Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2004/05
parte 6

Francesco Fuso[1]

Dipartimento di Fisica, Università di Pisa

Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 3a - 04.01.05

[1]tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

Indice

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce dalle lezioni del Modulo di Fisica per il corso di Matematica e Fisica per studenti di STPA (e TACREC), non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario o di scuola media superiore. Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, senza discorsi, senza tabelle e con pochissime figure[1], è soprattutto quello di fornire una sorta di "programma esteso" del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Nota importante: a partire dalla Versione 2b, alcune parti del testo, alcuni esercizi ed alcune note a pié di pagina, indicate con il simbolo **FAC** , sono da ritenersi di studio *facoltativo* per gli studenti dei corsi di laurea STPA e TACREC.

Revisioni:

1. Versione 1, 14.09.04: non rilasciata;
2. Versione 2, 18.10.04: cap.1, cap.2 con revisioni sostanziali;
3. Versione 2b, 22.10.04: cap.1, cap.2 con correzioni minori, cap.3; introdotta indicazione delle parti facoltative;
4. Versione 2c, 30.10.04: modifiche minori ai parr.2.4.1, 3.9, 3.10.6 ed altre aggiunte facoltative; aggiunto es.3.10.1; cap. 4;
5. Versione 2d, 08.11.04: correzione di errore di stampa nella soluzione del par.4.7.1; dichiarato FAC il par.4.7.2;
6. Versione 3, 10.12.04: modifiche minori ai parr.3.11, 4.3, 4.9; cap. 5;
7. Versione 3a, 02.01.05: qualche correzione di battitura al cap. 5; cap. 6; cap. 7

[1] A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 7

Circuiti elettrici, resistenze e condensatori

In questo capitolo vogliamo soffermarci su alcuni aspetti dell'elettricità che riguardano in particolare il comportamento dei circuiti elettrici. Partendo da quanto osservato nel capitolo precedente per i fluidi reali, tratteremo brevemente delle cause che provocano il movimento delle cariche che formano le correnti elettriche e vedremo definizioni e concetti fondamentali della resistenza elettrica. Sempre sfruttando un approccio che privilegia il parallelo tra fluidi e correnti, al termine del capitolo tratteremo brevemente del concetto di capacità elettrica e dei condensatori.

7.1 Conduzione elettrica nei metalli

Le conclusioni che abbiamo tratto a proposito del moto di fluidi reali in un condotto hanno una diretta ed interessante applicazione al caso delle correnti elettriche. Abbiamo già avuto modo di stabilire che la corrente elettrica può essere vista come il moto di un fluido fatto di cariche elettriche, che, nel caso di conduzione in un filo elettrico (metallico), è costituito di elettroni. Abbiamo già anticipato che gli elettroni che producono la corrente possono essere considerati in moto "relativamente libero", cioè non seguono in modo completo e totale le sollecitazioni (di natura elettrica) a cui sono sottoposti, un po' come si verifica con i sistemi viscosi, nei quali si originano forze (di attrito) che tendono ad opporsi alle forze esterne. Questo ci suggerisce che le correnti elettriche che scorrono in un filo conduttore siano assimilabili in buona misura a fluidi reali, cioè viscosi.

Notiamo che il punto chiave di questa similitudine è nel fatto che il moto degli elettroni non può essere considerato come totalmente libero, aspetto che può essere modellato con la presenza di una forza di attrito viscoso che si oppone al moto. Gli effetti di questa "viscosità" non si riflettono, in questo caso, in una distribuzione disomogenea delle velocità degli elettroni all'interno del filo, come nel caso dei fluidi in regime laminare. Infatti, almeno nel caso di correnti continue (stazionarie), la velocità (media) di flusso degli elettroni può essere considerata omogenea ed uniforme all'interno del filo. Resta però il fatto che questa velocità non è la stessa che si avrebbe se gli elettroni potessero muoversi in modo completamente libero.

Vediamo qual è il meccanismo microscopico[1] che dà luogo a questo comportamento. Nel capitolo precedente abbiamo descritto un modello per un materiale conduttore, facendo riferimento ad un pezzo di filo di rame. Elementi di quel modello erano gli elettroni di conduzione e gli ioni del reticolo cristallino; è chiaro che il moto degli elettroni avviene all'interno del reticolo di ioni (supposti fermi, o al massimo dotati di moto di agitazione termica), e quindi è ragionevole supporre che sia possibile avere *urti* tra gli elettroni e gli ioni. Anche considerando questi urti come elastici, approssimazione in parte ragionevole vista la grande differenza di massa tra i partners collisionali considerati, il loro effetto è quello di modificare le caratteristiche del moto degli elettroni, in particolare la *direzione* assunta dalla velocità. Si può dimostrare, come accenneremo in un prossimo paragrafo, che la presenza di questi urti dà luogo ad effetti simili a quelli che si hanno in un moto viscoso. Quindi siamo autorizzati a "trasferire" alcune delle osservazioni fatte per i fluidi reali (viscosi) alle correnti elettriche.

7.1.1 Generatori di differenza di potenziale elettrica

Il risultato più eclatante relativo al comportamento dei fluidi reali è il legame tra differenza di pressione e portata attraverso la resistenza idraulica, legame di cui ripetiamo qui l'espressione: $\Delta P = \mathcal{R}_{idr} Q_V$. Quando abbiamo introdotto il concetto di corrente elettrica come fluido di cariche elettriche (elettroni, nel caso della conduzione in un metallo), abbiamo detto che l'"analogo concettuale" della portata Q_V è ben rappresentato dalla *corrente elettrica* I. Per "trasferire" la legge della resistenza idraulica nell'ambito elettrico dobbiamo individuare l'"analogo concettuale" della differenza di pressione.

Iniziamo con il notare che la differenza di pressione rappresenta, per un fluido, il "motore" che lo fa muovere; infatti, supponendo un condotto di sezione costante, una differenza di pressione tra due punti del condotto implica uno sbilanciamento delle forze che agiscono sul fluido, sbilanciamento che produce un movimento del fluido stesso. Se consideriamo un fluido fatto di cariche elettriche, dobbiamo ovviamente tenere in conto le forze specifiche che agiscono sulle cariche elettriche, cioè le forze di natura elettrica. Ricordiamo che le forze di natura elettrica $\vec{F}_E$ su una carica elettrica di valore e ($e < 0$ nel caso di un elettrone, che porta una carica elementare negativa) sono collegate alla presenza di *campi elettrici* $\vec{E}$; si ha infatti $\vec{F}_E = e\vec{E}$. Associato al concetto di campo elettrico c'è quello di *differenza di potenziale* V, che, ricordiamo, rappresenta in sostanza il lavoro fatto dalle forze del campo per *spostare* una carica unitaria (cioè di valore 1 Coulomb). Allora risulta ragionevole individuare proprio nella differenza di potenziale V

[1] Il modello a cui facciamo riferimento, di cui daremo dei dettagli in un prossimo paragrafo, si basa su una visione classica della dinamica degli elettroni; in realtà queste particelle, nelle condizioni in cui si trovano, dovrebbero essere trattate come entità *quantistiche*, cosa che imporrebbe di utilizzare un insieme di leggi che non hanno corrispondenza nella meccanica classica, della quale ci siamo occupati. Curiosamente, però, i risultati essenziali del modello classico permettono di prevedere in modo ragionevolmente accurato anche il comportamento quantistico della conduzione.

(detta anche *tensione* elettrica) l'"analogo concettuale" della differenza di pressione che stavamo cercando.

In sostanza, allora, quando un pezzo di materiale conduttore, ad esempio un filo di rame, è sottoposto ad una differenza di potenziale, le cariche di conduzione (gli elettroni) si mettono in movimento. A parte una questione relativa ai segni, sulla quale non entriamo in questa sede, la differenza di potenziale che fa muovere le cariche si può anche chiamare *forza elettromotrice*, un nome parecchio appropriato visto il ruolo giocato dalla differenza di potenziale nel movimento degli elettroni. I *generatori di differenza di potenziale*, cioè i dispositivi che permettono di generare una forza elettromotrice, possono essere allora considerati come qualcosa di simile a quello che le pompe sono per i fluidi: essi, infatti, fanno circolare le cariche da regioni a potenziale più alto a quelle di potenziale più basso[2], generando una corrente. I generatori di cui ci occuperemo in questi appunti sono **ideali**, cioè ai loro capi si ha sempre la stessa differenza di potenziale a prescindere dalla quantità di corrente che circola nel circuito[3]. Inoltre, come già fatto notare, ci concentreremo su generatori di differenza di potenziale *continua*, cioè costante nel tempo, e quindi trascureremo di trattare casi *alternati*, come ad esempio si ha per le linee elettriche domestiche. Ribadiamo comunque che, a parte una continua inversione del senso della corrente (50 volte al secondo per le linee elettriche domestiche), le differenze con i casi continui sono abbastanza marginali.

Un generatore di differenza di potenziale V compie, ovviamente, un certo lavoro: se ricordate la definizione di differenza di potenziale, potrete facilmente dedurre che il lavoro $\mathcal{L}_E$ su una *singola* carica e vale $\mathcal{L}_E = eV$. Se il generatore deve compiere questo lavoro, per motivi generali di bilancio energetico esso deve ricevere una certa quantità di energia. Pensate ai generatori di differenza di potenziale che conoscete: sarà facile individuare la sorgente di energia per ognuno di loro. Ad esempio, la dinamo della bicicletta prende energia dalle vostre pedalate, la turbina di una centrale elettrica dalla combustione di carbone o metano, o dall'energia gravitazionale associata a masse di acqua nel caso di centrali idroelettriche, una batteria l'energia se la prende da reazioni elettrochimiche (ad esempio, ossidoriduzioni) che avvengono al suo interno. Insomma, il generatore ha in qualche modo il ruolo di convertire[4] fonti di energia di un qualche tipo in energia di tipo elettrico, che è quella che fa muovere le cariche all'interno di un circuito.

7.1.2 Legge di Ohm e resistività

Ora che abbiamo stabilito gli "analoghi concettuali" di portata e differenza di pressione, possiamo scrivere per la corrente elettrica in un filo conduttore: $V = RI$; la grandezza R che vi compare ha il nome di **resistenza elettrica**, una definizione ben nota a tutti, ed ha

[2]Notate che in realtà il senso di questa circolazione cambia se si considerano degli elettroni, cioè cariche di segno negativo.

[3]**FAC** Un *generatore reale* si può immaginare come un generatore ideale con una resistenza elettrica - vedi dopo - collegata in serie. In un prossimo esercizio vedremo gli effetti che questa configurazione ha sulla V effettiva generata.

[4]Ovviamente l'efficienza di questa conversione non è mai totale, e quindi in genere dell'energia viene sprecata nella conversione.

nei confronti del fluido di cariche elettriche lo stesso ruolo giocato dalla resistenza idraulica per un fluido reale. In parole povere, la resistenza indica il grado di "difficoltà" che gli elettroni devono superare per attraversare un dato filo (o circuito) elettrico. Notate che le dimensioni della resistenza elettrica sono specifiche, e sono una differenza di potenziale divisa per una corrente; nel sistema da noi impiegato, R si misura in V/A, unità a cui si dà il nome di ohm, spesso indicata con la lettera greca Ω. Alla legge che lega differenza di potenziale alla corrente si dà spesso il nome di *legge di Ohm*.

La resistenza elettrica è dunque una caratteristica specifica di un elemento conduttore: essa dipenderà dalla geometria (ad esempio, per un filo cilindrico, lunghezza e sezione) e dalla natura, cioè dal tipo di materiale (conduttore) impiegato. È ragionevole supporre che questa dipendenza segua, a grandi linee, le proprietà della resistenza fluida, in particolare che R dipenda linearmente dalla lunghezza L del filo, ed in modo inversamente proporzionale dalla sua sezione S. Infatti si ha: $R = \rho_R L/S$, dove la costante di proporzionalità ρ_R, detta **resistività elettrica**, dipende dal materiale (e dalle condizioni della misura, in particolare dalla temperatura) e si misura in ohm m (verificate che questa scelta faccia tornare le dimensioni!). Il valore di ρ_R si trova nelle tabelle: per il rame si ha $\rho_R \sim 10^{-8}$ ohm m. Fate attenzione al fatto che spesso si utilizza anche una grandezza, che indichiamo con il simbolo σ_R, che è detta *conducibilità elettrica* ed è il reciproco della resistività, cioè $\sigma_R = 1/\rho_R$ (ovviamente le unità di misura di σ_R sono 1/(ohm m)).

Come si può facilmente intuire, per ottenere una resistenza elettrica non è obbligatorio servirsi di un filo, ed in effetti esistono numerose possibilità (di geometria, forma, materiali, etc.) per realizzare dei dispositivi, detti **resistori** elettrici (anche semplicemente resistenze elettriche) dotate di una certa resistenza. A seconda delle applicazioni, esistono resistori con una grandissima varietà di valori della resistenza, da frazioni di ohm, a milioni di ohm (1 Mohm = 10^6 ohm), e oltre.

Notate, infine, che tutto quanto abbiamo affermato a proposito dell'andamento della resistenza idraulica nei collegamenti in serie e parallelo si trasferisce direttamente al caso elettrico: date due resistenze elettriche R_1 ed R_2 si ha che la resistenza complessiva R_{tot} vale:

- $R_{tot} = R_1 + R_2$ per un collegamento **in serie**;
- $\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ per un collegamento **in parallelo**.

La Fig.7.1.2 riporta la simbologia adottata in elettrotecnica per indicare un generatore di differenza di potenziale continua, un resistore, una serie e un parallelo di resistori, ed infine un condensatore, elemento circuitale di cui parleremo in seguito.

7.1.3 Esercizio: resistenza di un materiale

Dovete misurare la resistività ρ_R di un materiale conduttore incognito. A questo scopo preparate un filo cilindrico (omogeneo) con raggio di base $r = 1.0$ mm e lunghezza $L = 50$ cm, che collegate ad un generatore (ideale) di differenza di potenziale $V = 10$ V. Con uno strumento specifico (*amperometro*), misurate la corrente che, in condizioni stazionarie

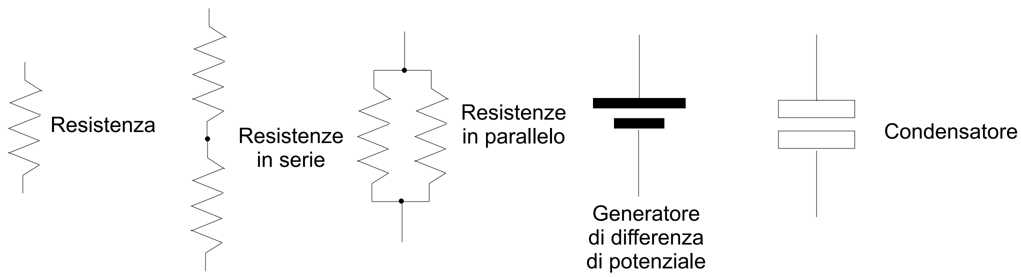

Figura 7.1: Simbologia adottata in elettrotecnica per indicare diversi elementi e collegamenti circuitali.

(cioè dopo che si è raggiunta una situazione di equilibrio), risulta $I = 100$ mA. Quanto vale ρ_R per questo materiale?

Soluzione. La misura che eseguite vi suggerisce che la resistenza del campione di filo vale $R = V/I$; d'altra parte, la resistenza R del filo deve valere, in funzione dei parametri costruttivi e della resistività (incognita) del materiale, $R = \rho_R L/S$, con $S = \pi r^2$ sezione del filo. Uguagliando le due espressioni per la resistenza, e riarrangiando, si ottiene: $\rho_R = V\pi r^2/(LI)$. Numericamente, e facendo attenzione ad usare unità di misura "coerenti", si ottiene $\rho_R = 6.3 \times 10^{-4}$ ohm m (visto il valore piuttosto elevato della resistività, si tratta di un materiale debolmente conduttore, o, meglio, *semiconduttore*).

7.1.4 Esercizio: due resistenze identiche in parallelo

Un numero N di resistori identici di resistenza R sono collegati in parallelo; quanto vale la resistenza totale R_{tot} del circuito?

Soluzione. Per il collegamento in parallelo di resistori si ha $\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + ...$, dove la somma è estesa su un numero N di frazioni $\frac{1}{R}$ identiche. Si ottiene allora $\frac{1}{R_{tot}} = \frac{N}{R}$, da cui $R_{tot} = \frac{R}{N}$; se, ad esempio, si hanno solo due resistori ($N = 2$), si trova $R_{tot} = \frac{R}{2}$, cioè la resistenza di un parallelo di due resistenze identiche si dimezza.

7.1.5 Esercizio: il partitore resistivo

Due resistori elettrici, di resistenza $R_1 = 100$ Kohm $= 10^5$ ohm, e $R_2 = 1$ Mohm $= 10^6$ ohm, sono collegati in serie a un generatore (ideale) di differenza di potenziale $V = 110$ V. Quanto valgono le differenze di potenziale V_1 e V_2 ai capi dei due resistori?

Soluzione. Nella serie delle due resistenze scorre una corrente (la stessa per le due resistenze, essendo esse collegate in serie!) che vale $I = V/R_{tot}$, dove $R_{tot} = R_1 + R_2$ per il collegamento in serie; le differenze di potenziale V_1 e V_2 ai capi dei due resistori si ottengono moltiplicando questa corrente per i valori delle resistenze. Quindi $V_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1+R_2}V = 10$ V e $V_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}V = 100$ V. Quindi la differenza di potenziale "totale" V viene "suddivisa" tra le resistenze (per questo il circuito in questione si può chiamare *partitore resistivo*) in frazioni inversamente proporzionali ai valori delle resistenze. Notate che, come deve essere, si ha $V = V_1 + V_2$.

7.1.6 Esercizio (FAC): il generatore reale

Come accennato nel testo, un generatore di differenza di potenziale reale può essere immaginato come un generatore ideale V_{idea} seguito da una resistenza *interna* R_{int} in serie. Se si suppone di collegare un *carico resistivo* R al generatore reale, quanto vale la differenza di potenziale V ai suoi capi?

Soluzione. Il circuito ottenuto collegando il carico al generatore reale somiglia da vicino al partitore resistivo dell'esercizio precedente. Quindi $V = V_{idea}\frac{R}{R+R_{int}}$, che è evidentemente minore rispetto a V_{idea}, tanto più quanto più è alta la resistenza interna R_{int}.

7.1.7 Potenza elettrica e dissipazione per effetto Joule

Proseguiamo ora nel nostro parallelo tra fluidi (reali) e corrente elettrica, interessandoci della *potenza* associata al movimento di cariche in un conduttore. Nel capitolo precedente avevamo visto che la potenza W associata alle forze di pressione, in particolare ad una differenza di pressione ΔP, vale $W = \Delta P Q_V$, dove Q_V è la portata (in volume) del condotto considerato. Tenendo conto degli "analoghi concettuali" che valgono nel caso della corrente elettrica, è facile convincersi che, per un circuito elettrico in cui scorre una corrente I sotto l'effetto di una differenza di potenziale V, si ha $W = VI$; combinando questa legge con quella di Ohm, è possibile esprimere la potenza (elettrica) in questi modi alternativi, in cui compare esplicitamente il valore della resistenza R: $W = V^2/R$; $W = RI^2$. Notate, comunque, che il concetto di potenza elettrica e la sua legge prescindono dalla presenza di una resistenza elettrica, ed in particolare dal fatto che ci sia una corrente che scorre in un filo elettrico, anche se in seguito faremo riferimento soprattutto a questa situazione. Infatti l'esistenza di una potenza elettrica rappresenta la capacità dei processi di natura elettrica (campi, forze, etc.) di produrre lavoro, che è sfruttata in moltissimi settori: pensate ad esempio ai motori elettrici, in cui cariche elettriche e il loro movimento vengono sfruttate per produrre un lavoro meccanico. La potenza *elettrica* di un motore è proprio data dal prodotto $W = VI$, dove in questo caso V rappresenta la tensione elettrica di lavoro del motore, ed I è la corrente che vi fluisce. Ovviamente la potenza *meccanica* che il motore è in grado di fornire è minore, a causa degli (inevitabili) fenomeni di attrito e dissipazione di energia.

È interessante notare che le forze del campo elettrico, che sono quelle che fanno muovere le cariche e quindi sono responsabili della potenza elettrica, producono sempre un lavoro positivo, e pertanto anche la potenza elettrica è sempre positiva. Questa affermazione potrebbe sembrare contraddetta nel caso delle correnti alternate, in cui, come abbiamo detto, il verso di scorrimento delle cariche cambia continuamente di segno. Se, però, prendiamo ad esempio la relazione $W = V^2/R$ che abbiamo scritto prima, possiamo notare che il cambio di segno di V viene "perso" quando la grandezza viene elevata al quadrato (e, naturalmente, la resistenza R è sempre definita positiva). Infatti quando cambia segno la differenza di potenziale anche la corrente cambia il suo verso, per cui è ragionevole che il segno della potenza non cambi nel tempo. Quindi la potenza elettrica risulta sempre positiva, nel senso che le forze elettriche "fanno sempre fatica" per spostare le cariche (gli elettroni).[5]

Restringendoci a considerare la potenza elettrica nel caso di passaggio di corrente in elementi resistivi (un filo, un resistore, etc.), è istruttivo chiedersi quale effetto microscopico sia ad essa legato. Abbiamo già brevemente citato l'origine microscopica della resistenza elettrica basata sugli urti fra elettroni e ioni del reticolo. In ogni singolo evento di urto, parte dell'energia cinetica dell'elettrone in moto può essere trasferita ad uno ione (l'urto è allora anelastico), che quindi si trova ad aumentare la sua velocità. Ma lo ione, facendo parte del reticolo cristallino, può solo compiere delle (piccole) oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio, che abbiamo individuato come moto di agitazione *termica*. Se gli urti con gli elettroni "incrementano" gli effetti di agitazione termica, è lecito aspettarsi che la *temperatura* del reticolo cristallino, e quindi del materiale, aumenti. Questo effetto prende il nome di *dissipazione per effetto Joule*, e si tratta di una "dissipazione" di energia elettrica che va in calore (cioè in aumento della temperatura di un sistema materiale). Questo effetto è sfruttato ampiamente in molte applicazioni: pensate alla resistenza di una stufetta elettrica, o di un fornello elettrico, in cui il "calore Joule" serve per riscaldare i corpi posti a contatto (o *irraggiati*) da un resistore elettrico. Anche una lampadina, specie quelle di tipo a filamento, sfrutta la dissipazione Joule per produrre, oltre al calore che si avverte avvicinandovi la mano, anche dell'energia luminosa[6]. Notate che lo scambio di energia tra elettroni e ioni del reticolo è un ingrediente fondamentale per permettere questi impieghi pratici: a causa della loro piccola massa, che si traduce in una *capacità termica* praticamente trascurabile, la temperatura degli elettroni, benché elevata, non sarebbe in grado di produrre riscaldamento di corpi (e neanche la conseguente emissione di radiazione luminosa come nel caso delle lampadine).

7.1.8 Esercizio: lo scaldabagno elettrico

Uno scaldabagno elettrico è costituito da un recipiente *isolato termicamente* verso l'esterno (supponiamo, poco realisticamente, che sia isolato in modo perfetto, cioè non vi sia alcuno scambio di calore con l'esterno) che contiene un riscaldatore elettrico costituito da una resistenza di valore $R = 10$ ohm collegata ad un generatore (ideale) di differenza di potenziale $V = 220$ V. Se il boiler contiene una massa $m = 99$ Kg di acqua (che qui supponiamo abbia calore specifico $c = 4.2$ J/(Kg °C), per quanto tempo Δt la resistenza deve essere collegata al generatore se si vuole che la temperatura dell'acqua cresca di $\Delta T =$

[5] **FAC** Per essere più precisi, occorre osservare che con la corrente alternata la potenza diventa una funzione del tempo, cioè si ha, per intendersi, $W(t) = (V(t))^2/R$. Se la corrente alternata è descritta da una (semplice) funzione sinusoidale, ad esempio $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, con $\omega = 2\pi/\{$, { essendo la frequenza (è $\{ = 50$ Hz per la rete elettrica nazionale), allora l'andamento funzionale di $W(t)$ va come il quadrato di un coseno. È spesso utile definire il *valore medio* della potenza $< W(t) >$, che in questo caso risulta essere pari a $(1/2)V_0^2/R$.

[6] Il calore che si irraggia e la radiazione luminosa sono in pratica manifestazioni dello stesso tipo, cioè delle *radiazioni elettromagnetiche* in grado di trasportare dell'energia; la radiazione luminosa ha caratteristiche di *frequenza*, ovvero *lunghezza d'onda*, tali che il nostro occhio riesce a rivelarla.

58°C? (Supponete che tutto il calore prodotto dalla resistenza elettrica sia acquistato dall'acqua)

Soluzione. Come abbiamo ampiamente visto nel capitolo dedicato a temperatura e calore, per riscaldare la massa d'acqua presente nello scaldabagno occorre fornirle una quantità di calore $Q = mc\Delta T$; secondo le ipotesi dell'esercizio, questo calore è fornito dalla dissipazione Joule del riscaldatore elettrico, la cui potenza vale $W = V^2/R$. Ricordando che il calore è una forma di energia e che la potenza è un'energia divisa per un tempo, si ha che per ottenere il riscaldamento richiesto occorre che sia soddisfatta l'uguaglianza $W\Delta t = Q$; si ottiene quindi $\Delta t = mc\Delta TR/V^2 \approx 5.0$ s. Questo tempo è molto minore di quanto si può riscontrare realisticamente; infatti nella realtà è impossibile sia ottenere uno scambio perfetto e completo di calore tra resistenza e liquido, che evitare dispersioni di calore verso l'esterno. Entrambi questi effetti tendono ad allungare il tempo necessario per il riscaldamento, e inoltre la presenza di dispersioni implica che il calore debba essere fornito continuativamente al liquido perché questo mantenga una certa temperatura, come sa bene chi spegne la sera lo scaldabagno e la mattina trova l'acqua gelida!

7.1.9 Esercizio: potenza e resistenze in serie e parallelo

Avete due resistori di uguale resistenza R ed un generatore (ideale) di differenza di potenziale V. Quanto vale la potenza W dissipata per effetto Joule se le due resistenze vengono collegate tra loro in serie o in parallelo?

Soluzione. Si ha $W = V^2/R_{tot}$, dove $R_{tot} = 2R$ per un collegamento in serie, ed $R_{tot} = R/2$ per il parallelo. Dunque la potenza dissipata sarà nei due casi rispettivamente: $W_{\text{serie}} = V^2/(2R)$ e $W_{\text{parallelo}} = 2V^2/R$. Evidentemente il collegamento in parallelo dà luogo a una maggiore dissipazione (a parità di differenza di potenziale!), dovuta al fatto che la corrente che scorre nel circuito aumenta rispetto a quella che si ha nel collegamento in serie.

7.2 Un modello microscopico per la conduzione elettronica (FAC)

L'approccio che abbiamo seguito per trattare delle problematiche elettriche (resistenza, corrente nei conduttori, etc.) ha privilegiato l'aspetto macroscopico, e quindi l'uso di grandezze come differenza di potenziale e corrente che non riguardano direttamente meccanismi che coinvolgono le singole cariche. Infatti abbiamo derivato le nostre affermazioni in un parallelo con quanto avevamo stabilito per i fluidi reali, con un approccio che trascurava di trattare i fenomeni che si verificano per ogni singola molecola del fluido considerato. Tuttavia abbiamo già ricordato che è semplice delineare un modello (microscopico) di conduzione in un metallo in cui gli urti tra elettroni e ioni del reticolo giocano un ruolo determinante per dare origine alla resistenza elettrica.

Vediamo più nel dettaglio alcune conseguenze del modello. Quanto discuteremo rappresenta l'ingrediente di base di una interpretazione *classica* della conduzione elettronica in un metallo, nota come *modello di Drude.* Supponiamo che nel nostro pezzo di metallo sia presente un campo elettrico $\vec{E}$ uniforme e costante, che è quello che dà origine alla forza elettromotrice, cioè la differenza di potenziale tra i vari punti del nostro metallo. Più precisamente, ricordando quanto abbiamo detto a proposito della differenza di potenziale e del suo legame con il campo elettrico, se supponiamo di avere un metallo di forma cilindrica (un filo lungo L) e che il campo sia diretto lungo l'asse del cilindro, allora la differenza di potenziale ai capi del filo stesso vale $V = EL$.

L'equazione del moto per un elettrone *libero* di massa m e carica e (si ha $e < 0$, visto che l'elettrone è carico negativamente) sottoposto all'azione del campo $\vec{E}$ è $m\vec{a} = e\vec{E}$ (ricordate che il campo elettrico moltiplicato per la carica dà la forza che agisce sulla carica stessa!). Quindi si ottiene un'accelerazione $\vec{a} = (e/m)\vec{E}$, diretta come il campo elettrico (il verso è opposto a causa della carica negativa dell'elettrone, ma questo aspetto è poco rilevante nel contesto del modello che stiamo sviluppando), quindi lungo la direzione assiale del filo, e costante ed uniforme. Pertanto la velocità dell'elettrone $\vec{v}$ crescerebbe indefinitamente con il tempo t , cioè sarebbe $\vec{v} = \vec{a}t = (e/m)\vec{E}t$. In effetti, però, a causa degli urti tra elettroni e ioni del reticolo il moto degli elettroni può essere considerato libero *solo tra un urto e il successivo.* Infatti, in seguito all'urto la *direzione* della velocità cambia[7], e quindi è come se l'elettrone "perdesse memoria" di quanto avvenuto prima, incluso il fatto di essere stato accelerato fino ad allora dal campo. Supponiamo che gli urti si succedano *mediamente* dopo intervalli di tempo τ_{coll}; è chiaro che il valore di τ_{coll} dipende dalle caratteristiche del materiale considerato, in paticolare dalla densità e dalla distribuzione spaziale degli ioni del reticolo, e dalla loro "dimensione" (gli urti saranno più frequenti se gli ioni occupano uno spazio maggiore)[8]. Allora la velocità che *mediamente* gli elettroni assumono[9] per effetto del campo elettrico applicato vale $\overrightarrow{v}_{\mathrm{drift}} = \vec{a}\tau_{\mathrm{coll}} = (e/m)\vec{E}\tau_{\mathrm{coll}}$; osservate che il valore di questa velocità (detta di "drift", cioè di "deriva") è limitato superiormente, cioè si tratta di una sorta di "velocità limite" come quella che avevamo incontrato trattando del moto di un corpo in un fluido *viscoso.* Anche da questa semplice analisi possiamo quindi ricavare l'informazione che il modello

[7]Notate che, se l'urto viene considerato elastico, il modulo della velocità non cambia, dovendosi conservare l'energia cinetica, ma ugualmente la direzione del moto può cambiare.

[8]In questo ambito, notate che il moto di agitazione termica di cui sono dotati gli ioni influisce sul meccanismo che stiamo descrivendo. Infatti esso può essere visto come una fluttuazione continua della posizione degli ioni attorno ad una posizione di equilibrio; all'aumentare della temperatura, l'ampiezza spaziale di questa fluttuazione tende ad aumentare, e allora ci si può aspettare che la frequenza degli urti tra elettroni e ioni aumenti con la temperatura. In effetti molti materiali, generalmente tutti i conduttori metallici, presentano, in conseguenza di questo, una resistenza elettrica che tende ad aumentare con la temperatura, fenomeno che viene sfruttato anche per costruire termometri in cui dalla misura della resistenza elettrica si risale, attraverso opportune calibrazioni, alla misura della temperatura.

[9]Per essere precisi, notate che gli elettroni di conduzione del metallo se ne stanno tutt'altro che fermi anche in assenza di un campo elettrico applicato. Infatti essi sono comunque dotati di un moto di agitazione termica dovuto al fatto che si trovano a temperatura diversa dallo zero assoluto. Però questo moto è "disordinato", nel senso che *direzione e il verso* sono distribuiti casualmente fra tutti gli elettroni. Mediando su tutti gli elettroni, il risultato è una velocità media nulla, dato che per ogni elettrone che si muove in una certa direzione e verso con un certo modulo della velocità si troverà sempre un altro elettrone che si muove in verso opposto, con un risultato complessivo nullo ai fini della corrente trasportata.

che stiamo trattando ha una qualche affinità con fenomeni in cui si ha attrito di tipo viscoso[10].

Dunque, nel nostro modello gli elettroni di conduzione del metallo, non essendo completamente liberi, non vengono accelerati dal campo elettrico, cioè dalla forza elettromotrice, fino ad una velocità dipendente linearmente dal tempo, ma assumono (tutti mediamente) la stessa velocità di drift che dipende dal tipo di materiale considerato attraverso il parametro $\tau_{\rm coll}$.

7.2.1 Legge di Ohm microscopica (FAC)

Nel precedente capitolo avevamo accennato, in un paragrafo facoltativo, al legame tra velocità dei portatori di carica (gli elettroni) e densità di corrente $\vec{J}$; in particolare, detta n la densità spaziale degli elettroni (di carica e) di conduzione nel metallo, si era trovato $\vec{J} = ne\vec{v}$. Ricordiamo anche il legame che esiste tra densità di corrente e corrente (macroscopica!) I: la corrente è il *flusso* del vettore $\vec{J}$ sull'intera superficie del "condotto" (cioè la sezione del filo elettrico che stiamo considerando). Nel caso in cui $\vec{J}$ non dipende dalla posizione ed è diretto lungo l'asse, come in genere si verifica nelle situazioni che intendiamo considerare, si ha semplicemente $I = |\vec{J}|S$, dove S è la sezione del filo.

Se assumiamo che la velocità degli elettroni sia $\overrightarrow{v}_{\rm drift} = (e/m)\vec{E}\tau_{\rm coll}$, come abbiamo determinato nel paragrafo precedente, allora possiamo scrivere: $\vec{J} = \frac{ne^2\tau_{\rm coll}}{m}\vec{E}$, cioè la densità di corrente dipende linearmente dal vettore campo elettrico applicato attraverso un fattore che contiene delle costanti valide per tutti i materiali (e ed m, che sono sempre gli stessi!) e delle grandezze caratteristiche dello specifico materiale conduttore considerato (n e, soprattutto, $\tau_{\rm coll}$); chiamiamo σ il fattore che abbiamo determinato, cioè scriviamo $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, con $\sigma = \frac{ne^2\tau_{\rm coll}}{m}$, e chiediamoci se questo fattore ha un qualche significato alla luce della trattazione macroscopica che abbiamo svolto nei paragrafi precedenti.

A questo scopo, cominciamo con il riprendere la legge di Ohm (macroscopica), che scriviamo qui nel modo seguente: $I = V/R$. Ora, abbiamo già che, nel caso semplice che intendiamo trattare, si ha $I = |\vec{J}|S$, con S sezione del filo; d'altra parte abbiamo anche già notato come, supponendo un campo costante e diretto lungo l'asse del filo, si abbia $V = |\vec{E}|L$, dove L è la lunghezza del filo. Quindi possiamo sostituire queste grandezze nella legge di ohm (macroscopica), ottenendo (in questa espressione togliamo i segni di modulo ai vettori, dato che si tratta in effetti di un'uguaglianza *vettoriale*): $\vec{J}S = \vec{E}L/R$; se poniamo $L/(RS) = \sigma$ ritroviamo la relazione $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, che avevamo già trovato prima. Per come l'abbiamo "ri-ottenuta", è chiaro che questa relazione ha a che fare con la legge di Ohm, solo che in essa compaiono grandezze (la densità di corrente ed il campo elettrico) che possono dipendere dalla posizione, e, in particolare, possono cambiare su scala microscopica. Questo è il motivo per cui spesso si dà a questa relazione il nome di *legge di Ohm microscopica.*

[10]Un modello concettualmente molto simile, basato sugli urti tra molecole del fluido e superficie del corpo, si potrebbe sviluppare ed applicare per interpretare proprio le forze di attrito viscoso nel moto di un corpo in un fluido reale. Quindi la viscosità coinvolge sempre, a livello microscopico, degli urti.

Infine, diamo ora il significato che stavamo cercando per la grandezza σ introdotta prima. Ricordiamoci che, macroscopicamente, avevamo legato la resistenza R di un conduttore (cilindrico) alla sua natura e alla sua geometria attraverso la relazione $R = \rho_R L/S$, con ρ_R resitività del materiale. Avevamo anche introdotto la *conducibilità* del materiale, $\sigma_R = 1/\rho_R$, che dà una specie di misura di quanto gli elettroni di conduzione sono "liberi" di muoversi nel materiale considerato (un ottimo conduttore ha un'elevata conducibilità, e una bassa resistività!). Confrontando le varie relazioni che abbiamo scritto, troviamo proprio che σ_R (definita macroscopicamente, o, meglio, in un modo piuttosto *empirico* per tenere conto delle differenze tra vari materiali conduttori) coincide con la σ che abbiamo dedotto dal modello microscopico. Dunque possiamo concludere il nostro percorso affermando che siamo riusciti a giustificare le affermazioni che abbiamo presentato nei precedenti paragrafi basandoci su un modello abbastanza realistico per il moto (classico!) degli elettroni in un metallo. Tanto per avere un'idea delle grandezze in gioco, potete provare a determinare il valore di τ_{coll} nel caso del rame: introducendo valori realistici per n e considerando i valori di m ed e per un elettrone, dal confronto con i valori di ρ_R per il rame si trova che il tempo che intercorre tra urti successivi che coinvolgono elettroni e ioni del reticolo è compreso tra 10^{-13} s e 10^{-14} s, cioè nel nostro modello (classico!) le collisioni si succedono con una frequenza molto alta, che, in pratica, corrisponde ad affermare che un elettrone urta (quasi) con ogni ione del reticolo che si trova ad incontrare nel suo cammino.

7.2.2 Potenza e forze elettriche (FAC)

Concludiamo questa sezione tornando ad occuparci della potenza dissipata per effetto Joule. Anche in questo caso ne avevamo dato, nei paragrafi precedenti, un'espressione basandoci sul parallelo con il caso dei fluidi, trovando che essa valeva $W = VI$. Siamo comunque in grado di trovare delle relazioni che si basano sull'espressione esplicita del lavoro compiuto dalle forze elettriche, come dimostreremo in questo paragrafo.

Se consideriamo una carica singola, cioè un singolo elettrone di conduzione del nostro metallo (stiamo sempre pensando alla situazione semplice di un filo cilindrico di materiale metallico, per esempio il rame, interessato da un campo elettrico costante ed uniforme), la potenza sviluppata dalle forze elettriche si ottiene come abbiamo visto in meccanica. In sostanza, essendo il campo costante (indichiamone il modulo con E), si ha una forza costante che vale in modulo eE; il lavoro si ottiene moltiplicando tale forza per lo spostamento, e la potenza w (notate che stiamo usando un carattere minuscolo per indicare che è la potenza relativa allo spostamento di una singola carica) si ottiene dividendo tale lavoro, che è sempre positivo, come abbiamo osservato prima, per il tempo necessario ad ottenere lo spostamento considerato. Tenendo conto della definizione di velocità, tale potenza risulta quindi $w = eEv$, dove v è il modulo della velocità degli elettroni, e coincide con v_{drift} che abbiamo determinato prima.

Allo scopo di considerare *tutti* gli elettroni, dobbiamo moltiplicare w per il numero N di elettroni coinvolti nel processo di conduzione. A tale scopo notiamo che il volume del tratto di filo considerato (di sezione S e lunghezza L) vale SL, e quindi, detta n la densità spaziale degli elettroni, si ha $N = nSL$, per cui $W = neSLEv_{\mathrm{drift}}$. Osserviamo ora che il prodotto dei termini nev_{drift} equivale al (modulo) della densità di corrente $|\vec{J}|$, la quale, moltiplicata per la sezione S, dà la corrente I che passa nel filo. Inoltre il prodotto EL è, essendo il campo costante, la differenza di potenziale V ai capi del filo. Quindi sostituendo si ritrova la legge della dissipazione per effetto Joule che avevamo già visto, cioè $W = VI$.

Notate che anche in questa derivazione ci siamo serviti di grandezze macroscopiche (ad esempio, il campo elettrico e la densità di corrente) per determinare l'andamento della potenza attraverso l'espressione di corrente e differenza di potenziale, cioè grandezze macroscopiche. Inoltre, tornando a ritroso nel ragionamento, è facile individuare un'espressione per la potenza dissipata per effetto Joule in un *elemento di volume* unitario, che si ottiene dividendo l'espressione di prima per il volume del filo. Si ottiene che questa *densità di potenza* (che ha dimensioni di una potenza divisa per un volume) vale $\sqsupseteq = \sigma_R E^2$.

7.3 Capacità elettrica e condensatori

Abbiamo parlato di resistori e resistenza elettrica; per completare la nostra breve trattazione dei circuiti elettrici e dei problemi ad essi associati, dobbiamo introdurre almeno un altro importante elemento circuitale, il *condensatore elettrico*. Prima di discuterne alcune caratteristiche, conviene introdurre il concetto di *capacità elettrica*, e cercheremo di farlo richiamandoci di nuovo ad un "analogo concettuale" idraulico.

Allora, abbiamo già affermato, e comunque si tratta di conoscenza per esperienza comune, che le pompe sono i dispositivi che consentono di imprimere ad un fluido una differenza di pressione, cioè di provocarne la circolazione attraverso un determinato circuito idraulico. È chiaro che una pompa ha bisogno di un qualche "motore", cioè dell'apporto di energia dall'esterno, che serve per fornire al fluido energia sufficiente a vincere la resistenza (idraulica) del circuito. Nel "mondo elettrico" il ruolo della pompa idraulica è svolto dal generatore di differenza di potenziale, una pila, una batteria, una dinamo, una centrale elettrica, o quello che è.

Notiamo ora che non è sempre indispensabile avere una pompa (in funzione continua) per permettere la circolazione di un fluido attraverso un circuito. Fino a qualche tempo fa, gli impianti idraulici delle case sfruttavano dei serbatoi posti nel sottotetto per garantire una ragionevole circolazione dell'acqua all'interno dell'abitazione. È chiaro, e va sempre ricordato, che il *riempimento* del serbatoio poteva avvenire solo quando la pressione dell'acquedotto era sufficientemente alta per portare l'acqua alla quota del serbatoio e per vincere le resistenze dei tubi; però, una volta riempito, il serbatoio costituiva una riserva di una certa quantità di acqua che si trovava ad una certa quota, cioè disponeva di una certa quantità di *energia potenziale* gravitazionale.

L'analogo del serbatoio per un circuito elettrico è proprio il condensatore: esso accumula una certa quantità di carica elettrica q (l'analogo della quantità di acqua nel serbatoio) ad una certo *potenziale elettrico* V (l'analogo dell'energia potenziale gravitazionale, proporzionale alla quota del serbatoio)[11].

Si definisce capacità elettrica la quantità $C = q/V$; le sue dimensioni sono quelle di una carica divisa per una differenza di potenziale, e quindi l'unità di misura è Coulomb / V, a cui si dà il nome di Farad, simbolo F. Ricordate che avevamo già incontrato questa unità di misura quando abbiamo introdotto la costante dimensionale che entra nell'espressione della forza elettrostatica in uno dei capitoli precedenti. Osservate inoltre che in genere l'uso pratico prevede l'uso di sottomultipli del Farad, espressi usando i comuni prefissi (microFarad, nanoFarad, picoFarad, etc., in simbolo rispettivamente μF = 10^{-6} F, nF = 10^{-9} F, pF = 10^{-12} F).

In modo simile alla resistenza di un resistore, anche la capacità di un condensatore dipende unicamente dalle caratteristiche costruttive (geometria, dimensioni, materiali) del condensatore considerato, e non da altre grandezze circuitali. Quindi, esattamente come per i resistori, è possibile costruire condensatori (talvolta chiamati capacitori, con un nome bruttino) con una determinata capacità, che poi possono essere impiegati nei vari circuiti elettrici ed elettronici.

Concettualmente, per ottenere un condensatore basta immagazzinare della carica in un qualche "serbatoio per cariche" che si trova ad un certo potenziale. Dal punto di vista pratico, occorre servirsi di materiali che consentono il passaggio, ovvero il trasferimento delle cariche elettriche. Per questo motivo, un *materiale conduttore* (ad esempio, un pezzo di metallo) rappresenta il più semplice esempio di condensatore. Fate attenzione al fatto che, in questo caso, si intende che il conduttore possiede un *eccesso* di carica (di segno positivo o negativo) rispetto alla situazione di equilibrio. Normalmente, infatti, ricordiamo che, anche se un conduttore, ad esempio un metallo, dispone di cariche negative (gli elettroni di conduzione) e positive (gli ioni del reticolo cristallino), il loro numero è uguale, e quindi, almeno su una scala spaziale sufficientemente ampia, il sistema è neutro, cioè "scarico". Se invece un pezzo di conduttore possiede un eccesso di carica, allora esso si comporta da serbatoio, cioè da condensatore. Notate anche che l'operazione di accumulare carica su un conduttore fa sì che questo venga a trovarsi ad un certo potenziale elettrico, e quindi anche la differenza di potenziale[12] è ben determinata.

Tuttavia, normalmente ci si riferisce ad un condensatore elettrico come ad un sistema costituito da *due* pezzi di conduttore, chiamati **armature** del condensatore, con la stessa quantità di carica, ma *di segno opposto*. In altre parole, un'armatura possiederà una carica $+q$, e l'altra avrà una carica $-q$; se la differenza di potenziale *tra le armature* è V, allora la capacità del condensatore è $C = q/V$, per convenzione sempre di segno positivo. Ottenere una situazione del tipo descritto è relativamente semplice; basta infatti porre vicini due conduttori[13] ed attaccarli ai due poli di un generatore di differenza di potenziale continua

[11]**FAC** In realtà V indica *una differenza* di potenziale, e non *un potenziale*; sappiamo però che i due concetti si possono scambiare, a patto di definire un valore di riferimento (tipicamente $V = 0$) rispetto al quale si misura la differenza di potenziale.

[12]**FAC** In questo caso normalmente il riferimento a potenziale nullo è considerato un punto posto a grande distanza dal conduttore, cioè, in termini matematici, "all'infinito".

[13]Vicini, ma non a contatto reciproco, altrimenti le cariche negative e positive migrerebbero

perché, per effetto della cosiddetta *induzione elettrostatica*, l'armatura collegata al polo positivo del generatore abbia un eccesso di carica $+q$ (positiva) e l'altra si ritrovi con una carica $-q$ (negativa) uguale e opposta; la quantità di eccesso di carica sulle armature dipende dalla differenza di potenziale V applicata e dalle caratteristiche del condensatore (in particolare la sua capacità C) secondo quanto abbiamo già stabilito, cioè deve essere $q = CV$. Quindi si tratta di una specie di meccanismo automatico in cui la necessità di garantire una data differenza di potenziale porta ad una ridistribuzione delle cariche nel modo indicato. Notate che, complessivamente, il sistema risulta *scarico*; in altre parole, anche in questo caso il generatore si è comportato da "pompa" per le cariche, solo che, a differenza di quanto si verifica con la corrente elettrica stazionaria, in questo caso invece di far circolare le cariche indefinitamente il generatore ha prodotto una ridistribuzione delle stesse sulle due armature.

Notate infine che, come risulta intuitivo sulla base della descrizione che abbiamo fatto, il generatore impiega un po' di tempo per realizzare la configurazione di cariche richiesta. Torneremo in seguito ad occuparci dell'evoluzione temporale della carica sulle armature; per il momento limitiamoci a considerare situazioni *stazionarie*, in cui, cioè, si è raggiunta una condizione di equilibrio per quanto riguarda la quantità di carica accumulata nel condensatore.

7.3.1 Il condensatore ad armature piane parallele

Il sistema di questo tipo più semplice da realizzare (ma non l'unico possibile, ed infatti esistono condensatori con le geometrie più svariate) è costituito da una coppia di armature realizzate con due lamine piane di materiale conduttore poste a breve distanza l'una di fronte all'altra. Questo condensatore si definisce ad armature (le due lamine) *piane e parallele*; quando le due armature sono collegate ai due poli di un generatore di differenza di potenziale, la carica elettrica si ridistribuisce su di esse nel modo che abbiamo anticipato poco sopra.

Normalmente si suppone che le due armature siano molto estese e si trovino a breve distanza l'una dall'altra; questa supposizione consente di trascurare dei problemi (detti *di bordo*) che riguardano la disomogeneità nella distribuzione delle cariche sulle lamine in prossimità del bordo. In queste condizioni, in condizioni stazionarie la carica si distribuisce uniformemente sulla superficie delle lamine che costituiscono le armature.

Detta A l'area delle due lamine, e d la distanza tra di loro, si ha che la capacità C per un condensatore ad armature piane e parallele *al cui interno non è contenuto alcun materiale* vale: $C = \epsilon_0 A/d$, dove ϵ_0, detta costante dielettrica del vuoto, è una costante (dimensionata!) che val, nel sistema di unità di misura da noi adottato: $\epsilon_0 \approx 8.8 \times 10^{-12}$ F/m. Ricordate che la costante dielettrica del vuoto era già stata introdotta quando avevamo trattato delle forze di natura elettrica, ed in effetti stiamo qui trattando degli argomenti che hanno molti punti in comune con quelli. Quindi la capacità è direttamente proporzionale all'area delle lamine, ed inversamente proporzionale alla loro distanza relativa. Notate che la costante dielettrica ha un valore piccolo, in termini assoluti, per cui

neutralizzandosi!

ci si aspetta di avere a che fare con valori della capacità numericamente piccoli, come vedremo nell'esercizio seguente. Nel seguito vedremo anche come sia possibile aumentare in qualche misura la capacità di un condensatore, a parità di dimensioni, semplicemente riempiendo lo spazio fra le armature con un materiale dielettrico (cioè isolante).

7.3.2 Esercizio: carica su un condensatore

Un condensatore è costituito da due piastre di rame, di forma quadrata con lato $l = 10$ mm, poste una di fronte all'altra a distanza relativa $d = 0.4$ mm. Quanto vale la carica accumulata q (in condizioni stazionarie) sul condensatore quando questo è collegato ad una pila che produce una differenza di potenziale $V = 10$ V? (Supponete che lo spazio tra le armature sia vuoto, ed usate il valore $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto)

Soluzione. Per prima cosa calcoliamo la capacità C del condensatore: dato che si tratta di un condensatore ad armature piane e parallele, si può applicare la relazione $C = \epsilon_0 A/d$, dove $A = l^2$ è l'area delle armature stesse (le piastrine quadrate di rame). Numericamente (attenzione a convertire opportunamente tutte le dimensioni in metri!) si ottiene $C = 2.2 \times 10^{-12}$ F $= 2.2$ pF. Come vedete, la capacità per questo condensatore ha un valore piuttosto piccolo! Ora, la quantità di carica accumulata è semplicemente $q = CV = 2.2 \times 10^{-11}$ Coulomb. Visto come funziona un condensatore, si intende che questa carica q (di segno positivo) si trovi sull'armatura, cioè sulla piastrina, collegata al polo positivo della pila, mentre la piastrina collegata al polo negativo avrà una carica $-q$, di segno opposto. Per vostra curiosità, nonostante questo valore di carica sia anch'esso piuttosto basso, ricordate che esso corrisponde a oltre 10^8 elettroni! È ovvio che questo "eccesso" di elettroni si troverà sull'armatura negativa, mentre sull'armatura positiva si riscontrerà una "mancanza" della stessa quantità di elettroni. Infatti il materiale delle piastrine è costituito da un metallo, il rame, e secondo il modello a cui abbiamo ampiamente accennato in precedenza le uniche cariche che si possono "spostare" in un metallo sono gli elettroni di conduzione; il generatore, cioè la pila, fa in modo di spostare alcuni di questi elettroni dall'armatura positiva a quella negativa, così che su quest'ultima si formerà un eccesso di carica negativa (pari a $-q$) mentre sull'armatura positiva si determinerà un eccesso di carica positiva (pari a q).

7.3.3 Campo elettrico all'interno di un condensatore ad armature piane e parallele (FAC)

In questo paragrafo intendiamo chiarire quanto vale e "come è fatto" il campo elettrico $\vec{E}$ che è presente all'interno di un condensatore ad armature piane e parallele. La presenza di tale campo elettrico è una diretta conseguenza del fatto che tra le due armature si ha una differenza di potenziale V, ovvero, con altre parole, che sulle armature si trova della carica $q = CV$.

Per prima cosa, richiamiamo alcuni concetti sul campo elettrico che avevamo già introdotto nel capitolo dedicato alle forze. Lì definimmo la forza elettrica $\vec{F}_E$ che si esercita tra due cariche *puntiformi*, q e Q, poste a distanza relativa $\vec{r}$ (espressa come vettore), e trovammo che $\vec{F}_E = \kappa \frac{qQ}{r^2}\hat{r}$, dove $\hat{r}$ è il *versore* di direzione e verso corrispondenti a quelli di $\vec{r}$ (ricordate che $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$). Inoltre la costante (dimensionata) che appare nella formula era $\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, con ϵ_0 la costante dielettrica del vuoto che abbiamo impiegato per esprimere la capacità del condensatore (stiamo supponendo che lo spazio tra le due cariche puntiformi sia vuoto). Per definizione, il campo elettrico $\vec{E}$ generato dalla carica q si ottiene dividendo la forza per il valore della carica Q: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$.

In un condensatore (in condizioni stazionarie) abbiamo cariche negative e positive disposte sulle armature; se il condensatore è ad armature piane e parallele, la carica è *distribuita* su dei piani, e, con un po' di buon senso, possiamo anche immaginare che questa distribuzione sia omogenea ed uniforme, dato che, se trascuriamo gli effetti dei *bordi*, non ci sono motivi che danno origine a disomogeneità. Dunque, invece di avere delle cariche puntiformi, in un condensatore abbiamo delle cariche "spalmate" su delle superfici piane. Questa differenza di carattere geometrico comporta delle notevoli differenze dal punto di vista del campo elettrico generato.

Cominciamo con il considerare il campo generato da una sola delle armature, per esempio quella carica positivamente. Ricordiamo che, per ipotesi, in un condensatore ad armature piane e parallele si suppone sempre che le armature abbiano dimensioni molto maggiori della loro distanza relativa, cioè che, al limite, le armature possano essere considerate *infinitamente estese*. Possiamo a questo punto immaginare di suddividere la superficie dell'armatura in tanti piccoli elementi di superficie, ognuno dei quali avrà una piccola quantità di carica. Poiché questa piccola quantità di carica sarà la stessa per ogni elemento di superficie a causa dell'uniformità ed omogeneità della distribuzione, allora non potrà esserci nessuna variazione del campo se ci si sposta sopra l'armatura. Possiamo quindi aspettarci che il campo elettrico $\vec{E}$ sopra una superficie piana carica omogeneamente sia *uniforme*, cioè non dipenda dalla posizione.

Inoltre, sempre basandosi su semplici considerazioni di carattere geometrico, in particolare sulla "simmetria" piana del problema, è possibile stabilire che la *direzione* del vettore campo elettrico $\vec{E}$ deve essere *ortogonale* rispetto alla superficie carica, cioè al piano dell'armatura. Per quanto riguarda il verso, come nel caso di una carica puntiforme, esso sarà "uscente" dalla superficie se la carica su di essa distribuita è positiva, "entrante" nella superficie se la carica è negativa.

Quindi abbiamo stabilito che al di sopra di un piano (molto esteso) su cui è distribuita omogeneamente della carica si trova un campo elettrico uniforme (cioè indipendente dalla posizione) e diretto ortogonalmente rispetto al piano stesso; il verso dipende dal segno della carica, come specificato sopra. All'interno delle armature di un condensatore piano e parallelo si avrà esattamente un campo di questo tipo, che sarà sovrapposizione vettoriale (cioè conta il segno) dei campi generati dall'armatura positiva e da quella negativa. Notate che, come potete rendervi conto se considerate del verso dei campi generati dalle due armature, questa sovrapposizione dà un risultato non nullo *solo all'interno* del condensatore; all'esterno gli effetti delle due armature si annullano a vicenda, ed il campo risultante *è nullo*.

Il legame tra modulo del campo e quantità di carica che si trova sulle armature è fornito da un teorema di elettrostatica, detto *teorema di Coulomb*, che stabilisce che, nel caso considerato, si ha $|\vec{E}| = q/(A\epsilon_0)$, dove A è l'area delle armature; riscritta, la stessa equazione recita $q = |\vec{E}|A\epsilon_0$. Inoltre, poiché il campo è uniforme, costante e diretto ortogonalmente alle armature, e tra le armature, la cui distanza relativa è d, esiste la differenza di potenziale V, deve anche essere $V = |\vec{E}|d$. Ricordando che la definizione di capacità C è $C = \frac{q}{V}$, se sostituiamo le espressioni appena trovate per q e per V in funzione di $|\vec{E}|$, otteniamo $C = \frac{|\vec{E}|A\epsilon_0}{|\vec{E}d}$, cioè $C = \epsilon_0 A/d$, che è l'espressione per la capacità che abbiamo già anticipato prima, e che ora siamo riusciti a dimostrare.

7.3.4 Materiali dielettrici e capacità

Dal punto di vista delle caratteristiche elettriche, come già abbiamo avuto modo di specificare, è ragionevole fare una distinzione di carattere generale tra *conduttori* ed *isolanti*, questi ultimi detti più propriamente **dielettrici**. La differenza di comportamento è ovvia: i conduttori permettono il passaggio di cariche elettriche, e quindi sostengono una corrente elettrica, mentre i dielettrici risultano isolanti elettrici, cioè non consentono alle cariche di muoversi al loro interno.

Abbiamo già visto su quale modello possiamo basarci per interpretare il comportamento dei conduttori, in particolare di quelli di natura metallica: gli elettroni di conduzione, "relativamente liberi" di muoversi, sostengono la corrente all'interno del materiale. La differenza fondamentale, a livello di modello, tra conduttori e dielettrici è che in questi ultimi non ci sono elettroni di conduzione. Ovviamente, trattandosi di materia che è strutturata allo stesso modo nei due casi (per intenderci, anche un dielettrico è composto di atomi o molecole, che sono fatti di elettroni e di cariche positive, e spesso questi atomi e molecole sono organizzati in modo spazialmente regolare all'interno di un reticolo cristallino), le differenze devono avere un'origine associata al "tipo" di atomi o molecole considerati, e al "tipo" di legami (chimici) che li tengono assieme. Infatti in un dielettrico gli elettroni restano "legati" agli atomi del reticolo, e non possono muoversi all'interno del reticolo stesso.

Comunque, anche se non si può avere un effetto eclatante come le presenza di corrente elettrica, un campo elettrico produce sempre degli effetti rilevanti anche su un dielettrico. In particolare, possiamo introdurre un modello che prevede che le cariche negative e positive (rispettivamente gli elettroni ed "il resto" degli atomi del materiale) tendano a separarsi per effetto di un campo elettrico. Infatti, dato che si tratta di cariche di segno opposto, tenderanno a muoversi in verso opposto sotto l'effetto di un campo elettrico. Il risultato di questa "tendenza a separarsi", che si chiama **polarizzazione per deformazione** del dielettrico, è la deformazione della configurazione spaziale degli atomi, che tendono ad allungarsi formando una specie di "bastoncini", di lunghezza atomica (quindi estremamente corti), che portano alle estremità cariche di segno opposto. Inoltre questi "bastoncini" avranno anche la tendenza ad orientarsi parallelamente al campo applicato, e questo possibile processo si chiama **polarizzazione per allineamento**[14]. Dunque, un materiale dielettrico reagisce all'applicazione di un campo elettrico con una modifica della distribuzione spaziale delle cariche al loro interno.

Finora abbiamo sempre supposto che all'interno dei condensatori elettrici di cui abbiamo parlato non fosse presente alcun materiale. In termini rigorosi, avremmo dovuto supporre che fra le armature ci fosse *il vuoto* (assenza di materiale), ed infatti abbiamo introdotto ed impiegato la costante dielettrica del vuoto. In realtà, se anche consideriamo dei condensatori in cui c'è aria tra le armature, la situazione non cambia apprezzabilmente, dato che l'aria ha un comportamento elettrico simile al vuoto. Vediamo ora di capire cosa succede se poniamo tra le armature del materiale. Ovviamente, se usiamo un materiale conduttore impediamo l'operazione del condensatore: infatti le cariche positive e negative poste sulle armature potrebbero attraversare questo conduttore, neutralizzandosi. In questo modo sarebbe impossibile accumulare cariche, e quindi il condensatore "non esisterebbe".

Se invece riempiamo lo spazio tra le armature con un materiale dielettrico (ad esempio il vetro, la maggior parte dei materiali plastici, l'acqua, purché priva di ioni che la rendono conduttrice), quello che otteniamo è un fenomeno molto interessante dal punto di vista applicativo: la capacità del condensatore va moltiplicata per un fattore ϵ_r che è sempre maggiore ad uno (o uguale ad uno nel caso del vuoto). Ad esempio, per un condensatore ad armature piane e parallele come quello definito prima, si ha che la sua capacità vale $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$. [15]Il coefficiente ϵ_r, che è evidentemente adimensionato, è noto come **costante dielettrica relativa**, e dipende dal materiale considerato. Ad esempio, per l'acqua $\epsilon_r \approx 80$, per il vetro $\epsilon_r \approx 9$, per alcuni polimeri (plastiche) $\epsilon_r \approx 100$.

(Inizio parte FAC) A grandi linee, la spiegazione di questo comportamento può essere compresa paragonando quello che succede in due condensatori ad armature piane e parallele con la stessa geometria, in cui lo spazio tra le armature in un caso è vuoto, e nell'altro è riempito di un dielettrico. Se supponiamo di collegare i due condensatori allo stesso generatore di differenza di potenziale, poiché il modulo del campo elettrico $|\vec{E}|$ è legato solo alla differenza di potenziale V e alla distanza tra le armature d (attraverso la relazione $|\vec{E}| = V/d$, vedi paragrafo precedente), il campo elettrico deve essere lo stesso nei due casi. Però nel condensatore riempito di materiale dielettrico la *polarizzazione* del materiale stesso, con la conseguente separazione spaziale tra cariche positive e negative, provoca un effetto di *schermatura* del campo, la cui intensità effettiva (il suo modulo) *si riduce* proprio di un fattore ϵ_r. Affinché l'intensità del campo possa soddisfare le condizioni imposte dalla differenza di potenziale applicata, occorre che sulle armature venga richiamata della carica addizionale. Aumentando la carica accumulata sulle armature, e mantenendo costante la differenza di potenziale, l'effetto risultante è un aumento effettivo

[14]**FAC** Questo effetto è predominante nel caso di materiali costituiti da *molecole polari*, ad esempio l'acqua, l'ammoniaca, etc. Notate che in questa trattazione lo stato del materiale, solido, liquido o gassoso, non ha particolare rilievo.

[15]Notate comunque che l'aumento della capacità si osserva anche per condensatori non del tipo ad armature piane e parallele.

della capacità, che, come abbiamo già detto, viene moltiplicata per un fattore ϵ_r rispetto al caso in cui non ci sia alcun materiale dielettrico fra le armature. **(Fine parte FAC)**.

7.3.5 Esercizio: costante dielettrica di un liquido isolante

Avete un liquido isolante incognito, di cui volete determinare la costante dielettrica relativa ϵ_r. A questo scopo, riempite lo spazio fra due piastrine metalliche parallele di area $A = 10$ cm^2 poste a distanza relativa $d = 1.0$ mm, collegate ai poli di una batteria che genera una differenza di potenziale $V = 2.0$ V. Dopo aver atteso il raggiungimento di una situazione di equilibrio (condizioni stazionarie), misurate con un *elettrometro* la quantità di carica accumulata sulla piastrina collegata al polo positivo, trovando che essa vale $q = 1.0 \times 10^{-10}$ Coulomb. Quanto vale la costante dielettrica relativa ϵ_r del liquido? (Usate il valore $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto)

Soluzione. La capacità C del condensatore ad armature piane e parallele costituito dalle due piastrine e dal liquido che ne riempe lo spazio è $C = q/V$; questa capacità deve essere anche pari a $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$. Combinando le due espressioni e risolvendo per ϵ_r, si trova: $\epsilon_r = qd/(V\epsilon_0 A)$; numericamente, facendo come al solito attenzione alle unità di misura, si ottiene $\epsilon_r \approx 5.7$.

7.3.6 Condensatori in serie e in parallelo (FAC)

I condensatori, in quanto elementi di circuiti elettrici, possono essere collegati in serie o in parallelo analogamente a quanto si fa con i resistori. Anche per i condensatori è possibile trovare delle semplici leggi che forniscono la capacità complessiva C_{tot} del sistema (serie o parallelo) in funzione delle capacità dei singoli condensatori impiegati, C_1 e C_2 (ci limitiamo a considerarne solo due, ma le leggi possono essere facilmente estese per i casi in cui si sono più di due condensatori). Curiosamente, anticipiamo che le leggi che stiamo cercando hanno un aspetto formale simile a quelle per le resistenze, ma il ruolo del collegamento in serie e in parallelo è "invertito".

Per dimostrare questa affermazione cominciamo con il considerare un parallelo di due condensatori. Evidentemente in questo caso la differenza di potenziale sarà la stessa per i due condensatori, e la indicheremo con V. Sul condensatore 1 avremo una carica $q_1 = C_1 V$, e sul condensatore 2 avremo $q_2 = C_2 V$. La carica complessiva accumulata sul sistema dei due condensatori in parallelo sarà $q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$, ma, per definizione, dovrà anche essere $q = C_{tot} V$. Per confronto si ricava che, per due condensatori *in parallelo*, si ha $C_{tot} = C_1 + C_2$, una legge formalmente simile a quella della resistenza totale per una coppia di resistenze *in serie*.

Se i due condensatori sono collegati in serie, invece, si avrà $V = V_1 + V_2$; ma $V_1 = q_1/C_1$ e $V_2 = q_2/C_2$, per cui $V = q_1/C_1 + q_2/C_2$. Come prima, la carica totale accumulata sul sistema sarà $q = q_1 + q_2$ e, per definizione, dovrà essere $V = q/C_{tot}$. Confrontando, si trova che, per un sistema di due condensatori *in serie*, deve esistere la relazione $\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, formalmente simile alla legge che stabilisce la resistenza complessiva in un sistema di una coppia di resistori collegati *in parallelo*.

7.3.7 Scarica di un condensatore

Finora abbiamo considerato il condensatore come un sistema che ha accumulato della carica ad un certo potenziale, cioè abbiamo supposto che il processo di carica del condensatore si fosse già sviluppato completamente fino a raggiungere una condizione stazionaria. È chiaro che questo processo non può essere considerato istantaneo: ci vorrà del tempo, per quanto breve, affinché le cariche vengano spostate materialmente, per effetto del generatore, tra le armature, e ci vorrà anche del tempo affinché esse trovino la loro condizione di equilibrio sulle armature stesse.

Inoltre è anche chiaro che il motivo per cui il condensatore è stato "inventato" è che le cariche da esso accumulate possono essere rese disponibili al circuito per compiere determinate operazioni. Questo significa che il condensatore deve poter essere "scaricato", facendogli compiere una funzione opposta rispetto a quella della carica. In sostanza, nel processo di scarica le cariche elettriche migrano via dalle armature passando attraverso altri componenti circuitali (che devono essere conduttori!) finché non si annullano gli eccessi di carica (positiva o negativa) sulle armature stesse. Il modo più semplice per scaricare un condensatore è quello di collegare un resistore, con resistenza R, tra le armature. In pratica, stiamo supponendo di aver caricato il condensatore collegando alle armature un generatore di differenza di potenziale V ed aspettando fino al raggiungimento di condizioni stazionarie; quindi abbiamo rimosso il generatore, ed abbiamo collegato un resistore ai capi del condensatore.

Anche questo processo di scarica, per le stesse ragioni che abbiamo citato prima, non può essere considerato istantaneo. Esso richiederà un *tempo caratteristico*, detto anche **costante di carica**, che indichiamo con τ, perché possa ritenersi compiuto, almeno in parte. Poiché concettualmente è più facile determinare il tempo di scarica di un condensatore, piuttosto che quello di carica, ci concentriamo ora su questo processo, ricordando però che le nostre conclusioni sono generalmente valide anche nel caso del processo di carica.

Si può dimostrare matematicamente che l'andamento temporale della carica $q(t)$ che resta sull'armatura in funzione del tempo è del tipo *esponenziale decrescente*. Si ha infatti $q(t) = q_0 \exp(-t/\tau)$, dove q_0 è la carica presente inizialmente (all'istante $t = 0$) sull'armatura; se immaginiamo di aver caricato il nostro condensatore, di capacità C, a una differenza di potenziale V_0, si ha ovviamente $q_0 = CV_0$. Il tempo caratteristico τ, allora, rappresenta il tempo necessario perché la carica sulle armature si riduca di un fattore $1/e \sim 1/3$, con e base dei logaritmi naturali, rispetto al valore iniziale. Notate che, poiché la relazione $V = q/C$ continua a valere durante la scarica, si ha anche che la differenza di potenziale $V(t)$ tra le armature decresce esponenzialmente con il tempo secondo la legge $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$.

La soluzione del problema della scarica[16] ci dice che la costante temporale τ è indipen-

[16]**FAC** Il problema può essere trattato usando il *teorema di continuità* per la corrente elettrica. In particolare, notiamo che, se consideriamo la carica $q(t)$ che si trova su un'armatura, il teorema di continuità ci dice che durante la scarica si determina una corrente $I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$. Notate che il segno negativo al secondo membro tiene conto del fatto che la corrente è generata dalla carica che "se ne va" dall'armatura.

dente dalle condizioni iniziali (V_0, q_0), ma è solo funzione della capacità C e della resistenza R attraverso la semplice relazione $\tau = RC$. Intuitivamente il risultato è ragionevole: maggiore è la capacità e più tempo ci vorrà per scaricare (o caricare!) il condensatore; d'altra parte, maggiore è la resistenza e più difficile, quindi "più lento", sarà il movimento di ridistribuzione delle cariche.

Osservate, per le proprietà matematiche della funzione esponenziale, la scarica di un condensatore non è mai completa: infatti la funzione esponenziale decrescente tende asintoticamente a zero, ma non si annulla mai. Tuttavia, nell'uso pratico si può ragionevolmente affermare che un condensatore si è scaricato quando si è atteso un tempo dell'ordine della costante τ, o, per essere più precisi, pari ad un fattore numerico (tipicamente compreso tra 3 e 5) moltiplicato per τ.

7.3.8 Esercizio: calcolo del tempo di scarica

Avete un condensatore ad armature piane e parallele di area $A = 1.0 \times 10^3$ cm^2 e distanza relativa $d = 0.10$ mm;[17] lo spazio tra le armature è riempito di un film di materiale plastico con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 100$. Il condensatore è stato caricato (fino a raggiungere condizioni di equilibrio) tramite collegamento con una pila che genera la differenza di potenziale $V_0 = 9.0$ V, che ad un certo istante $t = 0$ viene scollegata e rimpiazzata da una resistenza costituita da un cilindretto di lunghezza $L = 1$ cm e sezione $S = 10$ mm^2 fatto di un materiale omogeneo con resistività $\rho_R = 10^{-2}$ ohm m. Dopo quanto tempo t' la differenza di potenziale $V(t)$ tra le armature raggiunge il valore $V' = 1.0$ V? (Usate il valore $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto)

Soluzione. Cominciamo con il calcolare la capacità C del condensatore, che risulta $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d = 8.8 \times 10^{-7}$ F $= 0.1 \mu F$. Quindi determiniamo la resistenza R del resistore, che è $R = \rho_R L/S = 1.0 \times 10^3$ ohm $= 1.0$ Kohm. La costante tempo τ del circuito costituito dal condensatore e dalla resistenza è $\tau = RC = 8.8 \times 10^{-4}$ s $= 0.88$ ms.

Secondo quanto abbiamo stabilito nel testo, la differenza di potenziale tra le armature del condensatore varia secondo la legge $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$, e il problema ci chiede di determinare l'istante t' tale che $V(t') = V'$. Deve cioè essere: $V_0 \exp(-t'/\tau) = V'$; rimaneggiata, questa equazione diventa: $\exp(-t'/\tau) = V'/V_0$. Facendo il logaritmo naturale di entrambi i membri, si trova: $-\frac{t'}{\tau} = \ln(\frac{V'}{V_0}$, ovvero, ricordando le proprietà matematiche dell'operatore logaritmo: $t' = \tau(\ln(\frac{V_0}{V'}$. Numericamente si ottiene $t' = 1.9 \times 10^{-3}$ s $= 1.9$ ms.

D'altra parte, se applichiamo la legge di Ohm alla resistenza R, abbiamo che la differenza di potenziale ai suoi capi vale $V(t) = RI(t)$, ma, poiché la resistenza è collegata alle armature, questa differenza di potenziale deve essere la stessa che sussiste istante per istante tra le armature stesse, che vale $V(t) = q(t)/C$. Combinando insieme queste relazioni possiamo scrivere la seguente *equazione differenziale* del primo ordine a variabili separabili: $\frac{dq(t)}{dt} = -I(t) = -\frac{V(t)}{R} = -\frac{q(t)}{RC}$. La matematica ci insegna che la soluzione di questa equazione differenziale è: $q(t) = q_0 \exp(-t/RC)$, che è quanto volevamo dimostrare.

[17] Armature con aree di queste dimensioni si possono ottenere avvolgendo in spirale delle lamine sottili, come si fa nei condensatori in uso in elettronica.

7.3.9 Energia immagazzinata nel condensatore (FAC)

Come abbiamo detto, il condensatore è un sistema che è stato "inventato" per accumulare della carica elettrica ad un certo potenziale. A questa funzionalità è intuitivamente associato anche un accumulo di energia: infatti ci aspettiamo che per portate la carica al potenziale richiesto sia necessario compiere del lavoro, cioè il generatore deve compiere del lavoro per spostare le cariche e riarrangiarne la distribuzione sulle armature nel modo richiesto per l'operazione del condensatore. Una volta che questo lavoro è stato compiuto, allora ci sarà dell'energia che si trova immagazzinata nel condensatore.

Vediamo ora di calcolare questo lavoro, ricordando che il lavoro da compiere per portare una *singola* carica e al potenziale V vale $\mathcal{L}_E = eV$. Come già affermato, questo lavoro ha sempre un segno positivo a prescindere dal segno della carica, cioè il campo elettrico fa sempre "fatica" per spostare le cariche, siano esse negative o positive. Nel processo di carica del condensatore, che, come abbiamo visto, non è istantaneo, sulle armature si viene a trovare una carica $q(t)$ che tende a crescere esponenzialmente nel tempo (per semplicità consideriamo una sola armatura, quella collegata al polo positivo del generatore).

Immaginiamo ora di suddividere il tempo totale di carica in tanti piccoli intervalli dt (sono intervalli *infinitesimi* dal punto di vista matematico). In ognuno di questi intervalli il generatore porterà sull'armatura una quantità di carica dq, anch'essa infinitesima, e per questo dovrà compiere un lavoro $d\mathcal{L}_E = dqq/C$. Il lavoro totale si otterrà allora *integrando* questo lavoro infinitesimo su tutta la carica trasportata fino a raggiungere una condizione di equilibrio, carica che vale $q_0 = CV_0$, con V_0 differenza di potenziale prodotta dal generatore. In sostanza dovremo calcolare l'integrale: $\mathcal{L}_E = \int_0^{q_0} (q/C)dq$. Il calcolo ci fornisce il risultato $\mathcal{L}_E = \frac{q_0^2}{2C}$, che, ricordando l'uguaglianza $q_0 = CV_0$, possiamo anche esprimere come $\mathcal{L}_E = \frac{CV_0^2}{2}$.

Il lavoro che abbiamo determinato rappresenta l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore. Notate che questa energia si rende disponibile quando il condensatore viene scaricato. Ad esempio, se la scarica avviene attraverso un resistore, allora potremo affermare, sulla base di un semplice ragionamento di bilancio energetico, che tutta l'energia immagazzinata nel condensatore si dissiperà per effetto Joule nel resistore (che quindi verrà riscaldato).