

Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2005/06
parte nuova di Elettromagnetismo - da completare!

Francesco Fuso¹
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 4a - 12.05.06

¹tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

Indice

1	Campi elettrostatici	1
1.1	Campo elettrico, potenziale e definizioni varie	1
1.1.1	Esercizio: lavoro e potenziale per una carica puntiforme	4
1.1.2	Il gradiente del potenziale	5
1.1.3	Esercizio: calcolo del gradiente in un caso semplice	5
1.2	Campo elettrico generato da una distribuzione di cariche	6
1.2.1	Distribuzioni discrete	6
1.2.2	Esercizio: il campo del dipolo	6
1.2.3	Distribuzioni continue di carica	7
1.2.4	Esercizio: un anello carico	9
1.3	Flusso del campo elettrico e teorema di Gauss	10
1.3.1	Esercizio: campo generato da una superficie piana carica uniformemente	12
1.3.2	Esercizio: problemi a simmetria cilindrica	13
1.3.3	Esercizio: problemi a simmetria sferica	14
1.3.4	Esercizio: continuità del campo elettrico	14
1.4	Campi nei conduttori in equilibrio	15
1.4.1	Esercizio: lastra conduttrice in campo esterno	17
1.5	Generatori di differenza di potenziale e conduttori all'equilibrio	18
1.5.1	Esercizio: carica all'interno di un guscio sferico	18
1.5.2	Capacità dei conduttori	20
1.5.3	Esercizio: capacità di una sfera conduttrice	20
1.5.4	Condensatori elettrici	21
1.5.5	Esercizio: il condensatore ad armature piane parallele	21
1.5.6	Esercizio: condensatore cilindrico	23
1.5.7	Scarica del condensatore	23
1.5.8	Esercizio: condensatore carico e resistore	24
1.5.9	Esercizio: serie e parallelo di condensatori	25
1.6	Materiali dielettrici e capacità	26
1.6.1	Esercizio: tempo di scarica in un condensatore con dielettrico	28
1.6.2	Esercizio: costante dielettrica di un liquido isolante	28
1.6.3	Esercizio: polarizzazione atomica nel modello di Thomson	29
1.6.4	Esercizio: polarizzazione per orientamento	30

1.7	Energia e campo elettrico	31
1.7.1	Esercizio: potenza ed energia dissipata su una resistenza	32
1.8	Equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico nel vuoto	33
1.8.1	Esercizio: continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico	34
1.8.2	Cenni su divergenza e rotore	35
1.8.3	Esercizio: divergenza e rotore in un caso di geometria piana	36
1.8.4	Esercizio: condizioni per avere un campo elettrostatico	37

Capitolo 1

Campi elettrostatici

Come è ben noto e come abbiamo già avuto modo di affermare, in natura esistono delle *cariche elettriche*; in particolare, la carica elettrica è un'entità *discreta*, cioè, almeno al livello dei fenomeni che intendiamo considerare, qualsiasi carica elettrica negativa è data da un numero intero di cariche elettroniche (un elettrone ha carica $e \approx -1.6 \times 10^{-19}$ C). Esiste anche una carica positiva elementare, ad esempio quella associata al protone, che, per noi, ha lo stesso valore in modulo di quella dell'elettrone, ma segno opposto; qualsiasi carica positiva può essere vista come data da un numero intero di cariche elementari positive.

L'esistenza della carica dà luogo ad una classe di fenomeni che va sotto il nome generale di fenomeni *elettromagnetici*; per limitarsi in modo schematico agli aspetti più importanti, le cariche sono all'origine del campo elettrico (e dei fenomeni coinvolti), le cariche in moto, cioè le correnti elettriche, sono all'origine dei campi magnetici, e cariche che subiscono accelerazioni sono all'origine delle onde elettromagnetiche.

Abbiamo già visto e brevemente discusso alcuni aspetti dell'elettrostatica, cioè dei fenomeni elettrici stazionari nel tempo¹, e delle correnti stazionarie; scopo di questo capitolo è richiamare sommariamente quanto già illustrato ed aggiungere chiarimenti sulla descrizione di alcuni semplici fenomeni di natura elettrostatica.

1.1 Campo elettrico, potenziale e definizioni varie

La migliore definizione di **campo elettrico** è quella di tipo “operativo”: prendendo una carica “di prova” q , si ha un campo elettrico \vec{E} in una certa regione di spazio quando su questa regione di spazio la carica risente di una forza (elettrica) \vec{F}_E :

$$\vec{F}_E = q\vec{E}. \quad (1.1)$$

Notate che il campo elettrico è una grandezza *vettoriale*, cioè dare un campo elettrico significa dare per ogni punto dello spazio una terna di valori tali che su una carica q agisce

¹Per meglio dire, fenomeni elettrici che non cambiano nel tempo o che cambiano così lentamente da poter essere considerati quasi-stazionari.

un vettore forza definito dalla relazione di Eq. 1.1. È quindi chiaro che le dimensioni del campo elettrico sono quelle di una forza divisa per una carica², e quindi una buona unità di misura è N/C (Newton su Coulomb!)³.

Abbiamo già visto quale sia l'espressione della forza di natura elettrica, \vec{F}_E , che agisce tra due cariche *puntiformi*, che qui indichiamo come q e Q . Supponendo che la carica Q sia posta all'origine di un sistema di riferimento, e che q si trovi a distanza (vettoriale) \vec{r} rispetto a Q , la forza ha la seguente espressione (che esprime una forza “centrale”, formalmente simile a quella gravitazionale):

$$\vec{F}_E = \kappa q \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad (1.2)$$

dove compare la costante dimensionata $\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sim 10^{10} \text{ N m}^2/\text{C}^2$.⁴ È allora immediato scrivere l'espressione del campo elettrico *generato dalla carica Q* ad una distanza \vec{r} :

$$\vec{E} = \kappa \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q r^{-2} \hat{r}, \quad (1.3)$$

dove si intende che lo spazio circostante la carica è vuoto⁵, come si arguisce dalla presenza di ϵ_0 (costante dielettrica *del vuoto*!).

Molto spesso, allo scopo di individuare le caratteristiche principali di un dato campo elettrico, ci si serve della rappresentazione delle **linee di campo**: queste non sono altro che delle frecce la cui direzione (e verso) corrisponde a quella della forza risentita da una carica di prova positiva. In più, generalmente le linee di campo sono disegnate in modo da essere più “fitte” dove l'intensità del campo è maggiore, meno “fitte” dove l'intensità è minore.

La forza elettrica, così come quella gravitazionale, che ha un'espressione formalmente simile, è *conservativa*. Nei casi conservativi, avevamo definito (ed ampiamente impiegato) la differenza di energia potenziale ΔU (ad esempio gravitazionale, elastica, etc.) tra due posizioni A e B ponendo:

$$\Delta U = -\mathcal{L} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (1.4)$$

dove \vec{F} è la forza che si sta considerando (non abbiamo messo alcun pedice per indicare che si tratta di una relazione molto generale), \mathcal{L} è il lavoro compiuto da questa forza nello spostamento da A a B (nel caso conservativo il lavoro dipende solo dagli estremi dello

²Ricordiamo che nel sistema mKs-SI la carica si misura in Coulomb, simbolo C.

³Vedremo in seguito che esiste un'altra unità di misura pratica, V/m, che è spesso preferibile a questa.

⁴Curiosamente è conveniente esprimere la costante κ in funzione di un'altra costante dimensionata, $\epsilon_0 \approx 8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ (l'unità di misura si legge Farad su metro, e vedremo in seguito il perché di questo nome), detta **costante dielettrica del vuoto**.

⁵I fenomeni elettrici dipendono dal “tipo” di materiale in cui si va a considerare il campo. Nel “vuoto” non c'è alcuna causa fisica che possa modificare l'intensità del campo, mentre invece in altri materiali, ad esempio conduttori o dielettrici, sono possibili modifiche dovute solo alla presenza del materiale e alla disposizione delle cariche al suo interno. Notate che l'aria (atmosfera), specie se di umidità relativa non troppo alta, costituisce un'ottima approssimazione di “vuoto”.

spostamento, non dalla traiettoria!) e $d\vec{s}$ è uno spostamento vettoriale *infinitesimo*. Nel caso della forza elettrica, come abbiamo già affermato altrove, risulta molto conveniente definire una grandezza derivata dalla differenza di energia potenziale, la **differenza di potenziale** elettrico (o elettrostatico) $V = \Delta U/q$. Tenendo conto della definizione operativa di forza elettrica, si ha che la differenza di potenziale tra la posizione A e la posizione B (o, brevemente, la differenza di potenziale tra A e B) si esprime:

$$V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.5)$$

Notate che talvolta avremo a che fare con *potenziali* (elettrici) piuttosto che con *differenze* di potenziale; indicheremo il potenziale in un punto, ad esempio nel punto A , come $\phi(A)$, ed allora avremo $V = \phi(B) - \phi(A) = \Delta\phi$. Differentemente da quanto si verifica con le forze gravitazionali, nel caso elettrostatico è spesso possibile (e ragionevole!) definire senza ambiguità una posizione spaziale dove il potenziale assume un valore ben definito. Convenzionalmente si fa spesso la posizione che il *potenziale sia nullo all'infinito*, cioè $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$, dove r è il modulo di un vettore posizione nello spazio reale. Spesso, in modo più sintetico (anche se non molto corretto), potremo scrivere semplicemente $\phi(\infty) = 0$. Vedremo in un esempio nel seguito che questa affermazione è ben verificata nei casi in cui le cariche che generano il campo siano collocate in una regione limitata di spazio.

Tenendo conto della relazione tra differenza di potenziale e differenza di energia potenziale, è immediato affermare che le dimensioni della differenza di potenziale (ovvero del potenziale) elettrostatico sono quelle di un'energia, cioè un lavoro, diviso per una carica. Dunque una buona unità di misura è J/C; a questa unità di misura si dà, nel sistema che stiamo impiegando, il nome di Volt, simbolo V. Dunque quando una carica di 1 C si muove tra due punti che si trovano ad una differenza di potenziale di 1 V, allora essa acquista (o cede, a seconda dei segni) l'energia di 1 J. La relazione Eq. 1.5 mostra anche che, dimensionalmente, un campo elettrico equivale ad una differenza di potenziale (o potenziale) diviso per una distanza, da cui l'unità di misura pratica V/m adatta per il campo elettrico.

Da quanto sopra stabilito, è ovvio che normalmente avremo a che fare con potenziali elettrici che dipendono dalla posizione spaziale, cioè avremo in generale delle funzioni $\phi(\vec{r})$. In molte situazioni fisiche di nostro interesse sarà possibile determinare delle superfici (nello spazio reale) in cui il potenziale resta costante: queste superfici si chiamano **superfici equipotenziali**; quindi esse sono il luogo dei punti in cui il potenziale assume un valore costante. In altre parole, muovendosi su queste superfici la *differenza* di potenziale è nulla; notate che, in conseguenza dell'Eq. 1.5, e del fatto che la differenza di potenziale non dipende dalla traiettoria scelta, questo significa che il campo non ha componenti che giacciono sulla superficie equipotenziale. Infatti si può dimostrare che *la direzione del campo elettrico è sempre ortogonale ad una superficie equipotenziale*.

1.1.1 Esercizio: lavoro e potenziale per una carica puntiforme

Abbiamo una carica puntiforme Q *fissa* nello spazio (supponiamo di usare un riferimento centrato proprio sulla posizione occupata dalla carica) ed un'altra carica q che si trova, inizialmente, ad una distanza R da Q . Quanto vale il lavoro \mathcal{L} fatto dal campo elettrico per spostare la carica q da questa posizione iniziale fino a grandissima distanza dalla carica Q , cioè “all'infinito”? E quali altre considerazioni possiamo fare su questo semplice esercizio?

Soluzione. Anche se non è necessario, supponiamo che le due cariche abbiano lo stesso segno, per esempio siano tutte e due positive. Allora è chiaro che la carica q verrà respinta da Q e tenderà ad allontanarsi, per effetto delle forze del campo, fino all'infinito. Quindi in questo caso ci aspettiamo un lavoro positivo (se le cariche fossero di segno opposto, il lavoro sarebbe ovviamente negativo). Per definizione, si ha: $\mathcal{L} = \int_{ini}^{fin} \vec{F}_E \cdot d\vec{s}$. Ora, la forza elettrica è conservativa, e la sua direzione è radiale; dunque, per evitare complicazioni con il prodotto scalare che compare nell'espressione del lavoro, conviene scegliere un percorso diretto proprio in direzione radiale, che va dalla posizione R fino all'infinito. Dunque sarà:

$$\mathcal{L} = \int_R^\infty \kappa \frac{qQ}{r^2} dr = -\kappa qQ \frac{1}{r} \Big|_R^\infty = \kappa qQ \frac{1}{R} . \quad (1.6)$$

Finora, stiamo risolvendo un problema di meccanica. In questo ambito, possiamo anche dire che quando la carica q si sposta dal punto R all'infinito la sua energia potenziale elettrica varia di una quantità $\Delta U = -\mathcal{L} = -\kappa qQ/R$. Vediamo ora le cose dal punto di vista dell'elettrostatica: la definizione di differenza di potenziale elettrico ci permette di stabilire che tra le due posizioni considerate c'è una differenza di potenziale $V = \Delta U/q = -\kappa Q/R$. D'altra parte questa differenza di potenziale si può anche esprimere come $V = \Delta\phi = \phi(\infty) - \phi(R)$. Si può quindi concludere che: $\phi(\infty) = 0$ e $\phi(R) = \kappa Q/R$.

Si vede allora che il potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme Q posta all'origine va a zero a grande distanza seguendo una legge del tipo $1/R$ (mentre l'intensità del campo, nelle stesse condizioni, va a zero come $1/R^2$).⁶ Notiamo poi che in questo problema le superfici equipotenziali sono quelle con R fissato, cioè sono *superfici sferiche* concentriche con la carica che genera il campo. Questo non ci deve stupire: infatti in questo semplicissimo problema si ha una situazione di alta simmetria di tipo sferico, cioè *nessuna* grandezza fisica può dipendere da altra variabile spaziale che non sia la distanza (cioè ci deve essere invarianza per rotazioni angolari attorno alla sfera, sia in direzione “azimutale” che “zenitale”). Questo vale anche per il potenziale, che quindi, se dipende da qualche variabile di posizione, può dipendere solo dalla distanza R , cioè da quello che si chiama “raggio” in un sistema di riferimento di coordinate sferiche centrato in Q . Pertanto le superfici equipotenziali sono sferiche. Il campo, che deve essere ortogonale a queste superfici, è allora radiale, come ben sappiamo (e anche la sua intensità, se dipende da qualcosa, può dipendere solo da R).

⁶Osservate che in questo esercizio il fatto che il potenziale si annulli all'infinito dipende dalla circostanza che il campo si annulla per grandi distanze, conseguenza del fatto che le cariche che generano il campo (nel caso specifico, la sola carica Q !) si trovano in una regione finita di spazio (nel caso, il punto all'origine del riferimento!).

1.1.2 Il gradiente del potenziale

L'Eq. 1.5 ci tornerà molto spesso utile per risolvere problemi in cui la conoscenza dell'espressione del campo permette di stabilire il potenziale (o la differenza di potenziale) in determinate posizioni spaziali. Qualche volta potrà essere comoda anche l'equazione "inversa", cioè quella che permette di determinare il campo $E(\vec{r})$, ovvero la sua dipendenza dalla posizione \vec{r} , a partire dalla funzione $\phi(\vec{r})$, cioè dalla conoscenza di quanto vale, punto per punto, il potenziale. Tale relazione, essendo concettualmente inversa a quella di Eq. 1.5, che contiene un'operazione di integrazione, dovrà necessariamente essere basata su un'operazione di derivazione spaziale. Più precisamente, poiché l'integrale è "di linea", cioè si esegue su un percorso definito dalla successione di tratti vettoriali infinitesimi $d\vec{s}$, si ha, componente per componente: $E_x = -d\phi/dx$, $E_y = -d\phi/dy$, $E_z = -d\phi/dz$, essendo ϕ il potenziale elettrostatico (si intende ovviamente che ϕ sia una funzione della posizione, cioè delle coordinate (x, y, z)). Operando in coordinate cartesiane, alla relazione precedente si può dare la seguente forma compatta:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (1.7)$$

dove il simbolo $\vec{\nabla}$ (talvolta chiamato "nabla") indica un *operatore vettoriale di derivazione spaziale* definito componente per componente in questo modo:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right). \quad (1.8)$$

In altre parole, "applicare" l'operatore nabla ad uno scalare significa creare un vettore le cui componenti sono le derivate (parziali) lungo le tre direzioni cartesiane.

1.1.3 Esercizio: calcolo del gradiente in un caso semplice

Proviamo a calcolare il gradiente supponendo di avere un potenziale che dipende solo da una coordinata, ad esempio la Z , di un sistema di coordinate cartesiane (in realtà possiamo operare con la nostra definizione di gradiente *solo* in coordinate cartesiane! L'operatore nabla ha infatti un'espressione generalmente più complessa in altri sistemi di coordinate, ad esempio quello cilindriche o sferiche). Poniamo, ad esempio, $\phi(z) = kz$, con k costante opportunamente dimensionata. Quanto vale, in ogni punto dello spazio, il campo \vec{E} associato a questo potenziale?

Soluzione. Dalla relazione di Eq. 1.7 risulta, chiaramente: $\vec{E} = (0, 0, k)$ (vedete che ϕ è costante per spostamenti lungo X ed Y !). Dunque il campo è uniforme e diretto lungo Z . Quest'ultima affermazione potevamo anche dedurla per altra via: le superfici equipotenziali sono infatti dei piani paralleli ad XY , e quindi il campo deve essere diretto lungo Z .

1.2 Campo elettrico generato da una distribuzione di cariche

Il caso che abbiamo trattato in un precedente esercizio, la singola carica puntiforme, rappresenta l'esempio più semplice possibile di calcolo del campo. Nella realtà si ha normalmente a che fare con più cariche distribuite nello spazio. Possiamo provare a fare una casistica della situazione. Allora potremo ad esempio avere una distribuzione di cariche puntiformi (cioè tante cariche *discrete* messe in posizioni diverse nello spazio), oppure potremo avere delle distribuzioni *continue* (ad esempio supponendo di avere una distribuzione così "fitta" di cariche puntiformi da poter considerare un "continuo" di carica⁷).

1.2.1 Distribuzioni discrete

Il campo elettrico è una grandezza vettoriale che "deriva" da una forza; per le forze avevamo visto che si poteva usare il **principio di sovrapposizione**, cioè la forza \vec{F} risultante dalla combinazione di tante forze \vec{F}_i ne è la somma vettoriale: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. Questo approccio si trasferisce immediatamente al campo elettrico: $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$, dove \vec{E}_i è il campo generato da una singola carica puntiforme Q_i . Possiamo allora scrivere $\vec{E}_i = \kappa Q_i / r_i^2 \hat{r}_i$, dove \vec{r}_i è il vettore che congiunge la posizione della carica Q_i con il punto in cui si vuole calcolare il valore del campo. In sostanza si ha quindi:

$$\vec{E} = \sum_i \kappa \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad (1.9)$$

dove la somma viene fatta su tutte le cariche considerate.

1.2.2 Esercizio: il campo del dipolo

Una configurazione spaziale di cariche discrete che ha un interessante carattere è quella cosiddetta di **dipolo** elettrico, in cui si hanno due sole cariche, uguali ed opposte in segno. Allora, supponiamo di avere, in un sistema di riferimento cartesiano, una carica Q nella posizione $\vec{R}_+ = (0, d, 0)$, e una carica $-Q$ nella posizione $\vec{R}_- = (0, -d, 0)$ (in sostanza, le due cariche sono disposte sull'asse Y e la loro distanza vale $2d$). Quanto vale il campo elettrico \vec{E} in un punto $(x, 0, 0)$, con x generico (cioè in un punto qualsiasi dell'asse X)? In particolare, cosa succede per $x \rightarrow \infty$?

Soluzione. Il campo sarà dato dall'espressione: $\vec{E} = \kappa Q (\hat{r}_+ / r_+^2 - \hat{r}_- / r_-^2)$, come si ottiene dalla Eq. 1.9. Se guardate il disegno di Fig. 1.2.2 ed usate il teorema di Pitagora, otterrete subito $r_+^2 = r_-^2 = x^2 + d^2$. La soluzione del problema, però, non si esaurisce con questa osservazione: infatti occorre ricordare che il campo è un vettore! Come faremo

⁷Avendo affermato che le cariche sono associate a particelle discrete, elettroni, protoni, etc., la possibilità di avere distribuzioni continue può suonare un po' strana; ricordate, però, che le "dimensioni" delle particelle cariche sono molto piccole, cosa che rende ragionevole il considerare distribuzioni continue in moltissimi casi fisici di interesse.

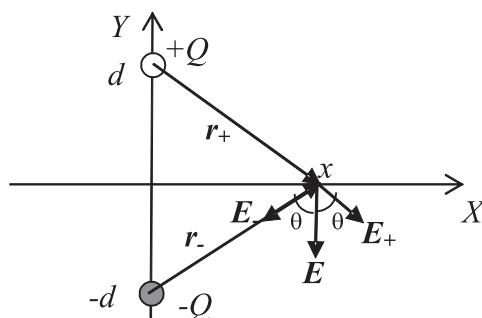


Figura 1.1: Dipolo elettrico disposto lungo Y e calcolo del campo sull'asse X .

più volte nel seguito, cominciamo ad usare un approccio che è spesso utilissimo in questi problemi: chiediamoci che *direzione* ha il campo in questo problema. Ognuna delle cariche fornisce un contributo vettoriale al campo che ha per entrambe lo stesso modulo, direzione della congiungente tra ognuna delle due cariche e il punto dell'asse X considerato, e verso che tiene conto del segno delle cariche. Facendo la somma vettoriale, si vede che le componenti lungo X si annullano, e restano solo le componenti lungo Y (dirette nel verso negativo di questo asse, come si vede in figura). Allora, possiamo affermare che il campo totale ha direzione Y , e la sua ampiezza si ottiene sommando le *componenti* Y dei due contributi (che è ben diverso dal sommare algebricamente i due contributi). Queste componenti, dalla trigonometria, si ottengono moltiplicando il valore dei contributi per il coseno dell'angolo rilevante (indicato con θ in figura), che vale $d/r_+ = d/r_-$. Dunque:

$$\vec{E} = -\hat{y}\kappa Q\left(\frac{d}{r_+^3} + \frac{d}{r_-^3}\right) = -\hat{y}\kappa Q\frac{2d}{(x^2 + d^2)^{3/2}}, \quad (1.10)$$

dove abbiamo indicato con \hat{y} il versore dell'asse Y ed abbiamo messo il segno meno per tenere conto della considerazione precedente sul verso del campo.

Per grandi valori di x , il campo va a zero come $1/x^3$ (si può ricavare trascurando al denominatore d rispetto ad x): questo andamento, che è tipico di un **campo di dipolo**, prevede una diminuzione dell'intensità del campo con la distanza più "rapida" rispetto a quella di una carica puntiforme. Questo risultato può essere spiegato notando che, a grande distanza, si fa difficoltà a "distinguere" le posizioni spaziali delle due cariche, e dunque il dipolo "assomiglia" ad un sistema scarico, che quindi non produce campo. Il campo che si osserva può allora essere attribuito al fatto che le due cariche, in realtà, non coincidono completamente come posizione spaziale.

1.2.3 Distribuzioni continue di carica

Esistono numerosi problemi fisici in cui si ha a che fare con distribuzioni continue di carica. In generale, si può sempre immaginare di suddividere idealmente la carica contenuta in questi corpi (volumi, ma anche superfici o segmenti) in tanti piccoli elementini dQ . Per ognuno di questi elementini si potrà allora stabilire il contributo $d\vec{E}$ al campo elettrico

totale, che avrà un'espressione del tutto simile a quella di una carica puntiforme, solo che in questo caso la carica da considerare è infinitesima, e quindi infinitesimo è anche il contributo al campo:

$$d\vec{E} = \kappa \frac{dQ}{r^2} \hat{r}, \quad (1.11)$$

con \vec{r} congiungente tra la posizione dell'elemento di carica dQ e il punto in cui si vuole determinare il campo⁸. Il campo totale si otterrà applicando il principio di sovrapposizione a tutti i contributi infinitesimi, cioè, in linguaggio matematico, facendo l'integrale sull'intera distribuzione di carica: $\vec{E} = \int_{distr} d\vec{E}$. In buona sostanza, allora, potete apprezzare come non si sia fatto altro che generalizzare l'Eq. 1.9 ad un caso continuo, e se questo ci soddisfa dal punto di vista generale, non ci è di grande aiuto pratico.

Per andare avanti, cominciamo con il definire formalmente delle **densità di carica**, analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso della massa per i corpi rigidi continui, che rappresentano la quantità di carica presente in una data regione di spazio (volume, ma anche superficie o lunghezza). Potremo allora descrivere la nostra distribuzione con una densità di carica *volumica* $\rho = dQ/dV$, una densità *superficiale* $\sigma = dQ/dS$, una densità *lineare* $\lambda = dQ/dl$, a seconda che la carica sia distribuita in un volume (da suddividere in elementini dV), su una superficie (da suddividere in elementini dS), o su un segmento (da suddividere in elementini dl). Esattamente come nel caso della massa per i corpi rigidi, potremo avere delle situazioni in cui queste densità sono uniformi (cioè le distribuzioni sono omogenee) o non uniformi (situazioni disomogenee).⁹

Data una distribuzione continua di carica, la strategia da seguire praticamente per determinare il campo elettrico creato da questa distribuzione dipende fortemente dal problema specifico che si vuole risolvere. In un prossimo paragrafo vedremo infatti come problemi dotati di un elevato grado di "simmetria" possano essere affrontati in maniera diretta usando uno strumento specifico, il teorema di Gauss. In questo paragrafo, invece, ci restringiamo ad esaminare un approccio di tipo generale, mettendo in luce alcuni aspetti interessanti.

In effetti, avendo introdotto le distribuzioni di carica, possiamo esprimere la carica infinitesima dQ nell'Eq. 1.11 in funzione di un elemento di volume dV (o di superficie, dS , o di lunghezza, dl , a seconda della forma geometrica della distribuzione considerata), cioè avremo $dQ = \rho dV$ (ovvero $dQ = \sigma dS$, o $dQ = \lambda dl$). Questo passaggio ci consente di effettuare l'integrazione necessaria per esprimere il campo totale come un'integrazione sul volume (ovvero superficie, o lunghezza), operazione che, almeno in linea di principio, si sa eseguire sfruttando la geometria analitica. In definitiva, quindi, considerando come esempio una distribuzione volumica di carica (i casi di superficie e lunghezza si ricavano

⁸Vista la sua importanza, potremo definire l'Eq. 1.11 come la **relazione costitutiva** del campo elettrico, intendendo che, almeno dal punto di vista formale, questa relazione consente di determinare il campo qualsiasi sia la distribuzione considerata. Vedremo comunque che faremo poco uso di questo approccio formale, dato che, in molti casi di interesse, esiste un metodo più efficace per determinare il campo.

⁹Ovviamente nei casi omogenei, ad esempio per una carica Q distribuita uniformemente in un volume V , si avrà $\rho = Q/V$, e analogamente nei casi superficiale e lineare.

con ovvie sostituzioni) avremo, tenendo conto dei termini sicuramente costanti rispetto all'integrazione:

$$\vec{E} = \kappa \int_{\text{volume}} \frac{\rho}{r^2} \hat{r} dV . \quad (1.12)$$

Integrali di questo tipo, a seconda del problema considerato, possono essere estremamente difficili da risolvere. Infatti, oltre a tutto il resto, si deve considerare che nell'integrazione la "direzione" (espressa da \hat{r}) può variare muovendosi all'interno del volume. Conviene allora, in genere, cercare di stabilire preliminarmente qualche caratteristica del campo che è dovuta semplicemente alla geometria (cioè alle proprietà di simmetria) del problema. Questo passaggio è di importanza cruciale in tanti problemi di elettrostatica (e magnetostatica), per cui occorre sempre sforzarsi di usare correttamente questo argomento.

Vediamo un esempio (un altro sarà trattato nel prossimo esercizio). Supponiamo di avere una superficie *piana* (molto estesa, idealmente infinita) dotata di una distribuzione superficiale di carica σ uniforme. Le proprietà di simmetria saranno allora quelle di un sistema piano, cioè tutte le grandezze coinvolte, se dipendono da qualche variabile spaziale, potranno dipendere solamente dalla distanza dal piano. Le superfici equipotenziali saranno allora dei piani paralleli al piano della distribuzione di carica, ed il campo, necessariamente ortogonale a queste superfici, sarà ortogonale rispetto al piano della distribuzione¹⁰. A questo risultato si può arrivare ragionando in termini dell'Eq. 1.12. Supponiamo di dotare il nostro piano di un sistema di riferimento cartesiano con gli assi X ed Y giacenti sul piano, e l'asse Z ortogonale a questo. Supponiamo di voler determinare il campo in una posizione qualsiasi dell'asse Z (con $z \neq 0$, altrimenti saremmo *nel* piano). Notate che, essendo il piano molto grande ed avendo scelto arbitrariamente la posizione dell'origine del riferimento, calcolare il campo sull'asse Z significa calcolarlo dappertutto (fuori del piano). L'integrale Eq. 1.11 (che in questo caso va inteso come un integrale di superficie!) richiede di considerare e sommare vettorialmente tutti i contributi generati dalla carica contenuta in elementini di superficie dS . Consideriamo ad esempio l'elementino collocato attorno alla posizione x', y' , che darà un certo contributo al campo. Ora, nella nostra integrazione incontreremo anche l'elementino collocato attorno, ad esempio, a $-x', -y'$; come potrete rendervi facilmente conto, ad esempio con un disegno, il contributo di questo secondo elementino sarà tale da annullare le componenti fuori dall'asse del contributo al campo generato dal primo elementino. Questo ragionamento si può ripetere dappertutto, e per ogni elementino se ne potrà trovare un altro, collocato in modo "opposto" (rispetto all'asse Z), e quindi se ne può concludere che il campo complessivo sarà diretto lungo Z .

1.2.4 Esercizio: un anello carico

Abbiamo un sottile anello, di raggio a , dotato di una carica totale Q distribuita *uniformemente* sulla circonferenza. Quanto vale il campo elettrico \vec{E} su un punto qualsiasi

¹⁰Per altro, come vedremo in modo facile in seguito, il campo generato da una distribuzione superficiale uniforme è anche omogeneo, cioè non dipende neppure dalla distanza dal piano.

appartenente all'asse dell'anello (e collocato ad una distanza z generica rispetto al piano dell'anello)?

Soluzione. Cominciamo con il calcolare la densità di carica per unità di lunghezza dell'anello. Dato che la distribuzione è uniforme, avremo semplicemente $\lambda = Q/(2\pi a)$. Ora suddividiamo idealmente l'anello in tanti elementini dl , ognuno dei quali porterà una carica $dQ = \lambda dl$. Il modulo del vettore \vec{r} che collega ognuno di questi elementini con il punto dell'asse Z in cui vogliamo determinare il campo avrà lo stesso valore per tutti gli elementini stessi. Usando Pitagora, si vede facilmente che $r = (a^2 + z^2)^{1/2}$.

Prima di procedere, vediamo preliminarmente che direzione avrà il campo complessivo dato dalla sovrapposizione dei contributi dovuti a tutti questi elementini. In particolare, consideriamo due elementini collocati in punti diametralmente opposti (nel disegno di Fig. 1.2.4, in cui si vede la "sezione" dell'anello, i due elementini hanno direzione ortogonale al foglio). I loro contributi al campo saranno diretti lungo la congiungente tra la loro posizione ed il punto dell'asse (Z) in cui si vuole determinare il campo e, svolgendo l'integrale, le componenti fuori asse si annulleranno (vedi figura, dove si è supposto $Q > 0$ per dare un verso ai campi). Quindi \vec{E} sarà *parallelo* all'asse Z , cioè, detto \vec{z} il versore di questo asse, sarà $\vec{E} = \hat{z}E_Z$. Dunque, il problema si riconduce a considerare la *sola componente lungo l'asse*, E_Z , del campo totale, cioè dell'integrale di cui all'Eq. 1.12 (in realtà qui l'integrale sarà *di linea*, cioè sarà fatto lungo la circonferenza!):

$$E_Z = \kappa \int_{\text{anello}} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta = \kappa \frac{\lambda}{r^2} \frac{z}{r} \int_{\text{anello}} dl = \kappa \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi a, \quad (1.13)$$

dove abbiamo indicato con $r = (z^2 + a^2)^{1/2}$ il modulo della congiungente tra elementini dell'anello e punto in cui si vuole determinare il campo. Inoltre abbiamo tenuto conto di diverse considerazioni, cioè che la componente assiale si ottiene moltiplicando per $\cos \theta = z/r$ (vedi figura), e, soprattutto, che nell'integrazione l'integrando rimane costante! Allora l'integrale si riduce ad essere la misura della lunghezza dell'anello, cioè della circonferenza $2\pi a$. Controllate voi che le dimensioni dell'espressione ottenuta siano compatibili con quelle del campo elettrico, e notate che il campo è nullo al centro della spira (come atteso da considerazioni "di simmetria") e si annulla a grande distanza seguendo una legge del tipo $1/z^2$ (come deve essere essendo le cariche localizzate in una regione finita di spazio, l'anello).

1.3 Flusso del campo elettrico e teorema di Gauss

In questo paragrafo ci occupiamo di un importante teorema che si applica, in generale, ai campi centrali (ad esempio, anche al campo gravitazionale). Piuttosto che darne la dimostrazione, cosa non particolarmente istruttiva, ci avviciniamo al teorema tornando per un attimo a considerare il campo di una carica puntiforme Q che si trova all'origine di un sistema di riferimento (di tipo sferico). Come abbiamo già ampiamente osservato, il campo ha la forma: $\vec{E} = \kappa(Q/r^2)\hat{r}$, cioè è radiale (ovvero centrale) e dipende dalla distanza r secondo la legge $1/r^2$.

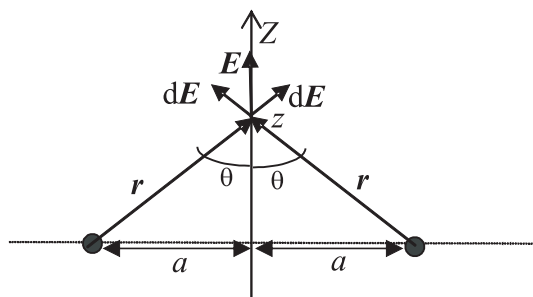


Figura 1.2: Veduta “in sezione” dell’anello carico descritto nel testo.

Definiamo ora il **flusso del campo elettrico** attraverso una certa superficie, che si indica con $\Phi(\vec{E})$;¹¹ immaginando di suddividere la superficie in tanti elementini infinitesimi dS , ed indicando con \hat{n} il versore ortogonale a questi elementini¹², si può scrivere:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\text{superf}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS, \quad (1.14)$$

dove abbiamo scritto un *integrale di superficie*.

Nel nostro problema con la carica puntiforme, scegliamo delle superfici costituite da superfici sferiche concentriche con la carica, e di raggio R generico. Su queste superfici avremo che la direzione del campo sarà ovunque parallela ad \hat{n} (la direzione ortogonale punto per punto ad una sfera è la direzione radiale, che è proprio quella del campo) e la sua intensità sarà uniforme (ci muoviamo a distanza $r = R$ costante). Quindi si avrà su queste superfici:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\text{sfera}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{\text{sfera}} \kappa \frac{Q}{r^2} dS = \kappa \frac{Q}{R^2} \int_{\text{sfera}} dS = \kappa \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.15)$$

dove abbiamo notato che la superficie della sfera di raggio R vale $4\pi R^2$ e che $\kappa = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Dunque, scegliendo una superficie sferica, e quindi *chiusa*, cioè che racchiude un volume, il nostro esempio ci mostra che *il flusso del campo elettrico su una superficie chiusa è pari alla carica contenuta (nella superficie) divisa per la costante dielettrica* (del vuoto perché nel nostro esempio abbiamo considerato uno spazio vuoto).

Questo risultato è del tutto generale e si applica a qualsiasi configurazione di cariche e a qualsiasi superficie, purché chiusa. Come prima conseguenza, notiamo ad esempio che, per una superficie chiusa che racchiude uno spazio *privo di cariche* il flusso è nullo¹³. Questa affermazione, a cui si dà il nome di **teorema di Gauss**¹⁴, è alla base di un metodo

¹¹Questa grandezza è, sostanzialmente, l’analogo della portata (in volume) di un fluido che scorre lungo un condotto.

¹²Come chiariremo nel seguito, nel caso di superficie chiusa il verso di \hat{n} è univocamente determinato come quello *uscende* rispetto alla superficie stessa.

¹³Se pensate al flusso come qualcosa di simile alla portata di un fluido, il risultato è del tutto ovvio: tanto flusso entra quanto esce dalla superficie, chiusa, che stiamo considerando, non essendoci né “perdite” né sorgenti di campo.

¹⁴Citeremo più avanti un’altra possibile denominazione per la stessa affermazione, che costituisce in pratica una formulazione integrale di una **equazione di Maxwell** per il campo elettrostatico nel vuoto.

di soluzione molto efficiente per il calcolo del campo elettrico nei casi di distribuzioni di carica dotate di un elevato grado di simmetria. Prima di vedere qualche esempio, notate che il “bello” del teorema di Gauss sta nell’evitare di complicarsi la vita con il calcolo dell’integrale del flusso. Occorre infatti porre attenzione nello scegliere opportunamente la *superficie di Gauss* (quella su cui si calcola il flusso) in modo che sia il prodotto scalare che l’intensità del campo assumano un valore costante su tutta la superficie.

1.3.1 Esercizio: campo generato da una superficie piana carica uniformemente

Abbiamo già stabilito che il campo generato da un piano con una distribuzione superficiale di carica σ uniforme è ortogonale al piano stesso. Vediamo ora qual è il valore E della sua intensità.

Soluzione. Consideriamo una superficie di Gauss costituita da un cilindro, con asse ortogonale al piano e area di base A , e facciamo in modo che le due superfici di base siano una “al di sopra” ed una “al di sotto” del piano carico. Dato che il campo è ortogonale al piano, come sappiamo, il flusso attraverso il cilindro sarà dato solo dal flusso attraverso le due superfici di base. Rispetto a queste superfici, il campo sarà ortogonale e inoltre il suo valore sarà uniforme su tutte le superfici di base (ricordate che il campo, se dipende da qualcosa, può dipendere solo dalla distanza dal piano, che è costante quando ci si muove sulle superfici di base). Quindi questa scelta della superficie di Gauss soddisfa i requisiti che abbiamo prima esposto, rendendo semplicissimo il calcolo seguente. Il flusso sulla superficie di base “superiore” vale allora EA , dato che, supponendo $\sigma > 0$, si vede subito come campo e normale \hat{n} uscente dal cilindro siano paralleli tra loro. Stessa considerazione si applica al flusso attraverso la superficie di base “inferiore”, per cui il flusso totale attraverso la superficie costituita da tutto il cilindro vale $\Phi(\vec{E}) = 2EA$.¹⁵ Secondo Gauss, questo flusso deve essere pari alla carica Q contenuta nel cilindro divisa per ϵ_0 . Il cilindro effettivamente contiene la carica che si trova nel cerchio appartenente al piano “intercettato” dal cilindro stesso, cioè: $Q = \sigma A$. Quindi $E = \sigma/(2\epsilon_0)$.¹⁶ Vedete come è stato semplice determinare il campo! Inoltre la nostra espressione non contiene alcuna indicazione sulla distanza rispetto al piano a cui sono collocate le superfici di base (cioè sull’altezza del cilindro, che infatti non abbiamo specificato). Questo significa che il campo generato da un piano uniformemente carico *non dipende* neanche dalla distanza, cioè è completamente uniforme. Infatti, se ponete il “cilindro di Gauss” completamente in uno dei due semispazi in cui il piano divide lo spazio, avete che la carica contenuta è nulla, e quindi nullo è il flusso. In parole, tanto flusso entra (o esce) nel cilindro attraverso la superficie inferiore, tanto ne esce (o entra) attraverso quella superiore. Vista la geometria *piana* del problema, questo implica che il campo sia uguale sulle due superfici, cioè non ci sia dipendenza dalla distanza.

¹⁵Provate a dimostrare che l’assunto $\sigma > 0$ non è affatto indispensabile per la dimostrazione, cioè che si ottiene identico risultato supponendo $\sigma < 0$.

¹⁶Talvolta a questo risultato si dà il nome di **teorema di Coulomb**

1.3.2 Esercizio: problemi a simmetria cilindrica

Immaginate di avere un lungo cilindro (altezza h , raggio a , con $h \gg a$) uniformemente carico, cioè con una densità volumica uniforme ρ . Come è fatto e quanto vale il campo elettrico \vec{E} dentro e fuori il cilindro?

Soluzione. Cominciamo con lo stabilire la direzione del campo. Il problema è dotato di una simmetria cilindrica, quindi le superfici equipotenziali sono delle superfici cilindriche coassiali con il cilindro dato. Allora il campo deve essere radiale, sia dentro che fuori. Applichiamo ora Gauss, considerando come superfici proprio dei cilindri di altezza h e raggio R generico (sarà $R < a$ per il campo interno, $R > a$ per quello esterno). Questi cilindri li sceglieremo ovviamente coassiali con il cilindro dato: notate che il flusso attraverso le superfici di base può essere considerato nullo, almeno se il cilindro è molto lungo, cioè dotato effettivamente di una simmetria di tipo cilindrico¹⁷. Il flusso totale coincide allora con quello attraverso la superficie laterale, dove il campo è parallelo alla direzione di \vec{n} (radiali entrambe), ed è costante. Dunque, ricordando che l'area della superficie laterale di un cilindro di raggio R generico ed altezza h vale $2\pi Rh$, si ha $\Phi(\vec{E}) = 2\pi RhE$. Il secondo membro del teorema di Gauss implica di calcolare la carica contenuta all'interno di questo cilindro di raggio R generico. Tenendo conto della definizione di densità volumica di carica e del fatto che stiamo considerando un sistema omogeneo, possiamo scrivere $Q = \int_{\text{volume}} \rho dV = \rho \int_{\text{volume}}$. L'integrale di volume deve essere chiaramente esteso a tutta la regione interna al *cilindro di Gauss*, dove però il contributo sarà nullo al di fuori del cilindro dato (dove $\rho = 0$). In sostanza, quindi, per $R > a$ si avrà che tutta la carica $Q = \rho\pi a^2 h$ contenuta nel cilindro dato sarà contenuta nella superficie di Gauss, mentre per $R < a$ la carica sarà solo una frazione del totale, pari a $Q = \rho\pi R^2 h$.¹⁸ Quindi, usando un po' di algebra, l'intensità del campo elettrico, ovviamente dipendente da R , come atteso, sarà: $E(R) = (\rho/(2\epsilon_0))a^2/R$, per $R > a$ (fuori) e $E(R) = (\rho/(2\epsilon_0))R$, per $0 < R \leq a$ (dentro). Vedete come la dipendenza da R cambi nettamente tra dentro e fuori: dentro è lineare (aumenta con R) e fuori va a zero (come $1/R$).¹⁹ Provate a vedere come si modificherebbe il risultato considerando una distribuzione sempre di geometria cilindrica, ma disomogenea (dipendente dalla distanza dall'asse, come vedremo nel prossimo esercizio riferito ad un problema a simmetria sferica). Inoltre notate un altro aspetto molto interessante: nel problema a simmetria piana dell'esercizio precedente, l'assenza di carica (fuori dal piano) comportava un campo uniforme; qui, con una geometria cilindrica (e la stessa cosa è anche vera per geometrie sferiche), l'assenza di carica (fuori dal cilindro) porta ad un campo disomogeneo, che dipende cioè da R .

¹⁷La simmetria a cui facciamo riferimento prevede anche un'invarianza per traslazioni lungo l'asse; in altre parole, occorre che il cilindro sia così lungo che non si riesca a "vederne" né inizio né fine, e quindi tutte le proprietà fisiche siano uguali qualsiasi sia la posizione lungo l'asse del cilindro.

¹⁸Occhio a leggere bene cosa è scritto!

¹⁹Dato che abbiamo supposto un cilindro molto lungo, cioè idealmente infinito, in questo problema non dobbiamo aspettarci che il campo si annulli all'infinito come $1/R^2$, situazione tipica quando le cariche sono tutte in una regione finita di spazio.

1.3.3 Esercizio: problemi a simmetria sferica

Per completare l'analisi delle geometrie interessanti in questo problema, esaminiamo ora una sfera di raggio a carica in modo *disomogeneo*, cioè, ad esempio, tale che la densità volumica di carica dipende dalla distanza dal centro (il raggio r) secondo la legge $\rho(r) = \rho_0 r/a$, con ρ_0 costante. Come è fatto e quanto vale il campo \vec{E} dentro e fuori la sfera?

Soluzione. Cominciamo la nostra soluzione calcolando la carica totale Q_{tot} portata dalla sfera. Per definizione, sarà $Q_{tot} = \int_{sfera} \rho dV$. Ricordando quanto abbiamo visto per il calcolo della massa nei corpi rigidi e tenendo conto della simmetria sferica, eseguiamo l'integrale dividendo idealmente la sfera in tanti gusci sferici concentrici, di raggio r variabile tra 0 e a e di spessore dr . Il volume infinitesimo di questi gusci vale $dV = 4\pi r^2 dr$, per cui, esplicitando la dipendenza funzionale di ρ , l'integrale diventa: $Q_{tot} = \int_0^a \rho_0(r/a) 4\pi r^2 dr = 4\pi(\rho_0/a) \int_0^a r^3 dr = 4\pi(\rho_0/a)(a^4/4)$.

Passiamo ora al campo. Per simmetria, esso è radiale e conviene applicare Gauss a superfici sferiche di raggio R generico, concentriche con la sfera data. Per il campo fuori dalla sfera ($R > a$) il teorema di Gauss ci dice semplicemente che $E = \kappa Q_{tot}/R^2$, come potete verificare facendo qualche calcolo²⁰. Calcoliamo esplicitamente il campo E all'interno. Il flusso sarà $\Phi(\vec{E}) = 4\pi R^2 E$, la carica contenuta nella *sfera di Gauss*, che stavolta sarà una frazione di Q_{tot} , si calcola svolgendo l'integrale $\int_0^R \rho_0(r/a) 4\pi r^2 dr = 4\pi(\rho_0/a) \int_0^R r^3 dr = 4\pi(\rho_0/a)(R^4/4)$.²¹ Allora, con un po' di algebra, il campo interno a distanza $R \leq a$ dal centro risulta: $E = (4\rho_0/(a\epsilon_0))R^2$, cioè, per la nostra particolare scelta della funzione ρ , aumenta quadraticamente con il raggio.

1.3.4 Esercizio: continuità del campo elettrico

Questo esercizio ha un carattere un po' più "formale", ma tuttavia permette di determinare proprietà del campo elettrico interessanti in numerose situazioni fisiche. Supponiamo allora di avere la situazione descritta in Fig. 1.3.4: un piano dotato di una densità superficiale di carica uniforme, σ divide lo spazio in due semispazi e si conosce il campo \vec{E}_1 in uno dei due semispazi. Come è fatto il campo \vec{E}_2 dall'altra parte del piano?

Soluzione. Conoscere il *vettore* campo elettrico \vec{E}_1 significa conoscere modulo (E_1) e direzione (ad esempio identificata dall'angolo θ_1 indicato in figura) del vettore. Per risolvere il problema conviene scrivere i campi in funzione delle loro componenti *tangenziali* e *normali* (cioè parallele ed ortogonali) rispetto al piano di interfaccia fra i due semispazi. Ad esempio, per il campo \vec{E}_1 avremo che la componente tangenziale sarà $E_{1,t} = E_1 \sin \theta_1$, mentre la componente normale sarà $E_{1,n} = E_1 \cos \theta_1$; analogamente. Applichiamo ora Gauss sul cilindretto indicato in figura, che ha superficie di base S ed altezza *infinitesima* dh . Notate che questo cilindretto è una buona scelta, compatibile con il requisito di Gauss di utilizzare superfici chiuse. Osservate anche che la caratteristica di tale cilindretto è quel-

²⁰Infatti, come potete facilmente dimostrare, il teorema di Gauss stabilisce che, in problemi a simmetria sferica, il campo equivale a quello di una carica puntiforme sistemata al centro della sfera e di valore pari alla carica distribuita nella sfera stessa.

²¹Anche qui, occhio a cosa è scritto!

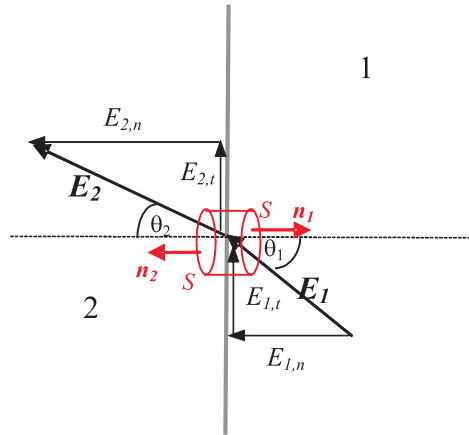


Figura 1.3: Rappresentazione dei campi elettrici nei due semispazi 1 e 2 divisi da un piano di interfaccia.

lo di avere una superficie laterale (e anche un volume, ma qui non è rilevante) infinitesima, per cui potremo subito affermare che il flusso attraverso la superficie è (quasi) nullo in ogni caso. Questa affermazione è importante in questo problema, dove l'orientazione dei campi (che non sono paralleli all'asse del cilindro) potrebbe dare luogo a contributi non nulli del flusso attraverso la superficie laterale. Però, a causa dell'altezza infinitesima del cilindro di Gauss che abbiamo scelto, potremo ugualmente affermare che il flusso attraverso l'intero cilindro è dato dalla somma dei flussi attraverso le superfici di base. Calcoliamolo: tenendo conto dell'inclinazione dei campi rispetto alla normale (uscente) dalle superfici (occhio ai segni!), avremo $\Phi(\vec{E}) = -E_{1,n}S + E_{2,n}S$; al secondo membro del teorema di Gauss avremo invece, come nel caso del piano che abbiamo analizzato in un precedente esercizio, $\sigma S/\epsilon_0$. Dunque potremo concludere che $E_{2,n} = E_{1,n} + \sigma/\epsilon_0$, cioè *le componenti del campo normali rispetto alla superficie di interfaccia sono discontinue se $\sigma \neq 0$* .

Resta da determinare il comportamento delle componenti tangenziali. Anticipiamo a questo scopo un risultato che formalizzeremo in seguito, quando presenteremo la seconda delle “equazioni di Maxwell” per il campo elettrostatico. Vedremo allora che *le componenti del campo tangenziali rispetto alla superficie di interfaccia sono continue*, qualsiasi sia il valore di σ . In questo modo siamo perfettamente in grado di determinare modulo e direzione del campo \vec{E}_2 ; ad esempio, avremo che l'angolo θ_2 sarà tale che $\tan \theta_2 = E_{2,t}/E_{2,n} = E_{1,t}/(E_{1,n} + \sigma/\epsilon_0)$, mentre per il modulo si potrà scrivere $E_2 = (E_{2,t}^2 + E_{2,n}^2)^{1/2} = (E_{1,t}^2 + (E_{1,n} + \sigma/\epsilon_0)^2)^{1/2}$.

1.4 Campi nei conduttori in equilibrio

Fino a questo momento ci siamo occupati di determinare il campo a partire dalla distribuzione di carica senza chiederci come le situazioni fisiche presentate potessero essere effettivamente realizzate. In questo paragrafo cerchiamo invece delle norme generali che consentano di stabilire alcune proprietà delle distribuzioni di carica e dei campi elettrici

in una classe di materiali, quella costituita dai **conduttori**. Trattando della conduzione elettrica, abbiamo già sottolineato come all'interno di questi materiali (ad esempio, i metalli come il rame) sia possibile avere movimento di cariche. In altre parole, il modello di conduttore che possiamo applicare in questo ambito è quello di una sorta di contenitore per una quantità di cariche di ambo i segni che sono (relativamente) libere di muoversi sotto l'effetto di campi elettrici²².

Normalmente i conduttori che considereremo saranno globalmente “scarichi”, cioè le cariche dei segni opposti si bilanciano completamente. Supponiamo ora, però, di fare il seguente esperimento ideale. Abbiamo una sfera di conduttore, e ad un certo istante “iniettiamo” al centro della sfera un certo numero di cariche puntiformi, ad esempio elettroni. Per effetto delle forze repulsive tra cariche dello stesso segno, questo insieme di elettroni tenderà a “sparpagliarsi”; in pratica, ogni carica sentirà una forza che tende a farla allontanare dal centro della sfera, fino a raggiungere il bordo della sfera stessa. Questo processo non sarà del tutto istantaneo: infatti il movimento delle cariche (gli elettroni) dentro il conduttore è in qualche misura impedito dalla resistenza elettrica del conduttore stesso. Però possiamo supporre che, trascorso un po' di tempo (generalmente molto breve!), tutti gli elettroni abbiano raggiunto la superficie del nostro conduttore: più in là non potranno ovviamente andare, dato che stiamo supponendo che la nostra sfera sia contornata dal “vuoto”, che è un isolante, e non permette movimento di cariche. Dunque, alla fine del processo, in **condizioni di equilibrio**, avremo che la sfera avrà una densità superficiale di carica σ , che possiamo tranquillamente supporre uniforme (in questo specifico problema non ci sono cause fisiche per cui una direzione all'interno della sfera sia preferibile, per il movimento delle cariche, rispetto ad un'altra). Appliciamo Gauss per calcolare il campo *interno* alla sfera: se usiamo una superficie di Gauss sferica interna alla sfera data, come dobbiamo, vediamo che essa non contiene alcuna carica²³, per cui il campo deve essere nullo.

Questa situazione, che abbiamo trovato in un esempio molto semplice, è del tutto generale: *all'interno di un conduttore all'equilibrio il campo è nullo e non possono esserci cariche* (cioè eccesso di carica). Come ovvia conseguenza, che si ottiene pensando alla definizione di differenza di potenziale che abbiamo già dato, si ha che il potenziale elettrico è lo stesso in tutti i punti di un conduttore all'equilibrio. In buona sostanza, la possibilità delle cariche all'interno di un conduttore di muoversi (quasi) liberamente, fa sì che esse si ridistribuiscono spazialmente alla superficie del conduttore in modo da dare origine ad un campo elettrico, **indotto** elettrostaticamente, che, sommato ad eventuali campi esterni, conduce alla situazione di campo nullo all'interno del conduttore.

²²Come specificato parlando della corrente, nei metalli i portatori di carica sono elettroni, cioè cariche negative. Tuttavia, ricordando che l'eccesso di carica di un segno si può realizzare attraverso una deficienza di carica di segno opposto, il modello che stiamo utilizzando appare del tutto ragionevole.

²³Per meglio dire, non contiene eccessi di carica, dato che la materia di cui è fatto il conduttore, così come qualsiasi altro materiale, ha cariche positive e negative, per intenderci elettroni e protoni, che però sono in ugual numero e pertanto danno luogo a una condizione di neutralità di carica.

1.4.1 Esercizio: lastra conduttrice in campo esterno

Consideriamo un problema molto semplice e supponiamo di avere nello spazio un campo elettrico uniforme \vec{E}_0 (generato chissà da chi²⁴). Prendiamo una lastra di materiale conduttore, globalmente *scarica*, molto estesa e piuttosto sottile, tale cioè che siano soddisfatte le proprietà di simmetria piana, ed “infiliamola” nella regione in cui si trova il campo. Per semplicità, supponiamo che essa si trovi con il lato sottile parallelo alla direzione di \vec{E}_0 . All’equilibrio, qual è la distribuzione di cariche all’interno e sulla superficie della lastra?

Soluzione. Possiamo subito affermare che la lastra non avrà cariche (eccesso di carica) all’interno del volume, cioè $\rho = 0$. Questa è una diretta conseguenza della condizione di campo nullo, come si può facilmente dimostrare con il teorema di Gauss applicato *all’interno della lastra*²⁵. Vediamo le cariche superficiali: secondo il meccanismo intuitivo che abbiamo descritto prima, ci aspettiamo che cariche positive siano spinte da \vec{E}_0 verso una delle facce estese della lastra, e cariche negative siano spinte verso la faccia opposta. Appliciamo Gauss usando un cilindro le cui superfici di base siano parallele alle facce estese della lastra, e si trovino una all’esterno ed una all’interno della lastra. Il flusso attraverso l’intero cilindro sarà dato dal flusso attraverso la sola superficie di base che si trova fuori dalla lastra. Infatti la superficie laterale non dà contributo per la scelta delle direzioni, mentre la superficie di base interna si trova in una zona di campo nullo (è all’interno di un conduttore all’equilibrio). Pertanto, detta S l’area della superficie di base del cilindro, sarà $\Phi(\vec{E}) = SE_0$, e quindi la densità superficiale di carica sulla faccia (estesa) della lastra, che possiamo supporre uniforme a causa della grande estensione della faccia stessa, sarà $\sigma = \epsilon_0 E_0$. Notate che questo risultato è “simile” a quello del “teorema di Coulomb”, ma qui non compare il fattore 2 a dividere (e se ne può dare una spiegazione intuitiva, provateci). Ripetendo l’operazione sulla faccia opposta della lastra si troverà ovviamente una densità di segno opposto, compatibilmente con la condizione di neutralità globale della lastra.

Vediamo il processo da un altro punto di vista. Lo spostamento delle cariche sulla superficie produce un campo *indotto* \vec{E}' nella regione di spazio occupata dalla lastra; come potete facilmente dimostrare, questo campo indotto è esattamente tale da annullare gli effetti del campo esterno dentro la lastra, cioè si ha $\vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$. Dunque possiamo affermare che la quantità di carica spostata sulle facce della lastra è esattamente determinata dalla condizione di annullare il campo all’interno del conduttore, cioè che il campo esterno agisce sulle cariche del conduttore in modo da rispettare, all’equilibrio, una precisa condizione fisica. Vedremo che questa situazione è tipica di diverse configurazioni con materiali conduttori.

²⁴Fra breve vedremo un semplice dispositivo, il condensatore ad armature piane e parallele, in grado di generare proprio un campo uniforme.

²⁵In breve, nella geometria piana considerata il campo dovrebbe essere uniforme, ed essendo nullo il suo flusso, la carica interna al cilindro deve essere nulla, da cui il risultato.

1.5 Generatori di differenza di potenziale e conduttori all'equilibrio

Una modalità pratica molto comune per ottenere spostamento di carica con i conduttori consiste nell'utilizzare generatori di differenza di potenziale. Come abbiamo già visto trattando la corrente elettrica, questi dispositivi sono in grado di comportarsi come una sorta di "pompa" di ricircolo per le cariche, cioè, sfruttando una qualche forma di energia (per esempio di origine "chimica", come per le pile), essi fanno muovere le cariche in modo che il sistema considerato soddisfi le condizioni di differenza di potenziale stabilite dal generatore stesso. Se pensate al legame che esiste tra differenza di potenziale e campo elettrico, potete anche facilmente capire che applicare una differenza di potenziale in una certa regione di spazio non è troppo diverso dal creare un campo elettrico nella stessa regione, con caratteristiche ben definite.

Vedremo ora qualche esempio di problema in cui si usano generatori e conduttori, e si studia la configurazione di campi e cariche all'equilibrio (cioè quando lo spostamento delle cariche è terminato definitivamente). In questi esempi faremo spesso riferimento al concetto di **messa a terra**: convenzionalmente si può immaginare che la terra sia un enorme serbatoio di cariche (di ambo i segni) da cui possiamo attingere senza che questo comporti variazioni del potenziale elettrico della terra stessa, che rimane sempre *nulla*. Questa convenzione trova numerosi riscontri nella pratica e quindi in genere può essere tranquillamente accettata. Inoltre, per "collegare" i vari elementi dei sistemi considerati supporremo di impiegare dei fili "ideali", cioè dei conduttori elettrici dotati di resistenza trascurabile. Normalmente immagineremo che la presenza di questi fili (molto sottili!) non comporti variazioni alla distribuzione dei campi nello spazio, cioè immagineremo che all'equilibrio nessuna carica (eccesso di carica) si trovi sui fili stessi.

1.5.1 Esercizio: carica all'interno di un guscio sferico

Abbiamo una carica puntiforme Q all'origine del nostro sistema di riferimento. Intorno alla carica supponiamo di avere un guscio sferico spesso, concentrico con la carica puntiforme, e dotato di raggio interno a e raggio esterno b . Supponiamo che questo guscio sia globalmente scarico. Quanto vale la densità di carica superficiale sulle superfici "interna", σ_a , ed "esterna", σ_b , del guscio all'equilibrio? Come cambia il risultato se colleghiamo il guscio a terra? E cosa succede se questo collegamento viene fatto "attraverso" un generatore di differenza di potenziale V ?

Soluzione. Come prima cosa, notiamo che la presenza del guscio sferico divide lo spazio in tre regioni: detta R la distanza dal centro, avremo la regione I per $0 < R < a$, la regione II per $a \leq R \leq b$ (nel conduttore), e la regione III per $R > b$ (fuori dal guscio). Dovunque, a causa della simmetria, il campo sarà radiale e dipenderà solo dal raggio R , se dipende da qualche variabile spaziale. Possiamo subito affermare che, in ogni caso, a causa dell'equilibrio avremo sempre $E_{II} = 0$. Inoltre, a prescindere dagli eventuali collegamenti del guscio, nella regione I avremo sempre la situazione di campo generato da una carica puntiforme, cioè $E_I = \kappa Q/R^2$. La conoscenza dei campi nelle

regioni I e II ci permette subito di determinare il valore della carica Q_a che si trova sulla superficie interna del guscio, quella di raggio $R = a$. Possiamo infatti applicare Gauss ad una sfera, concentrica con il guscio, e di raggio $a < r < b$. Il flusso attraverso questa sfera è $\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E_{II} = 0$, essendo $E_{II} = 0$; d'altra parte la carica contenuta all'interno di questa sfera di Gauss sarà la *somma algebrica* della carica Q e della carica Q_a (occhio a ricordarsene!), somma che, per il teorema di Gauss, dovrà essere nulla come il flusso. Se ne conclude che $Q + Q_a = 0$, cioè $Q_a = -Q$. Per la simmetria del problema, questa carica sarà uniformemente distribuita sulla superficie interna del guscio, la cui area è $4\pi a^2$, per cui potremo subito affermare che $\sigma_a = Q_a/(4\pi a^2) = -Q/(4\pi a^2)$; giustamente questa carica ha segno opposto a quello di Q , dato che essa viene "richiamata" (ovvero, attratta) proprio dalla carica puntiforme Q .

Determiniamo ora la carica Q_b sulla superficie esterna del guscio. Essa dipende dalle condizioni fisiche del problema, e quindi avrà un valore diverso a seconda della situazione considerata. Nel caso di guscio scarico e scollegato, potremo utilizzare direttamente la condizione di neutralità del guscio stesso. In questo caso dovrà essere infatti $Q_a + Q_b = 0$, da cui $Q_b = -Q_a = Q$ e $\sigma_b = Q_b/(4\pi b^2) = Q/(4\pi b^2)$. In altre parole, l'induzione elettrostatica agisce distribuendo le cariche del conduttore in modo che il campo al suo interno sia nullo. Notate che fuori dal guscio, nella regione III, il campo non è nullo. Questo si può facilmente verificare applicando Gauss su una sfera di raggio $R > b$: la carica interna a questa sfera di Gauss sarà data dalla somma algebrica $Q + Q_a + Q_b = Q$, per cui il campo sarà $E_{III} = \kappa Q/R^2$ (esattamente quello generato dalla carica puntiforme!).

Se il guscio viene collegato a terra, allora la condizione di neutralità cade. Infatti il conduttore, pur essendo *inizialmente* scarico, potrà ospitare della carica (un eccesso di carica) proveniente dalla terra a cui è collegato. Intuitivamente, la carica Q sarà in grado di richiamare della carica (di segno opposto al suo) dalla terra, ed il processo avrà termine quando saranno soddisfatte le condizioni fisiche del problema. Notate che collegare a terra il guscio significa che esso deve trovarsi, all'equilibrio, allo stesso potenziale della terra, cioè a $\phi = 0$. D'altra parte, essendo tutte le cariche del nostro problema confinate in una regione finita di spazio, possiamo affermare che anche all'infinito il potenziale deve essere nullo. Dunque non c'è differenza di potenziale tra il guscio (e in particolare tra la sua superficie esterna) e l'infinito. Tenendo conto della definizione di differenza di potenziale, questo significa che il campo nella regione III deve essere nullo. Applicando Gauss su una superficie sferica di raggio $R > b$, come abbiamo fatto prima, questo ci conduce ad affermare che $Q + Q_a + Q_b = 0$, da cui $Q_b = 0$, cioè in questo caso $\sigma_b = 0$.

Infine, colleghiamo a terra il guscio "attraverso il generatore di differenza di potenziale V ". Operativamente questo significa che un polo, supponiamo quello negativo, della pila viene collegato con un filino elettrico alla terra, e l'altro, supponiamo quello positivo, viene collegato al guscio. Il ragionamento è simile a quello fatto appena sopra, solo che in questo caso la differenza di potenziale tra il guscio (e quindi la sua superficie esterna) e l'infinito deve essere pari a V . Dunque dovrà essere $V = -\int_{\infty}^b \vec{E}_{III} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^b E_{III} dr$, dove abbiamo scelto di muoverci lungo una direzione radiale (il campo è conservativo e possiamo

scegliere il percorso)²⁶. D'altra parte, abbiamo già determinato con Gauss l'espressione di E_{III} in funzione delle varie cariche e della distanza r dal centro del sistema: $E_{III} = \kappa(Q+Q_a+Q_b)/r^2$. Calcolando l'integrale troviamo $V = \kappa(Q+Q_a+Q_b)/b$. Ricordando che $Q + Q_a = 0$ (anche in questo caso!), troviamo $Q_b = Vb/\kappa$, cioè $\sigma_b = Vb/(\kappa 4\pi b^2) = \epsilon_0 V/b$.

1.5.2 Capacità dei conduttori

L'ultimo esercizio svolto mostra come il collegare un conduttore (il guscio sferico) ad un generatore, cioè imporre il potenziale elettrico, comporti che il conduttore riceva una certa quantità di carica (proveniente dalla terra "attraverso" il generatore). In generale, un conduttore, inizialmente scarico, quando viene posto ad un certo potenziale è in grado di accumulare della carica elettrica (che si dispone, all'equilibrio, sulla sua superficie). Quindi il conduttore ha una certa capacità di prendersi e tenere della carica.

Questa attitudine può essere quantificata introducendo la **capacità** elettrica C , definita come rapporto tra carica accumulata Q e potenziale, o differenza di potenziale V (rispetto a terra): $C = Q/V$. Le dimensioni della capacità sono quindi quelle di una carica su un potenziale elettrostatico, e l'unità di misura nel nostro sistema si chiama Farad (simbolo F); la $C = 1$ F significa che la carica di un Coulomb si trova ad un potenziale (o differenza di potenziale rispetto a terra) di un Volt. Vedremo che la capacità dei sistemi realistici (di dimensioni praticamente fattibili) è generalmente piccola, per cui molto spesso si usano sottomultipli del F (ad esempio, μ F, nF, pF). Notate anche che la capacità è per definizione *sempre positiva*; vedremo infatti in seguito che essa è una caratteristica della forma, dimensione (e materiale) del conduttore, o sistema di conduttori, cioè non dipende dalle attuali condizioni di uso (ovvero da quale generatore si usa, da come viene collegato, etc.). Questo vuol dire che spesso prenderemo come capacità il rapporto fra i *valori assoluti* di carica e potenziale (o differenza di potenziale).

1.5.3 Esercizio: capacità di una sfera conduttrice

Vediamo quanto vale la capacità di un conduttore sferico in un caso più semplice di quello visto nell'esercizio precedente. Abbiamo allora una sfera (stavolta piena, ma il risultato non cambierebbe comunque) conduttrice di raggio $a = 1.0$ cm collegata ad un generatore V il cui altro polo è a terra. Sapendo che $\kappa \sim 10^{10}$ N m²/C², ovvero $\epsilon_0 \approx 8.8 \times 10^{-12}$ F/m,²⁷ quanto vale la capacità C della sfera?

Soluzione. Il collegamento al generatore significa che sulla sfera, ovvero sulla sua superficie, viene richiamata dalla terra una quantità di carica Q tale che venga rispettata la condizione, imposta, che la differenza di potenziale tra la sfera (la sua superficie esterna!)

²⁶Fate attenzione alla scelta degli estremi di integrazione: V , con un segno positivo per la scelta della polarità del generatore che abbiamo supposto, è la differenza di potenziale tra il guscio della sfera e l'infinito, non viceversa, quindi per ottenere questo valore positivo dobbiamo immaginare di muoverci dall'infinito al guscio, e non viceversa.

²⁷Notate che per la soluzione del problema non è necessario specificare il valore di V , come vedrete nella soluzione; osservate anche che la soluzione vi darà ragione del perché una buona unità di misura per la costante dielettrica è F/m.

e l'infinito sia esattamente V . Usando tutte le varie considerazioni svolte per la soluzione di esercizi precedenti, questo implica che la carica sulla sfera valga $Q = 4\pi\epsilon_0 aV$; se ne deduce che $C = 4\pi\epsilon_0 a \sim 10^{-12}$ F = 1 pF (si legge picoFarad), un valore (molto piccolo) che, come vedete, dipende solo dalla geometria (sferica), dalla dimensione (il raggio a) e dal materiale che contorna la sfera (abbiamo usato ϵ_0 , costante dielettrica *del vuoto* perché abbiamo supposto vuoto lo spazio attorno alla sfera). In conseguenza di questa considerazione, il testo dell'esercizio avrebbe anche potuto semplicemente chiedere la capacità senza descrivere esplicitamente il collegamento con il generatore. In questo caso, per calcolare la capacità avreste potuto supporre di collegare voi un generatore di differenza di potenziale V *qualsiasi* alla sfera, e ragionare come abbiamo fatto.

1.5.4 Condensatori elettrici

La possibilità di accumulare carica ad un certo potenziale da parte di un conduttore è alla base di numerosissime applicazioni. Per capirne la rilevanza pratica, pensate per un attimo all'analogo nel caso della fluidodinamica (avevamo visto come la fluidodinamica "assomigli" alla descrizione dei circuiti elettrici); in questo analogo, al posto della carica dovrete immaginare di accumulare una certa quantità di fluido, ad esempio di acqua, e al posto del potenziale dovrete pensare ad un'energia potenziale, ad esempio di tipo gravitazionale. Allora è evidente che l'analogo che stiamo cercando è un serbatoio di acqua messo ad una certa altezza, quello che viene spesso chiamato "fungo", che consente ad esempio di gestire le differenze di potenziale nei circuiti idrici.

Nello sfruttamento pratico del fenomeno della capacità si preferisce in genere impiegare dei sistemi di conduttori, invece che un unico conduttore come abbiamo visto nell'esercizio precedente. Il vantaggio è evidente: in un sistema di conduttori si può più facilmente definire la regione di spazio in cui il potenziale è definito. In sostanza, in questi sistemi la differenza di potenziale sarà definita non tra il conduttore e l'infinito²⁸, ma tra una coppia di conduttori. Il caso più semplice è proprio quello di due conduttori posti ad una certa differenza di potenziale. A questo sistema si dà il nome di capacitori o **condensatori** elettrici e ai conduttori si dà il nome di **armature**.

1.5.5 Esercizio: il condensatore ad armature piane parallele

Un condensatore ad armature piane e parallele, il più semplice da immaginare, può essere modellato nel seguente modo. Avete due lastre conduttrici piane (supporremo che queste abbiano uno spessore, anche se l'esercizio si può svolgere ugualmente pensando ad una coppia di piani conduttori), sottili e molto estese (indicheremo con A la superficie delle facce estese, e supporremo $A = 100$ cm²) disposte parallelamente l'un l'altra a distanza relativa $d = 1.0$ mm. Tra le due lastre non c'è materiale (cioè c'è il vuoto, ovvero, in

²⁸Notate che nell'esercizio della sfera conduttrice, quando abbiamo calcolato la differenza di potenziale, abbiamo supposto che in tutto lo spazio considerato non ci fossero altri conduttori (o materiali), situazione assai difficile da realizzare nella pratica!

questo ambito, possiamo considerare dell'aria). Come è fatto il campo elettrico nelle varie regioni in cui è suddiviso lo spazio? Quanto vale la capacità C ?

Soluzione. Per prima cosa osserviamo che la scelta sulle dimensioni del sistema (armature di area molto grande, idealmente infinita, poste a piccola distanza fra loro) consente di stabilire che il sistema ha le proprietà di simmetria piana. Dove presenti, i campi saranno quindi sempre ortogonali alle armature. In altre parole, possiamo *trascu-rare gli effetti ai bordi*, cioè trascurare le cariche eventualmente disposte sulle facce “sottili” delle armature ed i campi da esse generati. Inoltre potremo sicuramente affermare che all'interno delle lastre (cioè all'interno dei conduttori) il campo sarà nullo all'equilibrio, così come non potranno esserci delle cariche (eccessi di carica).

Per proseguire nella soluzione, immaginiamo di collegare il condensatore ad un generatore di differenza di potenziale V , cioè di prendere dei filini elettrici ed attaccare il polo positivo del generatore ad una armatura e quello negativo all'altra²⁹. Il generatore “farà il suo mestiere”, mandando carica di un segno su un'armatura e carica del segno opposto sull'altra armatura. Ovviamente si intende che il sistema, inizialmente, fosse globalmente scarico: ne consegue che le cariche sulle due armature saranno uguali ed opposte in segno. In una descrizione intuitiva del processo che stiamo analizzando, tenendo conto che cariche di segno opposto tendono ad attrarsi, è ovvio che le cariche si disporranno sulle superfici “affacciate” delle due lastre. Questo ci permette di dire che il campo all'esterno del condensatore è nullo. Infatti, applicando Gauss ad un cilindro ortogonale alle lastre e con una superficie di base dentro il conduttore e l'altra all'esterno, vedremo che la carica contenuta in questo cilindro è nulla, come è nullo il flusso attraverso la superficie di base annegata nel conduttore. Dunque, nullo deve essere anche il flusso attraverso la superficie di base che si trova all'esterno del condensatore, e allora deve essere nullo anche il campo in questa regione³⁰.

Se applichiamo Gauss ad un cilindro che ha una superficie di base annegata nel conduttore e l'altra nello spazio compreso tra le armature potremo facilmente determinare il legame tra campo in questa regione e carica sull'armatura. Detta σ la densità di carica sulla superficie dell'armatura, si trova infatti $E = \sigma/\epsilon_0$. Quindi nella regione tra le armature è presente un campo *uniforme*³¹, diretto ortogonalmente alle armature stesse. Il verso di questo campo va ovviamente dall'armatura positiva a quella negativa, compatibilmente con la convenzione che si usa per le linee del campo elettrico (uscenti da cariche positive, entranti in quelle negative).

D'altra parte, avendo collegato le armature al generatore, tra le superfici delle lastre deve esistere una differenza di potenziale esattamente pari a V . Essendo il campo uniforme, è facilissimo legare V ad E : deve infatti essere $V = Ed$, ovvero $E = V/d$. A questo punto, oltre ad aver determinato il campo in funzione dei parametri del problema in tutte le regioni dello spazio, abbiamo anche tutti gli ingredienti necessari per calcolare la ca-

²⁹Notate che non è necessario “riferirsi” alla terra in questo esercizio.

³⁰Il risultato si applica anche ad altre geometrie: all'esterno di un condensatore (qualsiasi) si potrà molto spesso considerare nullo il campo elettrico generato dalle cariche accumulate sul condensatore.

³¹Il fatto che sia uniforme dipende dalla geometria piana del sistema. Per altre geometrie il campo è tutt'altro che omogeneo, come vedremo in un prossimo esercizio.

capacità. Essa è, per definizione, $C = Q/V$, ma, vista la simmetria piana e la conseguente uniformità della distribuzione superficiale di carica, dovrà essere $Q = A\sigma$. D'altra parte, abbiamo visto che $\sigma = \epsilon_0 E$, e anche che $E = V/d$. Mettendo tutto insieme e facendo le debite semplificazioni, troviamo $C = \epsilon_0 A/d$, cioè, numericamente per i dati del problema: $C \approx 8.8 \times 10^{-11} \text{ F} = 88 \text{ pF}$. Ripensate al procedimento mentale che abbiamo fatto per determinare la capacità: in sostanza abbiamo supposto di collegare un generatore alle armature e cercato di esprimere la carica accumulata in funzione della differenza di potenziale. Questo ci ha permesso di trovare C , che, come deve essere, dipende solo dalle proprietà "costruttive" del condensatore, e non da quanto vale V .

1.5.6 Esercizio: condensatore cilindrico

La configurazione piana parallela non è, ovviamente, l'unica possibile per un condensatore, che può avere ad esempio geometrie sferiche o cilindriche, come in questo esercizio. Immaginiamo allora di avere due gusci cilindrici sottili (anche qui se i gusci fossero spessi il risultato fondamentale non cambierebbe) di raggio a e b ($b > a$) coassiali fra loro e di altezza h . Per sfruttare la geometria cilindrica supponiamo $h \gg a, b$, ed immaginiamo che lo spazio fra i gusci sia vuoto. Quanto vale la capacità C di questo condensatore?

Soluzione. Collegiamo un generatore di differenza di potenziale V fra le armature; in questo modo su di esse si accumulerà della carica, cioè si avrà una densità superficiale di carica che, per la simmetria, potremo supporre uniforme. Consideriamo l'armatura interna, cioè il guscio di raggio a , su cui si andrà a disporre una densità di carica σ_a . Usando Gauss su una superficie cilindrica coassiale al sistema dato e dotata di raggio r tale che $a < r < b$, troverete facilmente che il campo elettrico tra le armature si scrive: $E = (\sigma_a/\epsilon_0)a/r$, che, come vedete, corrisponde ad un campo tutt'altro che omogeneo. Sfruttiamo ora la differenza di potenziale tra le armature. Deve essere $V = \int_a^b E dr = (\sigma_a/\epsilon_0)a \ln(b/a)$, dove abbiamo usato una certa disinvoltura con i segni, del tutto motivata in questo caso (tanto sappiamo che essa deve avere il segno "giusto") e sfruttato la nota regola di integrazione della funzione $1/r$. Allora, notando che la carica accumulata sull'armatura vale $Q = 2\pi ah\sigma_a$, possiamo facilmente determinare la capacità: $C = Q/V = 2\pi ah\sigma_a/((\sigma_a/\epsilon_0)a \ln(b/a)) = \epsilon_0 2\pi h/\ln(b/a)$.

1.5.7 Scarica del condensatore

Oltre che alla possibilità di accumulare carica, l'utilità in termini circuitali di un condensatore è legata alla circostanza che esso è in grado di produrre delle variazioni di carica (e quindi di corrente, se pensiamo ad un circuito elettrico) nel tempo, secondo una legge ben definita. Per verificare questo aspetto, dobbiamo studiare cosa succede nelle fasi **transienti** in cui la carica si aggiusta sulle armature, cioè dobbiamo vedere cosa succede nelle fasi che precedono l'equilibrio. Per farlo, però, è più conveniente analizzare la fase di **scarica** di un condensatore, quella in cui le cariche lasciano le armature (per effetto di una variazione della configurazione del circuito, come vedremo), piuttosto che quella di **carica**, in cui esse si dispongono sull'armatura. Deve essere comunque chiaro che quanto

stabiliremo in questo paragrafo pone anche le basi per descrivere l'andamento temporale della fase di carica. Dalla soluzione dell'esercizio seguente, vedremo infatti che la quantità di carica che si trova sull'armatura dipende dal tempo in modo *esponenziale*, con un tempo caratteristico che è direttamente proporzionale alla capacità ed è indipendente dal valore della carica accumulata sulle armature.

1.5.8 Esercizio: condensatore carico e resistore

Per dimostrare quanto affermato, risolviamo questo semplice esercizio. Avete un condensatore di capacità $C = 1.0$ nF (si legge nanoFarad) che è stato caricato tramite collegamento con un generatore di differenza di potenziale $V_0 = 10$ V (diamo questo dato anche se non serve per determinare i tempi caratteristici!). Ad un certo istante, il generatore viene scollegato, ed le armature vengono collegate ad un resistore elettrico di resistenza $R = 1.0$ Mohm (si legge Megaohm). Quanto vale l'andamento temporale $Q(t)$ della carica accumulata dal condensatore?

Soluzione. Inizialmente il condensatore si trova in condizioni di equilibrio. Questo significa che esso ha accumulato una carica $Q_0 = CV_0$ (numericamente è $Q_0 = 10^{-8}$ C). Quando il generatore viene scollegato ed al suo posto si mette il resistore, le cariche non hanno più alcuna ragione di rimanere sulle armature, dato che non c'è più alcuna causa fisica che fissi la differenza di potenziale fra di loro. Quindi nella resistenza fluirà della corrente e questo processo di *scarica* avrà termine quando la differenza di potenziale tra le armature si sarà annullata, cioè quando sulle armature non ci sarà più *alcuna carica* (eccesso di carica).

Vediamo di determinare l'andamento temporale del processo. Consideriamo un'armatura: è chiaro che la corrente che da essa fluirà sarà espressa da $I(t) = -dQ(t)/dt$, dove il segno meno rende conto del fatto che la corrente è legata ad una *diminuzione* della carica $Q(t)$ presente sull'armatura stessa. Questa corrente fluisce nel resistore ai cui capi, per la legge di Ohm, si troverà una differenza di potenziale (variabile nel tempo) $V(t) = RI(t)$. D'altra parte questa differenza di potenziale (variabile nel tempo) deve essere anche quella che si registra fra le armature del condensatore. Ma, per definizione di capacità, deve anche essere $Q(t) = CV(t)$. Quindi: $Q(t) = CRI(t) = -CRdQ(t)/dt$. Il primo e l'ultimo membro di questa catena di uguaglianze si può riscrivere, riarrangiando, come:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t). \quad (1.16)$$

Questa è una bella equazione differenziale del primo ordine *a variabili separate*; la sua soluzione, come sapete o potete facilmente dimostrare, è $Q(t) = Q_0 \exp(-t/\tau)$, con $Q_0 = CV_0$ condizione iniziale del processo, e $\tau = RC$ **tempo caratteristico di scarica** del condensatore considerato attraverso il resistore considerato. Numericamente si ottiene $\tau = 1.0 \times 10^{-3}$ s, e l'andamento esponenziale significa che, dopo un tempo pari a τ , la carica sul condensatore si sarà ridotta di un fattore $1/e \sim 1/3$ rispetto alla carica Q_0 inizialmente presente. La legge esponenziale stabilisce anche che, a rigore, occorre un tempo infinito affinché la carica si annulli, ma si può affermare che dopo un tempo

pari a 2-3 τ il condensatore risulta “praticamente scarico”. Vedete anche che sia la corrente ($I(t) = -dQ(t)/dt$) che la differenza di potenziale ai capi del condensatore e della resistenza ($V(t) = RI(t) = CQ(t)$) seguono lo stesso andamento esponenziale decrescente con analogo tempo caratteristico. Quanto trovato si applica anche alla fase di carica del condensatore, dove l’andamento è ovviamente esponenziale *crescente* e dove, come resistenza R , si può considerare la resistenza effettiva delle armature (che, essendo fatte di un conduttore reale, avranno generalmente una resistività non nulla, benché piccola).

1.5.9 Esercizio: serie e parallelo di condensatori

In quanto elementi circuitali, condensatori possono sicuramente essere collegati in serie o parallelo, o in qualsiasi configurazione “mista”. Supponiamo allora di avere due condensatori di capacità rispettivamente C_1 e C_2 . Quanto vale la capacità complessiva C (all’equilibrio) in caso di collegamento in parallelo ed in serie?

Soluzione. La Fig. 1.5.9 mostra la rappresentazione circuitale dei due schemi (parallelo e serie). Vediamo il caso parallelo. Qui la carica complessivamente accumulata, Q è *somma* delle cariche $Q_1 = C_1V_1$ e $Q_2 = C_2V_2$ che si trovano sui due condensatori, cioè $Q = Q_1 + Q_2$. D’altra parte le differenze di potenziale V_1 e V_2 che abbiamo supposto tra le armature dei due condensatori sono ovviamente le stesse, e coincidono con la differenza di potenziale V che possiamo supporre di fornire al parallelo dei due condensatori. Dunque sarà: $C = Q/V = (Q_1 + Q_2)/V = (C_1V + C_2V)/V = C_1 + C_2$, cioè la capacità del parallelo è somma delle capacità dei due condensatori (fossero più di due basterebbe sommare su tutti).

Nel caso di collegamento in serie, invece, la grandezza che si *somma* è la differenza di potenziale. Infatti, detta V la differenza di potenziale applicata alla serie di condensatori, risulta ovviamente che $V = V_1 + V_2 = Q_1/C_1 + Q_2/C_2$, dove abbiamo espresso le differenze dei potenziali tra le armature dei due condensatori in funzione delle loro capacità. Consideriamo ora le due armature che, in figura, sono racchiuse da un cerchio tratteggiato. “Inizialmente” (quando i condensatori sono stati costruiti) esse erano *globalmente* scariche, e tali rimangono anche collegando il generatore, dato che non c’è alcun modo di mandare su queste armature della carica (non c’è alcun collegamento conduttivo con il generatore, né con la terra!). Questo significa (pensate un attimo ai segni delle cariche sulle varie armature) che $Q_1 = Q_2$; inoltre questo valore di carica deve anche coincidere con la carica Q complessivamente accumulata dalla serie di condensatori. Dunque $V = Q/C = V_1 + V_2 = Q_1/C_1 + Q_2/C_2 = Q(1/C_1 + 1/C_2)$, cioè nella serie di condensatori i *reciproci* delle capacità si sommano fra loro (se fossero più di due la somma si estenderebbe a tutti i reciproci).³²

³²Se confrontate con quanto si verifica con i collegamenti delle resistenze, vedrete che le formule di serie e parallelo si “scambiano fra loro” nei due casi. Ricordatelo!

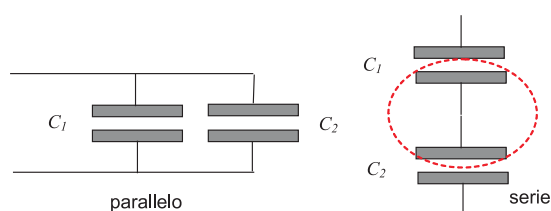


Figura 1.4: Rappresentazione schematica di condensatori in parallelo ed in serie; il cerchio tratteggiato individua le armature di cui si tratta nel testo.

1.6 Materiali dielettrici e capacità

Dal punto di vista delle caratteristiche elettriche, come già abbiamo avuto modo di specificare, è ragionevole fare una distinzione di carattere generale tra *conduttori* ed *isolanti*, questi ultimi detti più propriamente **dielettrici**. La differenza di comportamento è ovvia: i conduttori permettono il passaggio di cariche elettriche, e quindi sostengono una corrente elettrica, mentre i dielettrici risultano isolanti elettrici, cioè non consentono alle cariche di muoversi al loro interno³³.

Abbiamo già visto su quale modello possiamo basarci per interpretare il comportamento dei conduttori, in particolare di quelli di natura metallica: gli elettroni di conduzione, “relativamente liberi” di muoversi, sostengono la corrente all’interno del materiale. La differenza fondamentale, a livello di modello, tra conduttori e dielettrici è che in questi ultimi non ci sono elettroni di conduzione. Ovviamente, trattandosi di materia che è strutturata allo stesso modo nei due casi (per intenderci, anche un dielettrico è composto di atomi o molecole, che sono fatti di elettroni e di cariche positive, e spesso questi atomi e molecole sono organizzati in modo spazialmente regolare all’interno di un reticolo cristallino), le differenze devono avere un’origine associata al “tipo” di atomi o molecole considerati, e al “tipo” di legami (chimici) che li tengono assieme. Infatti in un dielettrico gli elettroni restano “legati” agli atomi del reticolo, e non possono muoversi attraverso il reticolo stesso.

Comunque, anche se non si può avere un effetto eclatante come la presenza di corrente elettrica, un campo elettrico produce sempre degli effetti rilevanti anche su un dielettrico. In particolare, possiamo introdurre un modello che prevede che le cariche negative e positive (rispettivamente gli elettroni ed “il resto” degli atomi del materiale, cioè, ad esempio, il nucleo atomico) tendano a separarsi spazialmente per effetto di un campo elettrico. Infatti, dato che si tratta di cariche di segno opposto, tenderanno a muoversi in verso opposto sotto l’effetto di un campo elettrico (vedremo in seguito un modello che rende ragione di questo fenomeno). Il risultato di questa tendenza a separarsi, che si chiama **polarizzazione per deformazione** del dielettrico, è la deformazione della configurazione spaziale degli atomi, che tendono ad allungarsi formando una specie di

³³A questo proposito è rimarchevole notare che, tra i materiali esistenti in natura o realizzati artificialmente, esistono differenze enormi in termini di comportamento elettrico. Se prendiamo in considerazione la *resistività*, tra i migliori conduttori (escludendo i superconduttori) e i migliori isolanti c’è una variazione di oltre 20 ordini di grandezza!

bastoncini, di lunghezza su scala atomica (quindi estremamente corti), che portano alle estremità cariche di segno opposto. In sostanza, quindi, i componenti elementari della materia (atomi o molecole) subiscono processi che tendono a formare dei **dipoli** elettrici, sistemi del tipo di quelli che abbiamo incontrato in un precedente esercizio. Inoltre questi bastoncini avranno anche la tendenza ad orientarsi parallelamente al campo applicato, e questo possibile processo si chiama **polarizzazione per allineamento**³⁴. Dunque, un materiale dielettrico reagisce all'applicazione di un campo elettrico con una modifica della distribuzione spaziale delle cariche al loro interno.

Finora abbiamo sempre supposto che all'interno dei condensatori elettrici di cui abbiamo parlato non fosse presente alcun materiale. In termini rigorosi, avremmo dovuto supporre che fra le armature ci fosse il vuoto (assenza di materiale), ed infatti abbiamo introdotto ed impiegato la costante dielettrica del vuoto. In realtà, se anche consideriamo dei condensatori in cui c'è aria tra le armature, la situazione non cambia apprezzabilmente, dato che l'aria ha un comportamento elettrico simile al vuoto (almeno in condizioni ordinarie di pressione ed umidità). Vediamo ora di capire cosa succede se poniamo tra le armature del materiale. Ovviamente, se usiamo un materiale conduttore impediamo l'operazione del condensatore: infatti le cariche positive e negative poste sulle armature potrebbero attraversare questo conduttore, neutralizzandosi. In questo modo sarebbe impossibile accumulare cariche, e quindi il condensatore "non esisterebbe".

Se invece riempiamo lo spazio tra le armature con un materiale dielettrico (ad esempio il vetro, la maggior parte dei materiali plastici, l'acqua, purché priva di ioni che la rendono conduttrice), quello che otteniamo è un fenomeno molto interessante dal punto di vista applicativo: la capacità del condensatore va moltiplicata per un fattore ϵ_r che è sempre maggiore di uno (o uguale ad uno nel caso del vuoto). In altre parole, laddove abbiamo scritto ϵ_0 , dobbiamo ora considerare il prodotto $\epsilon_0\epsilon_r$, che talvolta si chiama *costante dielettrica* del materiale. Ad esempio, per un condensatore ad armature piane e parallele come quello definito prima, si ha che la sua capacità viene a valere $C = \epsilon_r\epsilon_0 A/d$, e similmente si verifica anche per condensatori di altra geometria (cilindrici, sferici, etc.). Il coefficiente ϵ_r , che è evidentemente adimensionato, è noto come **costante dielettrica relativa** e dipende dal materiale considerato. Ad esempio, per l'acqua $\epsilon_r \approx 80$, per il vetro $\epsilon_r \approx 9$, per alcuni polimeri (plastiche) $\epsilon_r \approx 100$.

Non entreremo in questi appunti nei dettagli del comportamento del campo elettrico nella materia, la cui descrizione si può trovare in numerosi testi. A grandi linee, la spiegazione di questo comportamento può essere compresa paragonando quello che succede in due condensatori ad armature piane e parallele con la stessa geometria, in cui lo spazio tra le armature in un caso è vuoto, e nell'altro è riempito di un dielettrico. Se supponiamo di collegare i due condensatori allo stesso generatore di differenza di potenziale, poiché il modulo del campo elettrico $|\vec{E}|$ è legato solo alla differenza di potenziale V e alla distanza tra le armature d (attraverso la relazione $|\vec{E}| = V/d$), il campo elettrico deve essere lo stesso nei due casi. Però nel condensatore riempito di materiale dielettrico la

³⁴Questo effetto è predominante nel caso di materiali costituiti da *molecole polari*, ad esempio l'acqua, l'ammoniaca, etc. Notate che in questa trattazione lo stato del materiale, solido, liquido o gassoso, non ha particolare rilievo.

polarizzazione del materiale stesso, con la conseguente separazione spaziale tra cariche positive e negative, provoca un effetto di *schermatura* del campo, la cui intensità effettiva (il suo modulo) *si riduce* proprio di un fattore ϵ_r . Affinché l'intensità del campo possa soddisfare le condizioni imposte dalla differenza di potenziale applicata, occorre che sulle armature venga richiamata della carica addizionale. Aumentando la carica accumulata sulle armature, e mantenendo costante la differenza di potenziale, l'effetto risultante è un aumento effettivo della capacità, che, come abbiamo già detto, viene moltiplicata per un fattore ϵ_r rispetto al caso in cui non ci sia alcun materiale dielettrico fra le armature.

1.6.1 Esercizio: tempo di scarica in un condensatore con dielettrico

Avete un condensatore ad armature piane e parallele di area $A = 1.0 \times 10^3 \text{ cm}^2$ e distanza relativa $d = 0.10 \text{ mm}$;³⁵ lo spazio tra le armature è riempito di un film di materiale plastico con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 100$. Il condensatore è stato caricato (fino a raggiungere condizioni di equilibrio) tramite collegamento con una pila che genera la differenza di potenziale $V_0 = 9.0 \text{ V}$, che ad un certo istante $t = 0$ viene scollegata e rimpiazzata da una resistenza costituita da un cilindretto di lunghezza $L = 1 \text{ cm}$ e sezione $S = 10 \text{ mm}^2$ fatto di un materiale omogeneo con resistività $\rho_R = 10^{-2} \text{ ohm m}$. Dopo quanto tempo t' la differenza di potenziale $V(t)$ tra le armature raggiunge il valore $V' = 1.0 \text{ V}$? (Usate il valore $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ per la costante dielettrica del vuoto)

Soluzione. Cominciamo con il calcolare la capacità C del condensatore, che risulta $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d = 8.8 \times 10^{-7} \text{ F} = 0.1 \mu\text{F}$. Quindi determiniamo la resistenza R del resistore, che è $R = \rho_R L/S = 1.0 \times 10^3 \text{ ohm} = 1.0 \text{ Kohm}$. La costante tempo τ del circuito costituito dal condensatore e dalla resistenza è $\tau = RC = 8.8 \times 10^{-4} \text{ s} = 0.88 \text{ ms}$.

Secondo quanto abbiamo stabilito nel testo, la differenza di potenziale tra le armature del condensatore varia secondo la legge $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$, e il problema ci chiede di determinare l'istante t' tale che $V(t') = V'$. Deve cioè essere: $V_0 \exp(-t'/\tau) = V'$; rimaneggiata, questa equazione diventa: $\exp(-t'/\tau) = V'/V_0$. Facendo il logaritmo naturale di entrambi i membri, si trova: $-\frac{t'}{\tau} = \ln(\frac{V'}{V_0})$, ovvero, ricordando le proprietà matematiche dell'operatore logaritmo: $t' = \tau(\ln(\frac{V_0}{V'}))$. Numericamente si ottiene $t' = 1.9 \times 10^{-3} \text{ s} = 1.9 \text{ ms}$.

1.6.2 Esercizio: costante dielettrica di un liquido isolante

Avete un liquido isolante incognito, di cui volete determinare la costante dielettrica relativa ϵ_r . A questo scopo, riempite lo spazio fra due piastrelle metalliche parallele di area $A = 10 \text{ cm}^2$ poste a distanza relativa $d = 1.0 \text{ mm}$, collegate ai poli di una batteria che genera una differenza di potenziale $V = 2.0 \text{ V}$. Dopo aver atteso il raggiungimento di una situazione di equilibrio (condizioni stazionarie), misurate con un *elettrometro* la

³⁵Armature con aree di queste dimensioni si possono ottenere avvolgendo in spirale delle lamine sottili, come si fa nei condensatori in uso in elettronica.

quantità di carica accumulata sulla piastrina collegata al polo positivo, trovando che essa vale $q = 1.0 \times 10^{-10}$ Coulomb. Quanto vale la costante dielettrica relativa ϵ_r del liquido? (Usate il valore $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto)

Soluzione. La capacità C del condensatore ad armature piane e parallele costituito dalle due piastre e dal liquido che ne riempie lo spazio è $C = q/V$; questa capacità deve essere anche pari a $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$. Combinando le due espressioni e risolvendo per ϵ_r , si trova: $\epsilon_r = qd/(V\epsilon_0 A)$; numericamente, facendo come al solito attenzione alle unità di misura, si ottiene $\epsilon_r \approx 5.7$.

1.6.3 Esercizio: polarizzazione atomica nel modello di Thomson

Con questo esercizio vogliamo individuare la causa fisica per cui un sistema atomico (detto anche *legato* proprio per il motivo che qui chiariremo) sottoposto all'azione di un campo interno può subire una polarizzazione elettrica. Tra i tanti modelli atomici proposti nell'800, uno, generalmente chiamato modello di Thomson, prevedeva che l'atomo fosse costituito da una nube di carica negativa (gli elettroni) con al centro una carica puntiforme positiva (il nucleo atomico). Poniamo di avere a che fare con un atomo di idrogeno (un protone ed un elettrone) e che la nube elettronica abbia forma sferica con raggio a e sia omogenea (cioè possa essere descritta con una densità di carica volumica uniforme, $\rho = -e/(4\pi a^3/3)$). Supponiamo che questo atomo sia sottoposto ad un campo elettrico (esterno) omogeneo \vec{E}_0 ed immaginiamo che, anche sotto l'azione di questo campo, la forma della nube elettronica rimanga sferica (e la distribuzione omogenea): quanto vale, all'equilibrio, la separazione spaziale x tra il centro della nube elettronica e la posizione della carica positiva?

Soluzione. Per la soluzione, mettiamoci in un sistema di riferimento centrato nella posizione (imperturbata) della carica puntiforme positiva, e con un asse (ad esempio, l'asse X) disposto lungo la direzione del campo esterno applicato. Per semplicità (tanto la domanda del problema chiede di valutare uno spostamento relativo), supponiamo che in questo riferimento la nube elettronica sia fissa nello spazio, cioè consideriamo solo lo spostamento della carica positiva puntiforme. Su questa carica agisce una forza di natura elettrica dovuta al campo esterno, la cui intensità vale $F_{ext} = eE_0$, avendo indicato con e il valore della carica. Inoltre, non appena la carica si muove dall'origine del riferimento, cioè dal centro della distribuzione sferica, essa risentirà anche di una forza elettrica dovuta al campo "interno" alla nube elettronica, generato dalla distribuzione di carica negativa: $F_{int} = eE_{int}$. L'intensità del campo interno E_{int} può essere valutata in funzione della posizione x applicando il teorema di Gauss alla distribuzione omogenea e sferica di carica. Con pochi passaggi, che abbiamo già più volte applicato, si trova $E_{int} = (\rho/(3\epsilon_0))x = -(e/(4\epsilon_0\pi a^3))x$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione di ρ citata nel testo dell'esercizio. A causa della dipendenza lineare rispetto ad x e del segno negativo (che proviene dal fatto che la nube ha una carica negativa), la forza interna è di tipo *elastico*: $F_{int} = eE_{int} = -e\chi x$, dove $\chi = e/(4\epsilon_0\pi a^3)$ è una costante. Allora la forza complessiva che agisce sulla carica positiva, data dalla somma di forza interna e forza esterna, si annullerà quando $x = E_0/\chi$, che quindi rappresenta la posizione di equilibrio

per il sistema. È ovvio che, se il campo esterno ha un'intensità molto rilevante, allora il carattere elastico della forza di richiamo può perdersi (la molla “si spezza”), e la carica positiva può allontanarsi indefinitamente dalla nube. Questo effetto, pur nella semplicità della nostra descrizione, assomiglia ai processi di *ionizzazione* in cui elettroni vengono “strappati” da un atomo. Per valori “ragionevoli” del campo elettrico applicato, invece, le cariche non si separano completamente, ma piuttosto si ha la creazione di un dipolo elettrico dato che la carica positiva ed il centro della distribuzione di carica negativa non occupano più la stessa posizione. Pertanto la materia costituita da questi atomi risulta *polarizzata* sotto l'azione del campo esterno³⁶.

1.6.4 Esercizio: polarizzazione per orientamento

Oltre alla deformazione della distribuzione elettronica, trattata nel precedente esercizio, esiste un altro importante meccanismo di polarizzazione nei dielettrici, detto *per orientamento*, che si applica ogni volta che la materia si può descrivere attraverso dipoli elettrici (indotti dal meccanismo di deformazione e/o legati alla struttura molecolare). Consideriamo allora una bacchetta indeformabile, di massa trascurabile e lunghezza d che porta alle estremità due cariche uguali ed opposte in segno, q e $-q$.³⁷ Immaginiamo che questa bacchetta si trovi immersa in un campo *omogeneo* e costante \vec{E}_0 ; chiamando θ l'angolo fra la direzione della congiungente le cariche e quella del campo, quanto vale, in modulo, il momento delle forze τ che agisce sulla bacchetta?

Soluzione. Si tratta di un esercizio di meccanica: alle estremità della bacchetta agirà una coppia di forze di modulo qE_0 dirette in verso opposto l'un l'altra. Il braccio di queste forze vale $(d/2) \sin \theta$ (provate a vederlo con un disegno!) e quindi il momento complessivo delle forze vale $\tau = 2(d/2) \sin \theta qE_0 = dqE_0 \sin \theta$. Questo momento tende a fuor ruotare la bacchetta attorno al suo punto di mezzo. Notate che il momento è nullo quando $\theta = 0$; se diamo un verso alla congiungente fra le cariche, stabilendo che esso va dalla carica negativa a quella positiva, avremo $\tau = 0$ quando la configurazione è parallela o antiparallela al campo. Considerazioni energetiche mostrano che la posizione di equilibrio *stabile* è quella antiparallela, come si può anche intuire notando che la carica positiva tenderà a seguire il verso delle linee del campo \vec{E}_0 (e quella negativa subirà la tendenza opposta). Dunque i dipoli della materia (indotti o presenti spontaneamente) tenderanno a disporsi in modo antiparallelo al campo, dando luogo alla polarizzazione del mezzo.

³⁶Anche se il modello di Thomson è ormai ampiamente superato, e per descrivere la natura atomica occorre servirsi di modelli basati sulla meccanica quantistica, il risultato è assolutamente ragionevole, almeno per la descrizione di un gran numero di situazioni fisiche.

³⁷Questo sistema somiglia a quello esaminato in un precedente esercizio; notate che globalmente esso è scarico, e che l'unico aspetto rilevante ai fini elettrostatici è che le due cariche si trovano separate *lungo una direzione* dello spazio.

1.7 Energia e campo elettrico

La presenza di un campo elettrico in una data regione di spazio produce, come abbiamo più volte sottolineato, degli effetti su una carica elettrica. Infatti essa può subire un'accelerazione, dunque acquistare velocità, ovvero energia cinetica, attraverso l'interazione "a distanza" con il campo. Questo suggerisce un qualche legame tra campo elettrico ed energia. D'altra parte un legame concettualmente simile può essere trovato nel caso della scarica di un condensatore attraverso un resistore elettrico: in questo caso, sicuramente c'è dell'energia che viene *dissipata* per effetto Joule attraverso la resistenza. Infatti, poiché il condensatore accumula carica ad un certo potenziale, esso può essere visto come un "serbatoio" di energia (pensate sempre al paragone con i "funghi" degli impianti idrici).

Vediamo di determinare il valore di questa energia immagazzinata nel condensatore. Nella fase di carica, ci aspettiamo che per portare le cariche elettriche al potenziale imposto dal generatore, sia necessario compiere del lavoro, cioè il generatore deve compiere del lavoro per spostare le cariche e riarrangiarne la distribuzione sulle armature nel modo richiesto per l'operazione del condensatore. Una volta che questo lavoro è stato compiuto, allora ci sarà dell'energia che si trova immagazzinata nel condensatore.

Calcoliamo questo lavoro compiuto dal generatore, ricordando che il lavoro da compiere per portare una *singola* carica e al potenziale V vale $\mathcal{L}_E = eV$. Come già affermato, questo lavoro ha sempre un segno positivo a prescindere dal segno della carica, cioè il campo elettrico fa sempre "fatica" per spostare le cariche, siano esse negative o positive. Nel processo di carica del condensatore, che, come abbiamo visto, non è istantaneo, sulle armature si viene a trovare una carica $q(t)$ che tende a crescere esponenzialmente nel tempo (per semplicità consideriamo una sola armatura, quella collegata al polo positivo del generatore).

Immaginiamo ora di suddividere il tempo totale di carica in tanti piccoli intervalli dt (sono intervalli *infinitesimi* dal punto di vista matematico). In ognuno di questi intervalli il generatore porterà sull'armatura una quantità di carica dq , anch'essa infinitesima, e per questo dovrà compiere un lavoro $d\mathcal{L}_E = dqV = dq q/C$, dove abbiamo usato la relazione, valida in ogni istante, $V = q/C$. Il lavoro totale si otterrà allora integrando questo lavoro infinitesimo su tutta la carica trasportata fino a raggiungere una condizione di equilibrio. Questa carica all'equilibrio vale $q_0 = CV_0$, con V_0 differenza di potenziale prodotta dal generatore. In sostanza dovremo calcolare l'integrale: $\mathcal{L}_E = \int_0^{q_0} (q/C) dq$. Il calcolo ci fornisce il risultato $\mathcal{L}_E = \frac{q_0^2}{2C}$, che, ricordando l'uguaglianza $q_0 = CV_0$, possiamo anche esprimere come $\mathcal{L}_E = \frac{CV_0^2}{2}$.

Il lavoro che abbiamo determinato rappresenta l'*energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore*; per un condensatore qualsiasi di capacità C che sia caricato con una carica Q ad una differenza di potenziale V generica, possiamo porre $U_{el} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$.³⁸

³⁸In questa relazione abbiamo tolto ogni pedice per rimarcare che si tratta di una relazione del tutto generale; inoltre abbiamo posto, in pratica, $U_{el} = \mathcal{L}_E$. Senza entrare troppo nei dettagli, che richiedono di considerare "chi fa lavoro su che cosa", è chiaro che la scelta dei segni è giusta, dato che il generatore fa fatica, cioè il suo lavoro è positivo, e l'energia accumulata sul condensatore è anche positiva, dato che può tradursi in un lavoro (per esempio, nella fase di scarica).

Notate che questa energia si rende disponibile quando il condensatore viene scaricato. Ad esempio, se la scarica avviene attraverso un resistore, allora potremo affermare, sulla base di un semplice ragionamento di bilancio energetico, che tutta l'energia immagazzinata nel condensatore si dissiperà per effetto Joule nel resistore (che quindi verrà riscaldato), come vedremo in un esercizio seguente.

A questo punto ragioniamo in termini più generali. Facciamo riferimento, per comodità, ad un condensatore ad armature piane parallele, di area A e separazione d . Come sappiamo, il campo elettrico, che esiste soltanto nella regione tra le armature, è in questo caso uniforme e vale $E = V/d$, cioè $V = Ed$. Inoltre la capacità in questo caso si esprime come $C = \epsilon_0 A/d$, per cui potremo porre $U_{el} = \frac{CV^2}{2} = \frac{\epsilon_0 AE^2 d^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Ad$. A questo punto è facile individuare nel prodotto Ad il *volume* racchiuso tra le armature, cioè il volume della regione in cui il campo è presente. Potremo allora definire una **densità volumica di energia** u_{el} associata al campo elettrico semplicemente dividendo U_{el} per il volume, trovando $u_{el} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$. Questo risultato, anche se è stato ottenuto per comodità di calcolo usando un condensatore ad armature piane parallele, è del tutto generale, e stabilisce che *ad un volume unitario in cui è presente un campo elettrico si associa un'energia pari a u_{el} .*

1.7.1 Esercizio: potenza ed energia dissipata su una resistenza

Abbiamo il solito condensatore di capacità C , precedentemente caricato ad una differenza di potenziale V_0 , che viene fatto scaricare attraverso una resistenza R . Quanto vale la *potenza* dissipata W per effetto Joule attraverso la resistenza? E quanto vale l'*energia* dissipata ΔE nell'intero processo di scarica?

Soluzione. Sappiamo già che $W = V^2/R$; in questo problema tale grandezza sarà dipendente dal tempo, dato che la differenza di potenziale V ai capi del condensatore, e quindi della resistenza, è funzione del tempo: $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$, con $\tau = RC$. Dunque $W(t) = (V_0^2/R) \exp(-2t/\tau)$. Per quanto riguarda l'energia dissipata, sappiamo già che deve essere, per considerazioni di bilancio energetico, $\Delta E = U_{el} = CV_0^2/2$. Confermiamo questo risultato partendo dalla definizione di potenza come *derivata* del lavoro (ovvero dell'energia) rispetto al tempo. "Invertendo" questa definizione, possiamo scrivere $\Delta E = \int_{\text{scarica}} W(t) dt$, dove l'integrale deve essere calcolato sull'*intero processo* di scarica. Detto $t = 0$ l'istante in cui la scarica ha inizio, e ricordando che questa ha un andamento esponenziale decrescente, e quindi, a rigore, richiede un tempo infinito per essere completata, potremo scrivere: $\Delta E = \int_0^\infty W(t) dt = \int_0^\infty (V_0^2/R) \exp(-2t/\tau) dt = (V_0^2/R) \int_0^\infty \exp(-2t/\tau) dt$. Facciamo una sostituzione di variabile, ponendo $\xi = 2t/\tau$; avremo allora:

$$\Delta E = \frac{V_0^2}{R} \frac{\tau}{2} \int_0^\infty \exp(-\xi) d\xi = -\frac{CV_0^2}{2} \exp(-\chi) \Big|_0^\infty = \frac{CV_0^2}{2}, \quad (1.17)$$

dove abbiamo posto $\tau = RC$ ed usato le regole di integrazione per la funzione esponenziale. Come ci aspettavamo, ritroviamo per questa via (molto più complicata!) il risultato che tutta l'energia elettrica immagazzinata nel condensatore finisce per essere dissipata per effetto Joule dalla resistenza.

1.8 Equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico nel vuoto

Uno degli aspetti più affascinanti dell'elettromagnetismo è la possibilità di descriverne i principali fenomeni attraverso un insieme di (sole) quattro leggi, che vanno sotto il nome di **equazioni di Maxwell**, due delle quali si riferiscono (prevalentemente) ai campi elettrici, e due ai campi magnetici (che tratteremo nel seguito). Tra i tanti vantaggi consentiti dal formalismo delle equazioni di Maxwell c'è la "compatibilità" con le teorie della relatività, cosa che ad esempio non si verifica con le leggi della dinamica (di Newton). Vale quindi la pena di citare le prime due equazioni di Maxwell, ricordando che stiamo trattando in questo paragrafo di *campi elettrici nel vuoto e in condizioni statiche* (ovvero stazionarie o quasi-stazionarie) e che seguiamo un approccio di tipo "integrale".³⁹

Come già accennato, quello di Maxwell è un "formalismo", che non aggiunge molto alla descrizione dei fenomeni elettrici che abbiamo già dato. In un certo senso vogliamo qui "riscrivere" e fare una specie di riassunto di leggi già stabilite ed applicate.

Infatti, quella che per noi è la **prima equazione** di Maxwell non è altro che il teorema di Gauss, che dice che il flusso del campo elettrico (nel vuoto) attraverso una superficie chiusa è pari alla carica contenuta nel volume racchiuso dalla superficie divisa per ϵ_0 (dato che siamo nel vuoto): $\Phi(\vec{E}) = Q/\epsilon_0$. Esplicitando le operazioni coinvolte in questa uguaglianza, abbiamo:

$$\int_{\text{supchiusa}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{vol}} \rho dV, \quad (1.18)$$

dove l'integrale al primo membro è fatto sulla superficie chiusa considerata (e \hat{n} è il versore normale ad ogni elementino dS in cui questa superficie può essere suddivisa), mentre l'integrale al secondo membro è fatto sul volume racchiuso dalla stessa superficie (e ρ è la densità di carica volumica in questo volume). Questa equazione (cioè il teorema di Gauss) *vale anche in condizioni non stazionarie*.

La **seconda equazione** di Maxwell coinvolge anch'essa un'operazione di integrazione, ma stavolta l'integrale è di linea (cioè viene fatto lungo una certa traiettoria) e questa linea è *chiusa*. In sostanza vogliamo calcolare l'integrale $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, a cui si dà il nome di **circuitazione**. Notate che questo integrale è, di fatto, il calcolo della differenza di potenziale su una traiettoria chiusa (da qui il circolino nel simbolo), cioè da un punto a se stesso. Abbiamo più volte affermato che, *in condizioni statiche*, il campo elettrostatico è *conservativo*; come conseguenza (può farvi comodo ricordare quanto affermato per la differenza di energia potenziale nei casi conservativi) l'integrale in questione è nullo. Allora la seconda equazione di Maxwell stabilisce che *la circuitazione del campo elettrostatico è nulla*:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (1.19)$$

³⁹In realtà ci limiteremo a scrivere qualcosa che somiglia molto da vicino alle equazioni di Maxwell: infatti scriverle correttamente richiede di analizzare i campi nella materia in una maniera più raffinata di quanto abbiamo fatto in questo capitolo. Per quanto riguarda l'aspetto "integrale", il significato di questa definizione vi sarà chiaro nel seguito.

Come vedremo nel seguito, questa equazione deve essere *modificata nei casi non statici*.

1.8.1 Esercizio: continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico

La seconda equazione di Maxwell permette di completare la soluzione del problema considerato nel par. 1.3.4. Qui ci chiediamo quale sia la relazione tra le componenti *tangenziali* dei campi \vec{E}_1 e \vec{E}_2 nelle stesse condizioni di quell'esercizio.

Soluzione. Così come il teorema di Gauss richiede di scegliere opportunamente una superficie chiusa, applicare l'Eq. 1.19, cioè eseguire la circuitazione del campo, richiede di scegliere un "circuito" ideale, cioè una linea chiusa su cui eseguire l'integrazione. Notate che, contestualmente con la scelta del circuito, occorre anche deciderne il verso di percorrenza. Nei casi elettrostatici, dato che la circuitazione deve essere nulla, questa non è cruciale, e quindi per il momento non discutiamo sulle convenzioni sul verso, che invece diventeranno importanti operando con il campo magnetico. Scegliamo dunque un circuito costituito da un rettangolo, con un lato nella regione 1 ed un lato nella regione 2. Scegliamo questi lati in modo che essi siano *paralleli* all'interfaccia, cioè al piano dato nell'esercizio. Gli altri due lati, invece, saranno *ortogonali* al piano di interfaccia. Come nell'applicazione del teorema di Gauss, anche qui abbiamo una certa libertà nello scegliere le "dimensioni" del circuito: allora facciamo in modo che i due lati ortogonali all'interfaccia siano di lunghezza *infinitesima*, cioè molto molto corti.

Possiamo a questo punto suddividere la circuitazione nella somma algebrica di quattro integrali, calcolati lungo i quattro lati del rettangolo. La lunghezza infinitesima dei due lati ortogonali all'interfaccia ci permette di affermare subito che il contributo degli integrali calcolati su questi due lati è *trascurabile*. Sugli altri due lati, invece, il contributo può essere facilmente calcolato notando che il prodotto scalare che compare in Eq. 1.19 seleziona le componenti *tangenziali* dei campi, $\vec{E}_{1,t}$ ed $\vec{E}_{2,t}$ rispettivamente nelle regioni 1 e 2. Dato che i campi sono uniformi, gli integrali da calcolare si riducono alla moltiplicazione di queste componenti per la lunghezza dei lati del rettangolo, che è ovviamente uguale per i due lati del rettangolo che stiamo considerando (i due lati paralleli al piano dell'interfaccia); chiamiamo l questa lunghezza. A questo punto torniamo sul fatto che la circuitazione impone un verso al circuito: scegliamo di adottare un verso orario (rispetto alla figura del par. 1.3.4). Allora il contributo sul lato che si trova nella regione 1, facendo riferimento ai vettori campo riportati in quella figura, sarà $E_{1,t}l$, mentre nella regione 2 avremo $-E_{2,t}l$, dove il segno negativo viene proprio dal fatto che il verso di percorrenza del circuito e quello della componente tangenziale del campo sono opposti, in questa regione. Allora potremo scrivere: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E_{1,t} - E_{2,t})l = 0$, da cui $E_{1,t} = E_{2,t}$, cioè le componenti tangenziali del campo elettrico *si conservano* passando per il piano di interfaccia, così come avevamo anticipato nella soluzione dell'Esercizio di par. 1.3.4.

1.8.2 Cenni su divergenza e rotore

La formulazione delle equazioni di Maxwell che abbiamo dato prevedono il calcolo di integrali (di superficie, volume, linea). Se pensate al significato fisico di queste operazioni, potete facilmente affermare che questo modo di procedere non permette di ricavare informazioni *locali*, cioè riferite puntualmente a posizioni dello spazio, dato che calcolare un integrale richiede sempre di considerare una regione “estesa” (più o meno) di spazio. Anche se questo approccio va benissimo per una grande serie di problemi, ce ne sono alcuni (ad esempio con le onde elettromagnetiche) in cui non si può prescindere dall’usare un approccio puntuale.

Introduciamo degli operatori che ci saranno utili nel prosieguo e che usano l’operatore “nabla” che abbiamo già incontrato nel par. 1.1.2⁴⁰. Formalmente, avevamo scritto questo vettore in coordinate cartesiane:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right), \quad (1.20)$$

che avevamo applicato allo *scalare* potenziale elettrico ϕ definendone così il *gradiente* ($\vec{\nabla}\phi$, detto anche $\text{grad}\phi$).

L’operatore nabla può essere trattato alla stregua di un vettore ed applicato anche a grandezze vettoriali, come il campo elettrico \vec{E} . In particolare, usando il *prodotto scalare*, possiamo definire la **divergenza** del campo elettrico, spesso indicata come $\text{div}\vec{E}$:

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}, \quad (1.21)$$

dove abbiamo esplicitato all’ultimo membro il risultato dell’operazione di prodotto scalare. Impiegando il *prodotto vettoriale* possiamo invece definire il **rotore** del campo elettrico, spesso indicato con $\text{rot}\vec{E}$:

$$\text{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy}, \frac{dE_z}{dx} - \frac{dE_x}{dz}, \frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx} \right), \quad (1.22)$$

dove all’ultimo membro abbiamo esplicitato componente per componente il risultato dell’operazione di prodotto vettoriale.

A questo punto occorre servirsi di alcuni teoremi di analisi matematica (detti spesso “della divergenza” e del “rotore”) ed applicarli alle equazioni di Maxwell in forma integrale che abbiamo già scritto. In questo modo si trovano le seguenti **equazioni di Maxwell in forma locale** per il campo elettrostatico nel vuoto:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.23)$$

$$\text{rot}\vec{E} = 0. \quad (1.24)$$

⁴⁰Attenzione: le definizioni che daremo valgono solo nel caso di un sistema descrivibile con coordinate cartesiane. Le espressioni sono differenti nei sistemi cilindrici e sferici!

Intuitivamente, l'operazione che abbiamo fatto è stata quella di prendere le equazioni integrali e "derivarle" (in modo un po' complicato per tenere conto dell'aspetto vettoriale) membro a membro.

Di queste relazioni può essere data una interpretazione fisica basandosi sul significato geometrico degli operatori divergenza e rotore. Come suggerito dal nome, quando l'operatore divergenza è *non nullo* per un certo campo, questo significa che *le linee di campo possono "divergere" da un punto*, cioè che esse possono "uscire" (o "entrare", il verso dipende dal segno delle cariche) da un punto. In altre parole, il campo elettrico che ha divergenza non nulla se c'è una densità di carica diversa da zero, ha come sorgente proprio questa densità di carica. Infatti, come ben sappiamo, se prendiamo una carica puntiforme le linee di campo "divergono" a partire dalla posizione occupata dalla carica stessa.

Il significato fisico del rotore è invece il seguente: se esso fosse diverso da zero, allora le linee di campo dovrebbero "ruotare" su se stesse, cioè dovrebbero essere chiuse su se stesse. Come sappiamo, questo non si verifica nel caso del campo elettrico (ma, come vedremo, è tipico per il campo magnetico), dato che, come abbiamo detto, le linee di campo elettrico si chiudono "sulle cariche".

Per concludere questa breve trattazione, osservate come la descrizione puntuale resa possibile dalle Eqq. 1.23 consenta effettivamente di valutare delle proprietà *locali* del campo, cioè definite punto per punto, dato che la ρ può effettivamente essere definita punto per punto.

1.8.3 Esercizio: divergenza e rotore in un caso di geometria piana

Facciamo un esercizio molto "formale"; supponiamo di avere in una certa regione di spazio una densità di carica volumica $\rho = \chi z$, dove χ è una costante opportunamente dimensionata. Questa distribuzione di carica, che dipende dalla sola coordinata z di un sistema cartesiano, rappresenta una situazione di geometria (e simmetria) piana (un piano molto esteso il cui spessore è lungo Z). Quanto valgono divergenza e rotore per il campo generato da questa distribuzione?

Soluzione. Applicando le definizioni date nel paragrafo precedente, troviamo subito $\text{div} \vec{E} = \chi$ e $\text{rot} \vec{E} = 0$. Quest'ultima considerazione ci permette di affermare che il campo considerato è effettivamente elettrostatico. La relazione della divergenza, invece, può suggerirci qualcosa su come sarà fatto il campo in questione. Compatibilmente con la geometria proposta, possiamo supporre che tale campo sia diretto lungo Z e dipenda solo dalla coordinata z , cioè, detto \hat{z} il versore lungo questa direzione, $\vec{E} = \hat{z}E(z)$. L'equazione di Maxwell ci dice allora che: $\frac{dE(z)}{dz} = \chi$. Questa equazione differenziale può essere facilmente integrata (χ è costante!), dando: $E(z) = E_0 + \chi z$, dove E_0 è il valore del campo per $z = 0$ (che è la condizione iniziale, o al contorno, per l'equazione differenziale risolta). Provate ad ottenere lo stesso risultato usando il teorema di Gauss: ovviamente questo deve essere possibile, dato che dal punto di vista fisico l'approccio "locale" e quello "integrale" (del teorema di Gauss) devono dare la stessa soluzione.

1.8.4 Esercizio: condizioni per avere un campo elettrostatico

Altro esercizio formale: supponiamo di avere un campo vettoriale (qualsiasi!) che, dato componente per componente, ha la forma: $\vec{e} = (ay, bx, 0)$, con a e b costanti opportunamente dimensionate. Che relazione deve sussistere tra a e b affinché il campo dato possa essere un buon campo elettrostatico?

Soluzione. In questo esercizio abbiamo un campo vettoriale di cui conosciamo la dipendenza spaziale rispetto alle variabili cartesiane x ed y (non c'è dipendenza lungo Z , né il campo ha componenti in questa direzione). Se vogliamo che questo campo sia di tipo elettrostatico, occorre che valgano le equazioni di Maxwell, in particolare quella del rotore. Calcoliamoci componente per componente il rotore (tenendo conto della definizione e facendo un po' di derivate): $\text{rot}\vec{e} = (0, 0, a - b)$; esso ha una componente lungo Z diversa da zero. Affinché il campo sia elettrostatico occorre che anche tale componente sia nulla, cioè deve essere $a = b$.