione compiuta per scrivere la legge di Gay-Lussac ci ha condotto, di fatto, a definire una nuova scala ed una nuova unità di misura per la temperatura: a tale scala si dà il nome di **scala assoluta**, e l'unità di misura è il grado **Kelvin**, simbolo K. Quindi il passaggio dalla temperatura in gradi centigradi (T) alla temperatura in gradi Kelvin (T) coinvolge una semplice somma: $T = T + 1/\alpha = T + 273.15$.¹⁰ Notate che, in ogni caso, quando si ha a che fare con differenze di temperatura non è strettamente necessario convertire in gradi Kelvin, dato che il valore numerico della differenza è ovviamente lo stesso nelle due scale di temperatura.

Come si intuisce dall'aggettivo “assoluta”, l'introduzione della scala in gradi Kelvin aggiunge delle considerazioni rilevanti al problema che stiamo trattando. Intanto essa toglie delle ambiguità che potrebbero nascere dal fatto di avere una scala definita con un segno (negativo o positivo), cosa che fisicamente non ha molto senso. Inoltre, un esame attento della legge stabilita in Eq.5.4 ci suggerisce un altro aspetto importante: l'andamento lineare è rappresentato, in un grafico VT (cioè in cui l'asse orizzontale riporta la temperatura, e quello verticale il volume) da una retta, che intercetta l'asse orizzontale nello zero. In altre parole, per $T = 0$ si avrebbe $V(T) = 0$, ed addirittura per $T < 0$ sarebbe $V(T) < 0$. Fisicamente, avere della materia che occupa un volume nullo, o addirittura negativo, non ha senso. Quindi siamo portati a concludere che *la temperatura assoluta può essere solo maggiore di zero*¹¹.

¹⁰Per la precisione, a causa della scelta particolare del punto fisso che identifica la transizione solido-liquido nell'acqua, il cosiddetto “punto triplo”, in cui coesistono le tre fasi solida, liquida, e di vapore, si ha $T = T + 1/\alpha = T + 273.160$.

¹¹In una visione microscopica della materia, a cui faremo cenno in un prossimo paragrafo, la temperatura è associata al moto continuo e disordinato degli elementi, atomi, molecole, etc., che costituiscono la materia stessa. Affermare che non si può avere temperatura nulla equivale a stabilire che atomi, molecole, etc., non possono essere completamente fermi, ma devono sempre esibire un moto di *agitazione termica*.

Dal punto di vista sperimentale, è anche facile realizzare degli esperimenti in cui il volume del gas viene mantenuto costante, e si misura la sua pressione $P(T)$ alla temperatura T . La legge che si ottiene con i gas perfetti (ovvero, con i gas che si comportano come gas perfetti) prevede anche in questo caso un andamento lineare con la temperatura:

$$P(T) = P_0 \alpha T, \quad (5.5)$$

dove α è lo stesso coefficiente di prima, e P_0 va interpretata come la pressione alla temperatura zero. È quindi possibile realizzare dei termometri a gas in cui, invece di misurare la dilatazione del volume, si misura la pressione (ad esempio, con uno dei metodi che vedremo nel prossimo capitolo). Utilizzando un grafico PT (cioè riportando la temperatura sull'asse orizzontale, e la pressione su quello verticale), il comportamento di Eq.5.5 è anche in questo caso una retta, con pendenza (proporzionale ad α) analoga a quella della retta che, nel grafico VT , rappresenta una trasformazione a pressione costante.

Giusto per completezza, è bene ricordare che l'impiego di un termometro a gas è sempre un po' disagiata. Di fatto, al giorno d'oggi, anche i termometri a mercurio, o ad alcool, sono spesso considerati poco pratici, e, come succede per la misura di tante grandezze fisiche, si preferisce in genere impiegare dei "trasduttori", cioè dei misuratori che convertono in variazioni di segnali elettrici le variazioni della grandezza che si intende misurare. Nel caso specifico della temperatura, si usano spesso dei dispositivi detti a *termocoppia*, che sfruttano una coppia di fili conduttori di diversi materiali (generalmente leghe metalliche). A causa di un effetto particolare, la *differenza di potenziale* ai capi di questa coppia di fili risulta con ottima approssimazione proporzionale alla temperatura a cui la giunzione tra la coppia di fili si viene a trovare. Quindi la misura della differenza di potenziale (che si può realizzare con diversi strumenti di misura elettrici od elettronici) può essere collegata alla misura di una temperatura. Ancora, si sfrutta spesso la dipendenza della *resistenza elettrica* (ne parleremo in seguito) di materiali conduttori o semiconduttori con la temperatura per ottenere una misura, piuttosto precisa, della temperatura stessa.

5.3 Legge dei gas perfetti

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che, sperimentalmente, con i gas (perfetti) si trovano andamenti lineari con la temperatura per il volume (nel caso la pressione resti costante) o per la pressione (nel caso il volume resti costante). In sostanza, abbiamo considerato due tipi di *trasformazioni* per il gas, rispettivamente un'**isobara** (a pressione costante), e un'**isocora** (a volume costante), in cui abbiamo fatto variare la temperatura del nostro gas. Notate che, affinché valgano le leggi sopra scritte, oltre ad impiegare gas che si comportano come perfetti, occorre che le trasformazioni siano **reversibili**, cioè possano procedere in un senso o nel senso inverso. In altre parole, una trasformazione ciclica deve ricondurre il gas alle condizioni (di pressione, volume, temperatura) iniziali. Dal punto di vista pratico, la reversibilità implica che le trasformazioni avvengano lentamente (cioè, si possa considerare che il gas si trovi in condizioni di equilibrio istante dopo istante) e che non ci siano processi "dissipativi" (ad esempio, se si usa un recipiente con un

tappo scorrevole, come proposto in una nota al paragrafo precedente, lo scorrimento deve avvenire senza attrito). Queste condizioni, come anche il carattere di gas perfetto, sono tutto sommato relativamente semplici da ottenere, almeno in prima approssimazione, nei sistemi reali.

Combinando le due leggi per i gas perfetti, esce che il *prodotto* di pressione e volume, PV , deve variare linearmente con la temperatura T , cioè:

$$PV = \text{cost}T . \quad (5.6)$$

Prima di determinare la costante (opportunitamente dimensionata) cost che compare nell'equazione, facciamo qualche considerazione. Supponiamo di eseguire delle trasformazioni (reversibili) nelle quali manteniamo fissa una grandezza (a scelta tra pressione, volume, temperatura) alla volta, e osserviamo l'andamento delle altre due variabili. Abbiamo già detto cosa succede in un'isobara o in un'isocora. In effetti l'Eq.5.6 conferma quanto già esposto. Supponiamo ad esempio di variare la temperatura da T_{in} a T_{fin} mantenendo costante la pressione al valore \tilde{P} , e chiediamoci quanto vale il volume finale V_{fin} sapendo che all'inizio esso valeva V_{in} . Dunque potremo due equazioni, rispettivamente per lo stato finale e per quello iniziale:

$$\tilde{P}V_{fin} = \text{cost}T_{fin} \quad (5.7)$$

$$\tilde{P}V_{in} = \text{cost}T_{in} . \quad (5.8)$$

Dividendo membro a membro le due equazioni, e tenendo conto che, ovviamente, la costante è sempre la stessa, otteniamo $V_{fin}/V_{in} = T_{fin}/T_{in}$, che rappresenta un modo alternativo di scrivere la legge di Gay-Lussac del paragrafo precedente. Analogamente si ritrova l'andamento (lineare) della pressione con la temperatura, quando il volume viene mantenuto costante.

Se, invece, è la temperatura ad essere mantenuta costante, cioè si esegue una trasformazione **isoterma**, allora deve essere:

$$P_{fin}V_{fin} = \text{cost}\tilde{T} \quad (5.9)$$

$$P_{in}V_{in} = \text{cost}\tilde{T} , \quad (5.10)$$

cioè $P_{fin}V_{fin} = P_{in}V_{in}$. Se rappresentiamo la trasformazione in un grafico PV , allora la curva che si ottiene è un'iperbole; in pratica, pressione e volume variano in modo inversamente proporzionale¹².

Resta da determinare il valore della costante cost ; sperimentalmente si trova che essa dipende dalla "quantità" di gas considerato. Per esprimere la quantità di una sostanza costituita da unità elementari atomiche o molecolari, si usa spesso il concetto di **mole**: nel caso di un gas atomico (o molecolare), una mole è una quantità costituita da un **numero**

¹²**FA**C Faremo nel seguito cenno ad un altro tipo di trasformazioni, dette *adiabatiche*, definite come trasformazioni in cui non c'è scambio di calore tra gas e mondo esterno; la legge che regola tali trasformazioni è del tipo $P_{fin}V_{fin}^\gamma = P_{in}V_{in}^\gamma$, dove γ è un esponente che dipende dal tipo di gas considerato (monoatomico, biatomico, etc.).

di Avogadro ($N_{AV} \approx 6.02 \times 10^{23}$ di atomi (o molecole). Se ricordate che ogni specie atomica (o molecolare) è caratterizzata da una **massa atomica** (o molecolare), allora si può definire la mole (meglio detta, in questo ambito, grammoatomo o grammomolecola) come quella quantità di sostanza la cui massa, in grammi, equivale al peso atomico (o molecolare). Indicando con n il numero di moli di cui è costituito il sistema gassoso che si sta considerando, si ha: $cost = nR$, dove R è detta *costante dei gas perfetti*. Da numerose misure sperimentali è stato possibile determinarne il valore, trovando $R = 8.314 \text{ J/(K mole)}$. Tale costante, inoltre, può essere espressa in funzione di una costante di uso più generale in fisica, detta *costante di Boltzmann* ($k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, attraverso la relazione $R = N_{AV}k_B$).

Avendo svolto tutte queste considerazioni, siamo in grado di scrivere la cosiddetta *legge dei gas perfetti* (detta anche equazione di stato dei gas perfetti), che lega fra loro le grandezze termodinamiche (P, V, T) del sistema in questione:

$$PV = nRT = Nk_B T, \quad (5.11)$$

dove $N = nN_{AV}$ è il numero di componenti elementari (atomi o molecole) che costituiscono il sistema considerato. Anche se finora non lo abbiamo esplicitamente ricordato, è chiaro che la legge dei gas perfetti vale per situazioni di equilibrio, in cui le grandezze termodinamiche sono ben definite. Come risultato che discende direttamente dall'Eq.5.11, è possibile ottenere il volume occupato da una mole di gas (qualsiasi, purché si comporti in modo ragionevolmente simile ad un gas perfetto) nelle cosiddette *condizioni standard* di pressione e temperatura (corrispondenti alla pressione atmosferica, $P \approx 10^5 \text{ Pa}$, e alla temperatura di zero gradi centigradi, cioè $T \approx 273 \text{ K}$). Inserendo questi valori nell'equazione, e ponendo $n = 1$ (abbiamo una sola mole di gas), si ottiene $V \approx 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3 = 22.4 \text{ l}$.

5.3.1 Esercizio: trasformazioni di un gas

Supponete di avere un recipiente cilindrico dotato di un tappo scorrevole in direzione verticale (senza attrito e senza massa) di sezione $S = 10 \text{ cm}^2$. Il recipiente contiene una quantità, in massa, $m = 0.28 \text{ g}$ di azoto (in forma molecolare, formula chimica N_2 , massa atomica $m_A = 28 \text{ uma}$ ¹³. Inizialmente tale gas si trova alla temperatura $T_1 = 27^\circ\text{C}$; quanto vale il volume V_1 occupato dal gas a questa temperatura? Successivamente, il recipiente viene messo sopra un fornello, ed il gas viene scaldato fino alla temperatura $T_2 = 327^\circ\text{C}$; quanto vale il nuovo volume V_2 occupato dal gas? Infine, mantenendo sempre il gas alla temperatura T_2 , si pone un peso di massa $m_P = 5.0 \text{ Kg}$ sul tappo scorrevole, e si osserva che il gas viene compresso; quanto vale il volume V_3 occupato dal gas in

¹³Il simbolo uma indica l'unità di massa atomica. Ricordate che una massa atomica corrisponde, grosso modo, alla massa di un protone, $m_{protone} \approx 1.6 \times 10^{-27} \text{ Kg}$; un atomo di azoto contiene 7 elettroni, 7 protoni, 7 neutroni; la massa degli elettroni è trascurabile, e quella di un neutrone è molto simile a quella di un protone, per cui la massa complessiva di un atomo di azoto è circa 14 volte quella di un protone, e la massa di una molecola è circa $14 \times 2 = 28$ volte quella di un protone, cioè, appunto, $\approx 18 \text{ uma}$.

queste condizioni? (Supponete che tutte le trasformazioni siano reversibili, e che il gas si comporti sempre come un gas perfetto)

Soluzione. Il problema propone una successione di trasformazioni, che vanno considerate separatamente e in sequenza. Prima di tutto, occorre determinare le condizioni iniziali. Il numero di moli è $n = m/m_A = 10^{-2}$, la temperatura è, come scritto nel testo, T_1 (convertita in gradi Kelvin, come necessario, cioè sommando 273, è $T_1 = 300$ K), la pressione può essere determinata notando che il tappo è a contatto con l'ambiente. Quindi, in condizioni di equilibrio, che sono quelle che supponiamo di avere nelle varie fasi del nostro problema, la pressione esterna (cioè la pressione ambiente, che supponiamo $P_{atm} = 1.0 \times 10^5$ Pa, deve essere uguale alla pressione del gas (se così non fosse, il tappo risentirebbe di uno squilibrio tra le forze di pressione che agiscono dal basso verso l'alto e dall'alto verso il basso, e si metterebbe a scorrere, cioè il sistema non sarebbe in equilibrio). Quindi il volume iniziale V_1 può essere determinato con la legge dei gas perfetti: $V_1 = nRT_1/P_{atm} = 2.49 \times 10^{-4} \text{ m}^3 = 0.25 \text{ l}$.

Il gas subisce quindi una trasformazione, consistente nel riscaldamento fino alla temperatura $T_2 = 600$ K (anche in questo caso è necessario fare la conversione in gradi Kelvin), che avviene in condizioni di pressione costante. Infatti, il tappo scorrevole è sempre mantenuto in contatto con la pressione ambiente, e, dato che la trasformazione è da considerarsi reversibile, dal punto di vista pratico si può immaginare che essa avvenga facendo passare il sistema per una successione di stati di equilibrio, per ognuno dei quali si può ripetere il ragionamento sull'equilibrio delle pressioni che abbiamo esposto prima. Dunque la trasformazione è un'isobara, e deve essere: $V_2/T_2 = V_1/T_1$, da cui: $V_2 = V_1T_2/T_1 = 2V_1 = 0.50 \text{ l}$ (il gas evidentemente si espande per effetto dell'aumento di temperatura).

L'ultima trasformazione a cui è sottoposto il gas avviene a temperatura costante, per cui si tratta di un'isoterma. In questa trasformazione il gas viene compresso per effetto di un aumento di pressione; infatti al termine della trasformazione la pressione sul tappo, che indichiamo con P_3 , deve essere uguale alla somma della pressione atmosferica e della pressione generata dalla massa m messa sul tappo, che vale $m_P g/S$ (S è l'area del tappo), per cui $P_3 = P_{atm} + m_P g/S = 1.49 \times 10^5$ Pa (abbiamo usato il valore $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, ed abbiamo convertito il valore della superficie del tappo in m^2 per coerenza tra le unità di misura)¹⁴. Poiché la trasformazione è un'isoterma, si ha $P_3V_3 = P_{atm}V_2$, da cui $V_3 = V_2P_{atm}/P_3 = 3.3 \times 10^{-4} \text{ m}^3 = 0.33 \text{ l}$.

¹⁴Dal punto di vista pratico, visto che si vuole realizzare una trasformazione reversibile, va inteso che la massa m_P viene posta sul tappo in modo da provocare una compressione lenta. Questo può essere ottenuto immaginando di suddividere la massa in tanti piccoli elementi di massa che vengono appoggiati via via sul tappo (per esempio, la massa potrebbe essere costituita da una certa quantità di sabbia, e si aggiungono un po' di granellini per volta) in modo da permettere al sistema di passare per tanti stati di equilibrio corrispondenti a valori di pressione via via crescenti.

5.4 Origine microscopica di pressione e temperatura (FAC)

Pressione e temperatura sono grandezze utili per caratterizzare lo stato di un sistema termodinamico. Esse possono essere considerate delle grandezze “mediate” sulle caratteristiche di un gran numero di componenti il sistema stesso, ad esempio gli atomi o le molecole che formano il campione di gas sotto osservazione. Può essere utile chiedersi a quali proprietà microscopiche, cioè proprie dei costituenti elementari, esse sono collegate.

Consideriamo un gas formato da atomi; essi sono relativamente liberi l’un l’altro, cioè assumiamo che le interazioni reciproche (ad esempio le collisioni tra atomi diversi) siano trascurabili. Ovviamente, se scegliessimo un sistema diverso, ad esempio un liquido, dovremmo tenere in debito conto le interazioni reciproche, che sono responsabili del comportamento macroscopico del sistema (ad esempio, danno un volume proprio ad un liquido, ed una forma propria ad un solido), ma proprio per semplificare la trattazione consideriamo un gas. Questo gas immaginiamo che sia contenuto in un recipiente con pareti rigide. È ragionevole supporre che gli atomi siano in movimento (e vedremo che questa affermazione sarà supportata dalle nostre conclusioni).

Immaginiamo allora di avere un recipiente di forma cubica, con spigolo l , e prendiamo in considerazione un atomo, di massa m , che ha velocità di modulo v ; chiamiamo v_x la componente della sua velocità in direzione orizzontale (poniamo l’asse X in direzione orizzontale). Ad un dato istante, l’atomo urterà contro una delle pareti verticali del recipiente (cioè consideriamo una delle pareti dirette lungo l’asse Y). Possiamo supporre che l’urto sia perfettamente elastico, visto che la parete è supposta rigida. Allora, in seguito all’urto la componente orizzontale della velocità cambia di segno, cioè dopo l’urto si ha $v'_x = -v_x$, come abbiamo visto nel paragrafo dedicato agli urti (è la stessa situazione fisica del pallone tirato contro una parete). Quindi la variazione della quantità di moto in direzione X dell’atomo, Δp_x , è $\Delta p_x = mv'_x - mv_x = -2mv_x$, dove il segno meno indica che la variazione ha direzione ortogonale alla parete e punta verso l’interno del recipiente. Dopo l’urto l’atomo si allontana dalla parete con una velocità la cui componente orizzontale è $-v_x$; quindi, dopo un tempo $\tau = l/v_x$ incontra la parete opposta (stiamo ragionevolmente supponendo che il moto dell’atomo sia rettilineo uniforme, cioè trascuriamo gli urti con gli altri atomi, che saranno poco probabili, e gli effetti della gravità). Sulla parete opposta avverrà un processo di urto del tutto simile a quello considerato prima, e dunque l’atomo tornerà ancora verso la prima parete considerata, che sarà raggiunta dopo un tempo τ . Complessivamente, su ogni parete gli urti si succederanno dopo intervalli di tempo 2τ (il 2 tiene conto dell’“andata e ritorno” dell’atomo).

Pertanto, la quantità di moto lungo X di un singolo atomo costituente il gas cambia di un valore Δp in un intervallo di tempo $2l/v_x$; a questa variazione della quantità di moto possiamo associare una forza media diretta lungo l’asse X , $F_{P,A}$, esercitata dalla parete sull’atomo. Il passaggio alla forza presuppone di impiegare il teorema dell’impulso, di cui abbiamo trattato nel capitolo dedicato alla conservazione della quantità di moto: $F_{P,A} = \Delta p_x / (2\tau)$. Per il terzo principio della dinamica (azione e reazione), l’atomo esercita sulla parete una forza $F_{A,P}$ (sempre diretta lungo l’asse X , cioè in direzione ortogonale

alla parete) uguale ed opposta ad $F_{P,A}$. Allora si ha: $F_{A,P} = -F_{P,A} = -\Delta p_x/(2\tau) = 2mv_x/(2l/v_x) = mv_x^2/l$ (il segno positivo di questa forza indica che questa punta verso l'esterno del recipiente).

A questo punto, ricordiamoci che il gas è costituito da molti atomi, in un numero totale che poniamo pari ad N . Ognuno di questi atomi avrà la sua propria velocità, e possiamo immaginare che la v_x considerata sopra sia il *valore medio* della componente orizzontale della velocità per tutti gli atomi del gas. Quindi la forza totale (lungo X) esercitata sulla parete da tutti gli atomi che vi urtano contro sarà $F = Nmv_x^2/l$. Notate che questa forza, oltre ad avere un carattere medio perché abbiamo considerato una velocità media per tutti gli atomi, ha anche un significato di *media sul tempo*; in altre parole, nel nostro modello abbiamo supposto forze impulsive (e quindi istantanee) che si ripetono in modo discontinuo, con una periodicità 2τ , e l'espressione della forza derivata dal teorema dell'impulso è di fatto una media temporale.

Avendo determinato la forza (media) che agisce sulla parete, e avendo considerato che essa ha direzione ortogonale alla parete stessa e che punta verso l'esterno, è intuitivo attribuire a questa forza l'origine microscopica della pressione. Quindi, per quanto riguarda la pressione, abbiamo stabilito quale sia il meccanismo che la determina a livello dei singoli urti atomo/parete. Possiamo ora andare oltre, e fare delle precisazioni di tipo quantitativo.

La pressione, per definizione, è una forza su una superficie: se consideriamo che la superficie della parete è l^2 (avevamo preso un recipiente cubico) otteniamo: $P = F/l^2 = Nmv_x^2/l^3 = Nmv_x^2/V$, avendo indicato con $V = l^3$ il volume del recipiente. Notate che l'espressione al secondo membro somiglia all'energia cinetica degli atomi del gas. Più precisamente, l'energia cinetica *media* di un singolo atomo che si muova a velocità *media* di modulo v è $E_K = (m/2)v^2 = (m/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. Poiché nel nostro modello le tre direzioni spaziali sono, in un certo senso, "equivalenti" (indistinguibili) fra loro, almeno finché trascuriamo gli effetti della gravità, che ha invece una direzione specifica, possiamo facilmente convincerci che i valori *medi* delle velocità nelle tre direzioni sono gli stessi, cioè $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$, per cui $v_x^2 = v^2/3$. Allora $P = Nmv^2/(3V)$, cioè, riscrivendo ed introducendo esplicitamente l'energia cinetica *media* di un atomo, E_K : $PV = (2/3)NE_K$.

Abbiamo quindi trovato che il prodotto PV è proporzionale all'energia cinetica *media* e *totale* (visto che moltiplichiamo per N) degli atomi del gas, attraverso un coefficiente numerico che, per il nostro modello microscopico, vale $2/3$. D'altra parte, la legge dei gas perfetti (e chiaramente il gas formato da atomi "liberi" è un gas perfetto), derivata da esperimenti macroscopici, ci dice che $PV = Nk_B T$, come abbiamo stabilito in uno dei paragrafi precedenti. Confrontando le due relazioni, quella ottenuta per via microscopica e quella macroscopica, troviamo che: $k_B T = (2/3)E_K$. Questa conclusione è un'espressione di una legge, detta **principio di equipartizione dell'energia**, che stabilisce che le particelle di un gas hanno un'energia cinetica pari ad un multiplo della grandezza $k_B T/2$, con un fattore che tiene conto del *numero di gradi di libertà* dei componenti del gas¹⁵.

Il fatto di aver trovato una relazione di dipendenza lineare tra energia cinetica (che a

¹⁵Non vogliamo entrare troppo nei dettagli dell'argomento, ma comunque il numero di gradi di libertà è 3 per un gas monoatomico, che è quello considerato nel modello, 6 per un gas biatomico, e così via.

sua volta dipende dal quadrato della velocità) e temperatura ci suggerisce che l'origine microscopica di questa grandezza è legata al movimento *continuo e disordinato* (**agitazione termica**) caratteristico della materia. Come conseguenza, una temperatura (assoluta) nulla implicherebbe assenza totale di movimento, ma questo è in contraddizione con la natura stessa della materia, che prevede sempre una qualche forma di agitazione (pensate ad esempio alla struttura atomica, dove gli elettroni debbono “muoversi” continuamente attorno al nucleo). Notate anche che questo movimento disordinato di agitazione si ritrova in qualsiasi stato della materia, inclusi liquidi e solidi. In questi casi, però, gli effetti dell'agitazione termica sono meno eclatanti che per un gas¹⁶. In sostanza, nei solidi e liquidi il comportamento è simile a quello di un gas ad alta densità, in cui gli urti reciproci tra gli atomi non sono più trascurabili. (**fine FAC**)

Un'ulteriore importante conseguenza del nostro modello, sulla quale torneremo nel seguito di questo capitolo, riguarda l'energia interna del sistema gassoso che stiamo considerando. Dato che abbiamo supposto trascurabili le interazioni tra gli atomi (ritenuti “liberi” come in un gas perfetto), l'**energia interna** U del gas, cioè l'energia totale del sistema considerato) vale semplicemente $U = NE_K$, essendo E_K l'energia cinetica media dei singoli atomi (o molecole), ed N il numero di atomi (o molecole) costituenti il gas. Poiché E_K è proporzionale alla grandezza $k_B T$ (con un fattore $2/3$ nel caso di un gas monoatomico), risulta che l'energia interna è anche direttamente proporzionale alla temperatura del sistema.

5.5 Lavoro delle forze di pressione

Consideriamo un gas che espande in una trasformazione a pressione costante. Ricordiamo che la presenza di una pressione implica una *forza* (costante, nel caso considerato), mentre un'espansione implica uno *spostamento*; ad esempio, se supponiamo che il gas sia contenuto in un recipiente dotato di un tappo scorrevole in direzione verticale, l'espansione fa salire, cioè spostare, il tappo. Dunque, abbiamo i due ingredienti fondamentali del *lavoro meccanico*, cioè l'espansione di un gas per effetto delle forze di pressione provoca un lavoro. Vediamo di darne un'espressione.

A questo scopo, riferiamoci ad un gas contenuto in un recipiente con tappo scorrevole di superficie S , e notiamo che la pressione P del gas provoca una forza $F = PS$ che è ortogonale alla superficie del tappo stesso, cioè parallela allo spostamento. Allora, essendo la forza (come la pressione) costante, il lavoro \mathcal{L} corrispondente ad uno spostamento Δs del tappo vale $\mathcal{L} = F\Delta s = PS\Delta s$. D'altra parte, per semplici considerazioni geometriche,

¹⁶Tenete conto che, per l'aria a temperatura ambiente, $T \sim 300$ K, l'energia cinetica di una singola molecola vale circa $E_K \sim 4 \times 10^{-21}$ J. Se consideriamo, ad esempio, una molecola di azoto, il costituente principale dell'aria, tenendo conto che la sua massa è $m \approx 4.5 \times 10^{-26}$ Kg, risulta che la velocità media è dell'ordine di alcune centinaia di m/s! Ovviamente tale velocità, risultando da un moto *disordinato* di agitazione termica, non ha una direzione preferenziale, e quindi va intesa come distribuita in modo uniforme nello spazio.

si ha $S\Delta s = \Delta V$, avendo chiamato ΔV la variazione di volume occupato dal gas. Quindi, a pressione costante, $\mathcal{L} = P\Delta V$.¹⁷

Notate che tale risultato, ottenuto considerando un gas contenuto in un recipiente cilindrico, ha validità generale, e può anche essere impiegata, con le debite considerazioni, a sistemi non gassosi (ad esempio liquidi, o anche solidi, torneremo in seguito su questo punto). Fate attenzione al fatto che la nostra definizione di lavoro, in accordo con le convenzioni impiegate in termodinamica, prevede un lavoro positivo se questo viene fatto dal gas sull'esterno (e quindi si ha un'espansione), negativo viceversa (e quindi si ha una compressione). Come stabilito nel capitolo in cui ci siamo occupati di lavoro ed energia, il lavoro compiuto dall'esterno sul sistema ha segno opposto rispetto a quello compiuto dal sistema sull'esterno. Per intenderci, le forze di pressione *esterne* fanno un lavoro negativo nel caso di espansione del gas, positivo nel caso di compressione. Infine, ovviamente, a prescindere dal tipo di trasformazione, il lavoro compiuto dal sistema è nullo se non c'è variazione di volume.

5.5.1 Esercizio: lavoro nella dilatazione termica di un gas, di un liquido e di un solido

Avete tre campioni, costituiti da un blocco di lega di alluminio, con coefficiente di dilatazione volumica $\lambda_{V,A} = 7.0 \times 10^{-5}$ 1/K, una certa quantità di alcool etilico allo stato liquido, con coefficiente di dilatazione volumica $\lambda_{V,B} = 1.0 \times 10^{-3}$ 1/K, ed una certa quantità di un gas che si comporta come un gas perfetto, e che quindi ha coefficiente di dilatazione volumica $\alpha = 1/273$ 1/K.¹⁸ Se supponete di riscaldare i tre campioni della stessa temperatura, cioè avete per tutti e tre i campioni la stessa variazione di temperatura $\Delta T = 50$ K, quanto valgono le variazioni relative di volume $\Delta V/V_0$ per i vari campioni (V_0 rappresenta il volume iniziale dei campioni)? Ed immaginando che l'espansione avvenga “contro” la pressione atmosferica, in quale caso il lavoro fatto dalle forze di pressione del campione è maggiore? (Supponete che la variazione di temperatura avvenga in un intervallo lontano dalle temperature di transizione di fase per tutti e tre i campioni; ovviamente il liquido ed il gas sono contenuti in recipienti che ne permettono l'espansione)

Soluzione. Per il solido ed il liquido si ha $\Delta V/V_0 = (V(T) - V_0)/V_0 = (V_0(1 + \lambda_V \Delta T) - V_0)/V_0 = \lambda_V \Delta T$; per il gas, la relazione è simile, solo che, come si fa tradizionalmente, il coefficiente di dilatazione si scrive α : $\Delta V/V_0 = \alpha \Delta T$. Dunque, usando i dati del problema, numericamente si ha: per l'alluminio $\Delta V/V_0 = 3.5 \times 10^{-3}$, per l'alcool $\Delta V/V_0 = 5.0 \times 10^{-2}$, per il gas $\Delta V/V_0 = 1.8 \times 10^{-1}$. Risulta quindi che, a parità di variazione di temperatura, il gas si dilata molto di più di un solido o di un liquido, cosa che si verifica generalmente

¹⁷**FA**CIn caso di pressione variabile, la relazione da impiegare, coerentemente con quanto visto nella definizione di lavoro meccanico, è $\mathcal{L} = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} P dV$, dove gli estremi di integrazione corrispondono al volume iniziale e finale del sistema.

¹⁸Notate che abbiamo espresso l'unità di misura dei coefficienti di dilatazione come 1/K; ovviamente i valori numerici sarebbero stati gli stessi se li avessimo espressi nelle unità di misura 1/°C, dato che la dilatazione termica si ha in corrispondenza di *variazioni* di temperatura, che hanno lo stesso valore numerico se espresse in gradi centigradi o gradi Kelvin.

sempre a prescindere dalle sostanze considerate. Di conseguenza, poiché supponiamo che l'espansione avvenga in presenza della pressione ambiente, cioè che sia costituita da fasi successive in ognuna delle quali la pressione della sostanza eguaglia quella atmosferica (ovvero, la pressione è *costante*), il lavoro delle forze di pressione sarà maggiore nel caso del gas.

5.6 Temperatura e calore

Abbiamo introdotto il concetto di temperatura e lavorato su di esso fino a definire in modo preciso la grandezza temperatura. Abbiamo più volte supposto di poter variare la temperatura di un corpo, ma non siamo mai entrati nei dettagli dei meccanismi che sono dietro al riscaldamento, o raffreddamento. Vogliamo occuparcene ora, e partiamo da alcune considerazioni che appartengono al senso comune. La prima è che non riusciamo a riscaldare una stanza con un accendino, anche se la temperatura della fiammella è di alcune centinaia di gradi centigradi. Ci riusciamo invece con un radiatore di termosifone, al cui interno scorre acqua riscaldata a poche decine di gradi centigradi. La seconda considerazione è che, spontaneamente, un corpo caldo posto a contatto (o in vicinanza) di un corpo freddo lo riscalda (e in contemporanea il corpo caldo si raffredda), e non si verifica mai la situazione opposta. Questa considerazione è talvolta definita come *principio zero della termodinamica*, e stabilisce praticamente un “senso” per i processi termodinamici. Infine, abbiamo avuto modo di accennare che l'origine microscopica della temperatura è intimamente connessa all'energia (più precisamente all'energia cinetica di agitazione termica delle particelle che costituiscono il sistema considerato).

Mettendo insieme queste considerazioni, si può trarre la conseguenza che la variazione di temperatura di un corpo abbia a che fare con una variazione di energia. Dunque, per riscaldare la nostra stanza abbiamo bisogno dell'energia fornita dall'acqua calda dell'impianto di riscaldamento, e non della temperatura, benché elevata, della fiammella di un accendino. È anche chiaro che se un corpo varia, in qualche modo, la sua energia, per ragioni complessive di bilancio energetico, dell'energia deve essergli fornita, o sottratta, dall'esterno. Il principio zero della termodinamica ci suggerisce che, quando a fornire e/o ricevere l'energia sono due corpi, e non ci sono altri meccanismi che coinvolgono produzioni, assorbimenti, o conversioni di energia, allora lo scambio avviene dal corpo più caldo a quello più freddo.

In effetti, abbiamo già anticipato questa relazione tra temperatura ed energia nel capitolo in cui abbiamo trattato dell'energia (meccanica) e della sua conservazione. Stabilimmo allora che, in ambito termodinamico, l'energia (scambiata) ha il nome di **calore**. Il calore, Q , ha naturalmente le dimensioni di un'energia, e quindi si misura in Joule nel sistema mKs; tuttavia è ancora frequente l'uso di un'unità di misura tradizionale, la caloria, simbolo cal, la cui introduzione ha, storicamente, le motivazioni che vedremo in seguito. L'equivalenza con il Joule è la seguente: $1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$.

Notiamo che l'assorbimento o cessione di calore da parte di un corpo può avvenire attraverso differenti meccanismi. Convenzionalmente, il trasferimento di calore può avvenire

per contatto (due corpi a diversa temperatura sono posti a contatto tra di loro), per irraggiamento, dove un corpo assorbe energia propagata attraverso *radiazione elettromagnetica* (il sole ci riscalda prevalentemente secondo questo meccanismo), o per *convezione*, quando lo scambio di calore presuppone anche una migrazione di massa (il riscaldamento di una stanza da un radiatore avviene soprattutto con questo meccanismo, la migrazione di massa essendo legata al movimento di volumetti d'aria calda che, avendo una densità minore rispetto all'aria fredda, si spostano verso l'alto per effetto della spinta di Archimede, e sono rimpiazzati da analoghi volumetti a temperatura più bassa).

Trattando di bilanci di energia, abbiamo già introdotto la formulazione del bilancio energetico in ambito termodinamico, che ha il nome di **primo principio della termodinamica**:

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U \quad (5.12)$$

dove Q rappresenta il calore, cioè l'energia, ricevuta o ceduta dal sistema (ed il segno è rispettivamente positivo o negativo), \mathcal{L} è il lavoro compiuto dal sistema (e quindi positivo se il sistema fa lavoro, ad esempio con una espansione, negativo altrimenti, ad esempio in una compressione) e ΔU è la variazione di **energia interna** del sistema. Nel prossimo paragrafo entreremo nel merito della definizione e del significato di ΔU . Per il momento, ci limitiamo ad avvertire che è possibile realizzare delle trasformazioni termodinamiche in cui $Q = 0$. Tali trasformazioni, che hanno il nome di **adiabatiche**, possono ad esempio essere realizzate isolando termicamente il sistema, cioè, nel caso dei gas, usando dei recipienti che non permettono scambi di calore con l'esterno. In questi casi, la legge che regola la trasformazione può essere dedotta proprio dal primo principio, trovando che $PV^\gamma = \text{costante}$, con $\gamma > 1$ dipendente dal tipo di gas (perfetto) impiegato.

5.6.1 Esercizio: una trasformazione adiabatica

Una mole di gas perfetto è contenuta in un recipiente isolato termicamente con il mondo esterno, di forma cilindrica e dotato di un tappo scorrevole in direzione verticale di sezione S . Una massa m viene posta sul tappo, e il gas viene compresso, cioè il tappo scorre verso il basso per un tratto Δh . Supponendo una trasformazione reversibile, quanto vale la variazione di energia interna ΔU del gas?

Soluzione. Il lavoro compiuto dal gas vale $\mathcal{L} = P\Delta V$, dove $P = mg/S$ e $\Delta V = -S\Delta h$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che si tratta di una compressione, cioè di una trasformazione in cui il lavoro del sistema (cioè del gas) è negativo. Essendo la trasformazione adiabatica, si ha $Q = 0$, per cui, dal primo principio, $\mathcal{L} = -\Delta U$. Allora $\Delta U = mg\Delta h$, cioè l'energia interna aumenta nella trasformazione.

5.6.2 Capacità termica, calore specifico ed energia interna

Se ci poniamo nelle condizioni in cui il lavoro \mathcal{L} del sistema è nullo (ovvero, *trascurabile*), ad esempio se non c'è variazione di volume del sistema (ovvero questa è trascurabile), il primo principio della termodinamica ci dice che $Q = \Delta U$, cioè tutto il calore scambiato con il sistema serve per modificare la sua energia interna. Abbiamo già visto come, nel

caso di un gas perfetto, l'energia interna U sia proporzionale a $Nk_B T = nRT$, dove N è il numero di atomi o molecole che costituiscono il gas, k_B è una costante universale (costante di Boltzmann, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K), $n = N/N_{AV}$ è il numero di moli considerate, R è la costante dei gas perfetti ($R = 8.314$ J/(mole K)). Il coefficiente di proporzionalità dipende dal tipo di gas considerato (vale $3/2$ nel caso di un gas perfetto monoatomico, come risulta dal modello microscopico presentato in precedenza).

Questo significa che, per un gas perfetto, la variazione di energia interna ΔU è direttamente proporzionale alla variazione di temperatura ΔT del gas stesso. Possiamo esprimere questa dipendenza lineare introducendo una nuova grandezza, detta **capacità termica**, che qui indichiamo con C : in una trasformazione a volume costante, in cui $\mathcal{L} = 0$, si ha: $Q = \Delta U = C\Delta T$.¹⁹

Nel caso di sistemi liquidi o solidi, oppure anche di gas il cui comportamento devia sensibilmente da quello dei gas perfetti, non è detto che sia possibile trovare un semplice modello microscopico che consenta di verificare una dipendenza lineare dell'energia interna con la temperatura, così come abbiamo fatto con i gas perfetti. Tuttavia, nella maggioranza dei casi, specie se si considerano intervalli di temperatura lontani dalle temperature di transizione di fase, tale dipendenza lineare è ben verificata sperimentalmente. Quindi siamo giustificati nello stabilire che, per la maggioranza delle situazioni pratiche che si incontrano, si ha $\Delta U = C\Delta T$. La capacità termica C dipende dal sistema specifico che si sta osservando (oltre che dalle condizioni di osservazione, ad esempio temperatura e pressione), ed i suoi valori per una varietà di sostanze possono essere trovati nelle tabelle.

In particolare, C dipende dalla *quantità di materiale* considerato, cioè dal suo numero di moli (che è la grandezza tipica che si usa con i gas) ovvero dalla massa del campione analizzato. È ragionevole dal punto di vista intuitivo che tale dipendenza sia ancora lineare, cioè che la capacità di un corpo aumenti linearmente con l'aumentare della sua massa (ovvero, del suo numero di moli). Per questo motivo, è comodo riferirsi ad una grandezza caratteristica del sistema considerato, che si chiama **calore specifico**, che qui indichiamo con il simbolo c , tale che $C = mc$, con m massa del sistema; l'unità di misura di c nel sistema mKs è J/(K Kg). Analogamente si definisce un calore specifico *molare* quando conviene misurare la quantità di materia con il numero di moli n (ad esempio, con i gas); in questo caso si ha $C = nc$, e l'unità di misura di c diventa J/(K mole).²⁰

Per essere precisi, nelle tabelle si trovano spesso valori dei calori specifici *a volume costante*, che indichiamo con c_V , o *a pressione costante*, c_P . Questa precisazione non ci stupisce, dato che nel primo caso tutto il calore viene utilizzato per modificare l'energia interna del sistema, essendo nullo il lavoro \mathcal{L} , mentre nel secondo caso parte del calore fornito al sistema “va” in lavoro che questo compie. Ovviamente se si considerano sistemi

¹⁹**FAC** In termini generali, quando non è detto che si abbia una dipendenza lineare dell'energia interna con la temperatura, è sempre possibile definire la capacità termica di un sistema come $C(T) = \frac{dU}{dT}$ (a volume costante). Notate che in questo caso può verificarsi che la capacità termica sia funzione della temperatura, motivo per cui abbiamo scritto $C(T)$.

²⁰**FAC** Sulla base di quanto abbiamo stabilito per l'energia interna di un gas perfetto monoatomico, quello considerato nel modello microscopico trattato in precedenza, si ha che il calore specifico molare (a volume costante, vedi dopo) è $c_V = U/T = (3/2)N_{AV}k_B = (3/2)R$. Questo valore è indipendente dal tipo di gas, purché esso si comporti come un gas perfetto, e dalla temperatura.

solidi (e, in molti casi, anche sistemi liquidi) la differenza tra il calore specifico a volume e a pressione costante è trascurabile, visto che è normalmente trascurabile la dilatazione termica di questi sistemi (e quindi il lavoro che ad essa è collegato). Per fare un esempio, che è storicamente di rilievo, il calore specifico dell'acqua (esattamente nell'intervallo di temperature tra 14.5 e 15.5 °C, il calore specifico per l'acqua non è del tutto indipendente dalla temperatura, e quindi è necessario specificare l'intervallo considerato) vale $c = 1$ cal (i valori di c_V e c_P corrispondenti sono pressoché uguali). In altre parole, se avete una quantità $m = 1$ Kg di acqua (praticamente un litro di acqua) alla temperatura di 14.5 °C, dovete fornire un calore, cioè un'energia, $Q = 1$ cal = 4.184 J per ottenere un aumento di temperatura di un grado centigrado. Se invece che riscaldare volete raffreddare il vostro campione, dovete fare in modo di sottrargli la stessa quantità di calore (e quindi $Q < 0$). Storicamente, questa osservazione è stata proprio alla base della definizione di caloria.

Come annotazione da sottolineare a questo punto del nostro studio, torniamo ad occuparci dei *processi metabolici* che regolano l'assorbimento e la cessione di energia da parte di un organismo vivente, in particolare per organismi "a sangue caldo". In uno degli esercizi del capitolo dedicato al lavoro e all'energia, avevamo visto come il lavoro meccanico eseguito da una normale attività fisica (ad esempio, per un uomo, salire le scale o sollevare un peso) corrisponda ad una quantità irrisoria dell'energia che normalmente viene acquisita tramite gli alimenti. Oltre ai tanti meccanismi di dissipazione energetica, e al fatto che l'energia fornita dal cibo serve ad alimentare continuamente gli organi interni, occorre tenere conto che un effetto essenziale del metabolismo è quello di mantenere costante la temperatura del sangue, e quindi dell'organismo, cioè, usando i termini che abbiamo introdotto in questo paragrafo, per tenere costante l'energia interna del sistema. È infatti evidente che lo scambio termico (continuo) del corpo con il mondo esterno tende a sottrarre dell'energia, e quindi a far abbassare la temperatura dell'organismo, meccanismo che deve essere contrastato fornendo, con il cibo, dell'energia, ovvero del calore.

Ora che abbiamo trovato un legame tra energia (calore) e temperatura siamo in grado di analizzare diversi problemi in cui sono coinvolti processi di riscaldamento (o raffreddamento), come vedremo negli esercizi riportati qui di seguito. È chiaro che lo studio di questi processi richiede di scrivere delle equazioni di bilancio energetico: se consideriamo due corpi che vengono messi in contatto tra loro (il meccanismo più semplice di trasmissione del calore prevede il contatto fisico), il corpo più caldo cede dell'energia (calore) al corpo più freddo, ed il processo procede finché non si raggiunge una condizione di equilibrio dei flussi di calore. A questo equilibrio corrisponde una temperatura *unica* per i due corpi, che quindi può essere determinata in modo matematico risolvendo una (semplice) equazione.

Arrivati a questo punto, siamo anche in grado di dare un'interpretazione qualitativa dell'osservazione (di esperienza comune) che per riscaldare una stanza non basta la fiammella di un accendino: in questo caso, infatti, la capacità termica della stanza (cioè dell'aria che vi è contenuta, e di tutto quello che c'è dentro, persone, suppellettili, pareti, etc.) è molto maggiore di quella dell'accendino, basti pensare all'enorme differenza di massa fra i due corpi considerati, e quindi si può avere un riscaldamento solo utilizzando un termosifone, in cui si sfrutta una certa quantità di acqua calda.

5.6.3 Esercizio: il thè freddo

Avete preparato un litro (cioè una massa $m_1 = 1.00$ Kg, la densità del thè è quella dell'acqua) di thè alla temperatura $T_1 = 80.0^\circ\text{C}$. Visto che volete ottenere una bevanda fredda, mescolate al thè una massa $m_2 = 0.200$ Kg (praticamente un bicchiere) di acqua presa dal frigorifero, che si trova a temperatura $T_2 = 5.00^\circ\text{C}$. A prescindere dal fatto che in questo modo “annacquate” il thè, quanto vale la temperatura finale T della miscela? (Prendete il valore $c = 4.18$ J/(K Kg) come calore specifico sia per il thè che per l'acqua²¹, e supponete trascurabili le dispersioni di calore verso l'esterno, cioè immaginate che il thè scambi calore solo con l'acqua fredda. Questo si può realizzare immaginando di usare un recipiente isolato termicamente.)

Soluzione. Quando i due liquidi vengono miscelati, il thè cede una certa quantità di calore Q_1 all'acqua, e questa riceve una certa quantità di calore Q_2 dal thè. Se non ci sono ulteriori meccanismi di scambio di calore, deve essere, per ovvi motivi di bilancio energetico, $Q_1 + Q_2 = 0$. Supponiamo inoltre che le dilatazioni termiche dei liquidi siano trascurabili, cioè che $\mathcal{L} = 0$.²² La temperatura finale della miscela, T , dovrà essere la stessa sia per il thè che per l'acqua fredda (formano una miscela, e quindi quello che abbiamo scritto è ovvio). Avremo allora: $Q_1 = cm_1\Delta T_1$ e $Q_2 = cm_2\Delta T_2$, dove $\Delta T_1 = T - T_1$ (sarà negativo se il thè si raffredda) e $\Delta T_2 = T - T_2$ (sarà positivo se l'acqua fredda si riscalda). Possiamo allora scrivere: $cm_1(T - T_1) + cm_2(T - T_2) = 0$. Questa espressione dà luogo ad un'equazione algebrica del primo ordine per l'unica incognita T , che riscritta (e semplificando per c , che in questo caso non conta) è: $T = (m_1T_1 + m_2T_2)/(m_1 + m_2)$. Numericamente si ottiene $T = 67.5^\circ\text{C}$.

5.6.4 Esercizio: cottura “alla pietra”

Un modo per cuocere degli alimenti (o, più in generale, per riscaldare dei corpi) consiste nel porli a contatto con una pietra calda (cioè riscaldata in precedenza, ad esempio per contatto con una fiamma o inserimento in un forno). Supponete di avere una di queste pietre, di massa $m_P = 5.0$ Kg e calore specifico $c = 0.50$ J/(K Kg) (vedi le note all'esercizio precedente sull'uso dei gradi Kelvin e sul fatto che si possa trascurare il lavoro dovuto a dilatazioni o compressioni termiche), che si trova alla temperatura $T_P = 200^\circ\text{C}$. Su questa pietra ponete una massa $m_A = 0.10$ Kg di una sostanza che ha calore specifico $c = 5.0$ J/(K Kg) e si trova inizialmente alla temperatura $T_A = 20^\circ\text{C}$. Quanto vale la temperatura finale, all'equilibrio, della sostanza? (Supponete che non ci siano dispersioni di calore (cosa ragionevole se il riscaldamento della sostanza avviene in tempi brevi, vedi la

²¹Notate che, anche se nel valore del calore specifico entra la temperatura assoluta in gradi Kelvin, potete operare con i gradi centigradi, dato che siamo interessati a processi in cui ci sono variazioni di temperatura, e queste hanno lo stesso valore numerico sia che si usino i gradi Kelvin, che i gradi centigradi.

²²Questa specifica non è strettamente necessaria, dato che il calore specifico indicato potrebbe essere a pressione costante, e quindi tenere conto anche dell'eventuale lavoro meccanico; tuttavia in questo modo possiamo rendere più chiaro e semplice l'esercizio.

breve discussione riportata nella soluzione), come nell'esercizio precedente, e che il calore fornito alla sostanza serve solo al suo riscaldamento²³.)

Soluzione. Anche in questo caso possiamo scrivere, sulla base dei dati e delle assunzioni del problema, un'equazione di bilancio delle energie $Q_P + Q_A = 0$. Si ottiene, riscrivendo l'equazione e manipolandola un po' con strumenti matematici standard: $T = (m_P c_P T_P + m_A c_A T_A) / (m_P c_P + m_A c_A)$. Notate che si tratta di un'espressione simile a quella trovata per l'esercizio precedente, ma in questo caso compaiono esplicitamente i calori specifici dei due corpi. Numericamente si ottiene $T = 170^\circ\text{C}$. Notate che l'equazione di bilancio energetico che abbiamo impiegato non ci dice nulla sul tempo necessario perché questa temperatura di equilibrio, e quindi, per ipotesi, comune ai due corpi, venga raggiunta. Il problema di determinare tale tempo richiede di impiegare un approccio diverso, in cui si stabiliscono i meccanismi di propagazione del calore, cosa che va al di fuori degli scopi di questi appunti. In ogni caso, tenete che l'assunzione che non ci siano dispersioni di calore richiede, secondo il buon senso, di stimare questo tempo; infatti più esso è lungo, maggiore è la probabilità che ci sia dispersione di calore (per esempio, se dovete aspettare un tempo troppo lungo, la vostra pietra si raffredderà, dato che il suo calore viene disperso per contatto con altri corpi, o semplicemente con l'aria, o per irraggiamento, e allora la temperatura di equilibrio sarà ragionevolmente minore). L'esperienza pratica di un cuoco vi farebbe preferire, per limitare questi problemi, l'uso di un fornello o addirittura di un forno: in questi casi ci sarebbe un continuo apporto di calore (a spese del combustibile, o della corrente elettrica che li alimenta), e nel caso del forno oltre al meccanismo di propagazione di calore per contatto si sfrutterebbero anche altri processi, convezione e irraggiamento, che limiterebbero la possibilità di dispersione del calore dalla faccia superiore del corpo da riscaldare.

5.6.5 Esercizio: la bomba calorimetrica

La *bomba calorimetrica* è un dispositivo usato per determinare il potere calorico di una certa quantità di sostanza (un alimento, un combustibile, etc.). In buona sostanza, esso è un *calorimetro*, cioè un sistema che permette di valutare la quantità di calore scambiato attraverso la variazione di una grandezza misurabile, ad esempio la temperatura. La nostra bomba calorimetrica è costituita da un pesante involucro di metallo, che supponiamo abbia massa $m = 5.0$ Kg e calore specifico $c = 1.0$ J/(K Kg), dotato di un termometro ed isolato termicamente verso l'esterno. La sostanza di cui si vuole determinare il potere calorico viene introdotta all'interno dell'involucro (assieme ad un comburente, cioè una sostanza, tipo l'ossigeno dell'aria, che ne permette la combustione). Ad un dato istante, si fa in modo, normalmente tramite una scarica elettrica, di innescare una brusca e comple-

²³Questa affermazione non funziona molto bene con i cibi! Infatti, a parte la dilatazione termica, che possiamo sempre supporre trascurabile se il cibo è di natura solida, la cottura implica il verificarsi di reazioni chimiche, ad esempio modifica di proteine, scioglimento di grassi, etc., che in genere richiedono dell'energia, cioè del calore, per verificarsi. Quindi la condizione di bilancio energetico che abbiamo supposto nel testo dovrebbe essere modificata per tenere conto di questa energia. Accenneremo a un meccanismo concettualmente simile nel paragrafo successivo.

ta combustione della sostanza (si preferisce che questa combustione sia rapida anche per limitare le dissipazioni di calore, le quali normalmente avvengono su una scala temporale abbastanza lenta). Se si osserva che la variazione di temperatura dell'involucro è $\Delta T = 10$ °C, quanto vale il potere calorico q della sostanza?

Soluzione. Nel processo la sostanza cede il suo calore, ovvero la sua energia interna, al calorimetro. Per ipotesi (la combustione è completa), questa cessione è totale, e inoltre (il calorimetro è isolato termicamente) avviene solo verso il calorimetro. Quindi, detto Q il calore assorbito dal calorimetro, si ha $|Q| = |q|$; ma $Q = mc\Delta T$, per cui $q = mc\Delta T = 50$ J, equivalenti a circa 0.012 kcal (se si tratta di un alimento, ingrassa davvero poco!).

5.6.6 Esercizio: potenza e riscaldamento di un gas

Avete una mole di gas contenuta in un recipiente di volume fisso isolato termicamente verso l'esterno. All'interno del recipiente, il gas è a contatto con un riscaldatore elettrico, che fornisce una potenza costante $W = 100$ W. Se tenete acceso il riscaldatore per un tempo $\Delta t = 10.0$ s, sapendo che il gas ha calore specifico molare a volume costante $c_V = 10.0$ J/(K mole), e che la sua pressione iniziale (a riscaldatore spento) vale $P_0 = 3.0 \times 10^5$ Pa e la temperatura è $T_0 = 300$ K, quanto vale la pressione P_{fin} al termine del periodo di riscaldamento?

Soluzione. Vedete che questo problema, sulle prime, sembra un po' complicato. Tuttavia abbiamo tutti le conoscenze necessarie per risolverlo. Sfruttiamo tutte le informazioni del testo. Il riscaldatore, se tenuto acceso per un intervallo Δt , produce un calore $Q_{risc} = W\Delta t$ che, secondo i dati del problema (il recipiente è isolato termicamente) viene interamente assorbito dal gas. Secondo il primo principio, questo calore può servire sia per aumentare l'energia interna del gas, che per produrre lavoro meccanico; il lavoro, però, è nullo, dato che il recipiente ha volume fisso. Allora $Q_{risc} = W\Delta t = \Delta U_{gas}$. Ma $\Delta U_{gas} = c_V\Delta T$, avendo indicato con ΔT la variazione di temperatura del gas e avendo tenuto conto del fatto che si ha una sola mole di gas ($n = 1$). Quindi $\Delta T = W\Delta t/c_V$. Nel riscaldamento, il gas ha ovviamente subito una trasformazione, che è avvenuta a volume costante (cioè è un'isocora). Supponendo, ragionevolmente, che il gas abbia seguito la legge per le isocore reversibili di un gas perfetto, ed indicando con i pedici in e fin le condizioni iniziali e finali della trasformazione, si ha per la pressione finale P_{fin} : $P_{fin} = P_{in}T_{fin}/T_{in} = P_0\Delta T/T_0$, avendo usato le notazioni del testo del problema. Numericamente si ottiene $P_{fin} = 1.0 \times 10^6$ Pa (il gas ha aumentato la sua pressione).

5.6.7 Calore nelle transizioni di fase (FAC)

In alcuni casi, il riscaldamento o raffreddamento di un corpo implica che questo si trovi a passare per una temperatura di *transizione di fase*. Ad esempio, un vapore²⁴ può essere raffreddato fino a raggiungere il punto di *liquefazione*, un liquido può essere raffreddato fino al punto di *solidificazione*; andando verso temperature crescenti, un solido può essere

²⁴Usiamo qui il termine "vapore" invece che "gas", perché vapore è il nome più corretto quando si abbia un gas che può essere condensato per formare un liquido o un solido.

riscaldato fino al punto di *fusione*, un liquido fino al punto di *vaporizzazione* (e, per alcuni solidi, può anche aversi un passaggio diretto alla fase di vapore, fenomeno che prende il nome di *sublimazione*).

Quando si verifica una transizione di fase, l'organizzazione reciproca della materia, cioè il suo stato di aggregazione, cambia in modo generalmente sostanziale. Questo cambiamento implica, normalmente, un'acquisizione o una cessione di energia, cioè di calore, da parte del sistema. Il motivo è intuitivo: ad esempio, gli atomi di sodio allo stato di vapore interagiscono molto poco l'uno con l'altro, allo stato solido, invece, si formano dei legami chimici tra gli atomi, che sono quelli che "tengono insieme" la materia. La formazione di questi legami (o, nel processo inverso, la loro rottura) implica uno scambio di energia.

Dal punto di vista macroscopico, si tiene conto di questi aspetti introducendo degli opportuni calori specifici, cioè riferiti all'unità di massa considerata, per la transizione di fase, che possono essere positivi o negativi a seconda che il processo considerato sia endotermico o esotermico. A questi calori specifici, che dipendono dalla sostanza e dalle condizioni in cui avviene il processo, si dà spesso il nome di *calori specifici latenti* (di fusione, liquefazione, vaporizzazione, etc.). Come vedremo nell'esercizio seguente, la presenza di calori latenti non trascurabili richiede un po' di cura in più quando si deve determinare la temperatura di equilibrio di un sistema a più corpi in contatto fra loro, sempre che l'intervallo di temperatura possa eventualmente comprendere una transizione di fase. Inoltre, come osservazione che può essere utile in qualche caso, è bene ricordare che durante la transizione di fase, cioè finché essa non si è verificata completamente, la temperatura di un corpo rimane costantemente fissa alla temperatura di transizione stessa. Questo è il motivo per cui, ad esempio, la temperatura dell'acqua in ebollizione (cioè in uno stato di vaporizzazione che interessa non solo gli strati superficiali, ma l'intera massa del liquido) resta costante a 100 °C. Come noto, tale temperatura di transizione dipende dalle condizioni in cui il processo si verifica, in particolare dalla pressione, come sa chi ha provato a cuocersi un piatto di spaghetti in alta quota (dove la pressione atmosferica è minore, e quindi la temperatura di ebollizione è minore) o chiunque usi una pentola a pressione (dove, invece, la pressione è più alta, l'acqua in ebollizione ha temperatura maggiore, e si accorciano di conseguenza i tempi di cottura).

5.6.8 Esercizio: il thè freddo con ghiaccio

Supponete di voler ancora preparare del thè freddo: avete un litro ($m_T = 1.0$ Kg) di bevanda (calore specifico $c_T = 4.2$ J/(K Kg)) alla temperatura $T_T = 50^\circ\text{C}$. Per raffreddarla, ci tuffate una massa $m_G = 0.50$ Kg di ghiaccio, che si trova alla temperatura iniziale $T_G = -10^\circ\text{C}$. Sapendo che il calore specifico latente di fusione del ghiaccio vale $\chi_F = 0.35$ J/Kg (e che, ovviamente, la temperatura di fusione vale $T_F = 0.0^\circ\text{C}$), il ghiaccio si scioglierà completamente? E quale sarà la temperatura finale all'equilibrio T del sistema thè + ghiaccio (eventualmente sciolto)? (Considerate per il ghiaccio solido un calore specifico pari a quello dell'acqua, cioè del thè, e supponete, al solito, trascurabili le dissipazioni di calore)

Soluzione. Affinché il ghiaccio possa fondere completamente, è necessario che esso possa ricevere una certa quantità di energia, ovvero di calore $Q_F = \chi_F m_G$. Questo calore gli deve essere fornito dal tè caldo; al massimo, il tè può raffreddarsi completamente fino alla temperatura di fusione del ghiaccio, fornendo un'energia, ovvero un calore, che in modulo vale $|Q_{T,max}| = m c_T |\Delta T|$, con $\Delta T = T_F - T_T$. Sostituendo i valori numerici del testo, si ottiene $|Q_T| > Q_F$, per cui la fusione sarà completa. Quindi all'equilibrio avremo che la massa di ghiaccio sarà completamente sciolta, cioè avremo una miscela tè + acqua.

Vediamo ora di determinare la temperatura di equilibrio della miscela. Dobbiamo ragionare in modo simile a quanto fatto in uno degli esercizi precedenti, ma in questo caso dobbiamo tenere conto che parte del calore fornito dal tè (che possiamo indicare come Q_G) serve per portare il ghiaccio dalla sua temperatura iniziale, T_G , alla temperatura di fusione T_F , e che parte del calore (quello che abbiamo già indicato con Q_F) serve per fondere il ghiaccio. Allora il bilancio energetico si scrive: $Q_T + Q_A + Q_G + Q_F = 0$, dove $Q_T = m_T c_T (T - T_T)$ è il calore fornito dal tè fino a raggiungere la temperatura di equilibrio, $Q_A = m_G c_T (T - T_F)$ è il calore assorbito dall'acqua (ghiaccio sciolto) per portarsi dalla temperatura di fusione a quella di equilibrio, $Q_G = m_G c_T (T_F - T_G)$ è, come detto, il calore assorbito dal ghiaccio per portarsi dalla temperatura iniziale a quella di fusione, e Q_F è il calore latente di fusione, che abbiamo già scritto prima (si noti che in queste espressioni abbiamo sfruttato il fatto che il calore specifico di tè, ghiaccio ed acqua è sempre lo stesso, pari a c_T , e che la massa di ghiaccio, m_G , viene completamente convertita in acqua). Scrivendo il bilancio e risolvendo l'equazione per l'unica incognita T , si ottiene $T = \frac{c_T(m_T T_T + m_G T_G) - m_G \chi_F}{c_T(m_T + m_G)} \approx 30^\circ\text{C}$.

5.7 Cenni sul secondo principio della termodinamica (FAC)

Il primo principio della termodinamica stabilisce una relazione tra calore (assorbito o ceduto da un sistema termodinamico) e lavoro meccanico (fatto o subito dal sistema stesso). Nella realtà la conversione di lavoro in calore, o la conversione (inversa) di calore in lavoro non sono processi "equivalenti" (in termini di efficienza) tra loro: in particolare, nella pratica il calore non potrà mai essere convertito *completamente* in lavoro. In altre parole, l'efficienza del processo, definita come rapporto $\eta = Q/\mathcal{L}$, sarà sempre $\eta < 1$. Questa affermazione deriva dal *secondo principio della termodinamica*. Una formulazione alternativa e particolarmente semplice di questo principio stabilisce, in accordo con il cosiddetto principio zero, che non è mai possibile avere un passaggio spontaneo di calore da un corpo freddo ad un corpo caldo. Esistono poi altre formulazioni possibili, che, ad esempio, equivalgono ad affermare che non è possibile realizzare un moto perpetuo, oppure che una certa grandezza di un sistema termodinamico, detta **entropia** e collegata al grado di *disordine* dei costituenti il sistema, tende ad aumentare ogni volta che il sistema stesso subisce una trasformazione reale.

In questi appunti non vogliamo entrare nei dettagli della dimostrazione di una qualsiasi

delle formulazioni possibili per questo principio, ma solo sottolineare quali conseguenze può avere il fatto che l'efficienza del processo di trasformazione di calore in energia è sempre $\eta < 1$. Un sistema che realizza la conversione di calore in energia è costituito da una cosiddetta *macchina termica*. Per esempio, un motore a scoppio è una macchina termica, in cui il potere calorico del combustibile, che ha un'origine legata a reazioni chimiche (di combustione), viene convertito in lavoro meccanico. Anche un frigorifero è una macchina termica, e in questo caso del lavoro meccanico (fornito, in genere, da un motore elettrico) viene convertito in calore (negativo, che serve cioè per raffreddare). Una macchina termica ideale, cioè quella che ha la maggiore efficienza, sfrutta un ciclo, detto di Carnot dal nome del suo scopritore, costituito da una successione di trasformazioni termodinamiche (supposte reversibili, e che coinvolgono un gas perfetto) che riportano il gas ciclicamente allo stesso stato. In particolare, il ciclo di Carnot è formato da un'espansione isoterma, seguita da una espansione adiabatica, seguita da una compressione isoterma, seguita infine da una compressione adiabatica.

È evidente, dal tipo di trasformazioni considerate, che la macchina ha bisogno per il suo funzionamento di due sorgenti di calore a temperatura diversa (T_1 e T_2 , supponiamo $T_2 > T_1$). Infatti essa deve poter ricevere del calore Q_1 nella prima isoterma, e cedere del calore Q_2 nella seconda isoterma, ed è necessario che i corpi (*termostati*) con cui avvengono gli scambi di calore abbiano temperature diverse. Sfruttando le leggi di queste trasformazioni (reversibili e per gas perfetti), è possibile determinare sia le quantità di calore assorbite e cedute, che il lavoro meccanico prodotto nel ciclo dal gas. In questo modo è possibile determinare l'efficienza, che risulta essere $\eta = (Q_1 + Q_2)/Q_2 = (T_1 + T_2)/T_2$. Quest'ultima espressione si può riscrivere come $\eta = 1 + T_1/T_2$; quindi per avere un'efficienza completa (unitaria) di conversione del calore in lavoro occorrerebbe che uno dei due termostati, quello a temperatura T_1 , si trovasse a $T_1 = 0$. Ricordando che non è possibile raffreddare un corpo allo zero (assoluto), si ottiene che l'efficienza della macchina è sempre < 1 , anche considerando una successione specifica di trasformazioni ed impiegando un gas perfetto. Tenete conto, poi, che una macchina reale, ad esempio un motore a scoppio in cui le due temperature rilevanti sono quella della combustione e quella dell'impianto di raffreddamento, ha numerose forme di dissipazione di energia (pensate solo agli attriti), e quindi si può concludere tranquillamente che la trasformazione di calore in lavoro meccanico è un processo che ha una resa poco conveniente. A parte la sua importanza in termini fondamentali, questo aspetto è di rilievo anche nel bilancio globale dell'energia per il nostro pianeta, con tutti i (noti) problemi che a questo sono connessi.