

Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2005/06
parte nuova di Magnetismo

Francesco Fuso¹
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 4a - 15.05.06

¹tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

Indice

1	Campi magnetici ed elettromagnetici	1
1.1	Forza di Lorentz	1
1.1.1	Esercizio: moto di ciclotrone	2
1.1.2	Esercizio: forza su un filo percorso da corrente	3
1.1.3	Esercizio: forze e momento delle forze su una spira immersa in campo magnetico	4
1.2	Legge di Biot-Savart e linee di campo magnetico	5
1.2.1	Esercizio: campo magnetico sull'asse di una spira di corrente	6
1.2.2	Esercizio: campo magnetico atomico	7
1.3	Flusso del campo magnetico ed equazione di Maxwell corrispondente	8
1.4	Teorema di Ampere ed equazione di Maxwell corrispondente nel caso statico	9
1.4.1	Esercizio: il campo magnetico di un filo rettilineo	9
1.4.2	Esercizio: campo magnetico in un filo	10
1.4.3	Esercizio: forza tra fili percorsi da corrente	10
1.4.4	Esercizio: il solenoide (molto lungo)	11
1.4.5	Esercizio: continuità del campo magnetico	13
1.5	Energia del campo magnetico e cenni di magnetismo nella materia	13
1.6	Fenomeni elettromagnetici non statici	14
1.6.1	Forza elettromotrice	14
1.6.2	Induzione magnetica e legge di Faraday	15
1.6.3	Esercizio: forza di Lorentz e legge di Faraday	17
1.6.4	Esercizio: la dinamo della bicicletta	19
1.6.5	Esercizio: il motore elettrico	20
1.6.6	Esercizio: spira in solenoide	20
1.7	Circuitazione del campo magnetico ed equazione di Maxwell non statica	21

Capitolo 1

Campi magnetici ed elettromagnetici

Come abbiamo già accennato, le cariche elettriche, oltre ad essere sorgente, quando sono ferme, del campo elettrostatico, sono anche coinvolte in fenomeni che hanno origine di tipo *magnetico*. Che il campo magnetico esista e produca degli effetti ben noti a tutti è ampiamente suggerito dall'esperienza comune: tutti conosciamo la bussola, tutti usiamo motori elettrici, tutti ogni giorno abbiamo a che fare con numerosissimi dispositivi che sfruttano campi magnetici.

La descrizione dei fenomeni connessi con l'esistenza del **campo magnetico**, un campo vettoriale che in questo capitolo indicheremo con \vec{B} , è normalmente più complessa rispetto a quanto si verifica con i campi elettrici. Infatti qui c'è inevitabilmente da tenere conto del fatto che le cariche, affinché possano produrre un campo magnetico o semplicemente risentirne gli effetti, devono essere *in moto* (ovvero si ha a che fare con *correnti* elettriche). La natura vettoriale del moto delle cariche si combina con quella del campo magnetico in un modo che spesso è poco intuitivo, e che richiede attenzione e formalismi specifici. Inoltre la presenza di fenomeni variabili nel tempo induce uno stretto legame tra campi elettrici e magnetici, che anch'esso deve essere affrontato con attenzione¹. In questo capitolo cercheremo di minimizzare le difficoltà di carattere tecnico, usando un approccio in cui confronteremo continuamente le principali leggi del campo elettrico con quelle del campo magnetico.

1.1 Forza di Lorentz

Il primo approccio al campo elettrico \vec{E} è stato per noi quello di darle una *definizione operativa*, basata sulla forza di natura elettrica, \vec{F}_E , che agisce su una “carica di prova” q : avevamo stabilito che $\vec{F}_E = q\vec{E}$. In presenza di un campo magnetico \vec{B} , affinché una carica di prova risenta una forza di natura magnetica \vec{F}_M occorre che essa si trovi in movimento, sia cioè dotata di una velocità \vec{v} . Si ha allora che la carica risente della cosiddetta **forza**

¹Usando la teoria della relatività ristretta è possibile dimostrare in modo abbastanza diretto che l'origine fondamentale dei campi elettrici e magnetici può essere descritta in termini generali e universali.

di Lorentz:

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.1)$$

Ovviamente, nei casi in cui fosse presente anche un campo elettrico, allora sulla nostra carica di prova agirebbe anche una forza di natura elettrica, e l'effetto complessivo sarebbe la somma vettoriale delle due forze: $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_M$. Deve essere altrettanto chiaro che il prodotto vettoriale di Eq. 1.1 si annulla quando \vec{v} e \vec{B} sono paralleli tra loro; quindi in generale non basta avere carica in moto e campo magnetico per avere una forza, ma occorre anche che le direzioni della velocità della carica e del campo formino un angolo diverso da zero.

L'Eq. 1.1 può, in linea di principio, essere considerata come una definizione operativa per il campo magnetico, anche se il prodotto vettoriale che vi è espresso rende abbastanza difficile legare in modo semplice tra loro le caratteristiche della forza e del campo. Ci limitiamo allora ad alcune affermazioni. In primo luogo risulta evidente che campo magnetico e campo elettrico non hanno le stesse dimensioni². Infatti, per avere le dimensioni di una forza, è sufficiente moltiplicare il campo elettrico per una carica, mentre nel caso magnetico occorre moltiplicare ulteriormente per una velocità. Dunque le dimensioni di \vec{B} sono quelle del campo elettrico diviso per una velocità. È quindi necessario definire una nuova unità di misura per il campo magnetico: tale unità prende il nome di Tesla (simbolo T). Un campo magnetico di un Tesla produce la forza di 1 N su una carica di valore 1 C quando questa si muove con velocità $v = 1$ m/s.

Altra considerazione: avevamo visto che il campo elettrico produce un lavoro quando una carica si sposta, come conseguenza del fatto che \vec{F}_E è parallela allo spostamento. Qui, invece, la forza è ottenuta attraverso un prodotto vettoriale, e quindi è sempre *ortogonale* alla velocità, ovvero allo spostamento. Pertanto la forza magnetica non fa lavoro nello spostamento di una carica. Aspetto ancora più importante: avevamo affermato che il campo elettrico (*statico*), in quanto legato ad una forza di tipo centrale, simile formalmente alla forza gravitazionale, aveva carattere conservativo. Il campo magnetico, invece, *non ha carattere conservativo*. Di conseguenza non è possibile, ovvero non ha senso, definirne un potenziale (*scalare*), come avevamo fatto nel caso elettrostatico.

1.1.1 Esercizio: moto di ciclotrone

Supponete di avere una particella carica puntiforme q di massa m che si muove con una certa velocità \vec{v} diretta nel verso positivo dell'asse X di un sistema di riferimento. Per $x > 0$ è presente un campo magnetico *uniforme* \vec{B} diretto lungo il verso positivo dell'asse Z . Che tipo di moto compie la carica nel semispazio $x > 0$ (cioè sotto l'effetto di questo campo magnetico)?

Soluzione. Osserviamo come prima cosa che l'energia cinetica della particella carica si conserva; infatti il lavoro del campo magnetico è nullo. Pertanto il *modulo* della sua velocità rimane costante. Altrettanto non può dirsi della direzione. Infatti nel semispazio

²Questa è una "strana" caratteristica del sistema di unità di misura che stiamo utilizzando; è possibile impiegare sistemi di unità di misura in cui le dimensioni dei due campi coincidono.

$x > 0$ sulla carica agisce la forza di Lorentz, che è sempre *ortogonale* alla velocità, e quindi alla traiettoria della particella, il cui modulo vale $F_M = qvB$.³ Come sappiamo dallo studio della dinamica, il moto della particella sotto l'azione di una forza costante ortogonale alla sua velocità è *circolare uniforme* e la forza F_M gioca proprio il ruolo della forza centripeta. Quindi la particella descriverà una circonferenza muovendosi a velocità costante ed uniforme. Il raggio R di questa circonferenza si trova uguagliando i moduli della forza centripeta, $F_c = m\omega^2 R = mv^2/R$, e della forza di Lorentz; si ottiene, per v assegnato: $R = mv/(qB)$, detto talvolta **raggio di ciclotrone**. Notate che questo raggio dipende dal rapporto q/m e quindi sarà diverso per cariche, o masse, diverse. Questo effetto è spesso impiegato per realizzare dei “selettori” di massa e/o di carica, dispositivi in grado di selezionare la massa e/o la carica di particelle in moto (utili ad esempio per impieghi analitici). Più in generale, invece, la capacità di modificare la traiettoria di una carica in moto con campi magnetici (e quindi con l'applicazione di forze che non richiedono un contatto diretto) è sfruttata in molti sistemi di uso comune, per esempio nei “tubi catodici” (gli schermi) dei (vecchi) televisori, dove un fascio di elettroni raggiunge la superficie in posizioni diverse dipendenti dall'applicazione di opportuni campi magnetici.

1.1.2 Esercizio: forza su un filo percorso da corrente

Come sappiamo, la corrente elettrica è, in pratica, un flusso di cariche che si muovono. Quindi è ovvio che un campo magnetico è in grado di produrre forze anche su queste cariche, e, quindi, *sul filo*. Supponiamo allora di avere un filo percorso da una corrente stazionaria $I = 1.0$ A, ad esempio disposto lungo l'asse X di un riferimento cartesiano, e un campo magnetico uniforme e costante \vec{B} diretto nel verso positivo dell'asse Z e di modulo $B = 1.0 \times 10^{-2}$ T.⁴ Quanto vale e come è diretto l'elemento di forza $d\vec{F}$ che agisce su un piccolo tratto $d\vec{l}$ del filo? Supponendo che tutto il filo abbia lunghezza $L = 10$ cm, quanto vale la forza complessiva che agisce su di esso?

Soluzione. Cerchiamo innanzitutto un legame tra intensità di corrente e velocità delle cariche (positive, per convenzione) che costituiscono questa corrente. Chiamiamo S l'area della sezione del filo, e poniamo che la densità di corrente \vec{j} che attraversa il filo sia *uniforme*. Avremo allora $I = \Phi(\vec{j}) = \int_{\text{sezione}} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = jS$. D'altra parte, per definizione si ha $\vec{j} = \rho\vec{v}$, con ρ densità volumica delle cariche che partecipano alla corrente. Quindi la velocità delle cariche sarà in modulo $v = I/(S\rho)$, mentre la sua direzione e verso saranno quelli della corrente (cioè sarà diretta nel verso positivo dell'asse X , come dato dal testo del problema). Consideriamo un elementino di filo di lunghezza $d\vec{l}$ (questo vettore avrà anch'esso, ovviamente, la direzione ed il verso dell'asse X per come è costruito l'esercizio); il volumetto di filo associato a questo elementino di lunghezza sarà dV . Allora all'interno dell'elementino, in condizioni stazionarie, ci sarà una quantità di carica $q = \rho dV$ (stiamo considerando una densità uniforme, come è ragionevole in questo caso). Osserviamo che campo magnetico (lungo Z) e velocità delle cariche (lungo X) sono tra loro ortogonali,

³Il verso della forza si può trovare con la *regola della mano destra*.

⁴In condizioni realistiche non si riesce a produrre campi magnetici di grande intensità; per questo nell'esercizio supponiamo di avere un'intensità del campo inferiore a 1 T.

ed il prodotto vettoriale tra di loro è diretto lungo $-Y$ (cioè nel verso negativo dell'asse Y , come ci dice la regola della mano destra). La forza di Lorentz che agisce su questo elementino di filo ha inoltre modulo pari a $qvB = \rho dlS(I/(S\rho)B = IdlB$. In forma che tiene conto del carattere vettoriale, potremmo anche scrivere la forza di Lorentz che agisce su un elemento (infinitesimo) di filo percorso dalla corrente I come:

$$d\vec{F}_M = Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1.2)$$

Per trovare la forza complessiva che agisce sul filo, occorre sommare su tutti i contributi infinitesimi, cioè integrare la relazione appena trovata. L'integrale, però, è molto molto semplice: infatti, essendo il campo omogeneo e la corrente costante ed uniforme, il contributo infinitesimo di forza non dipende dalla posizione considerata lungo il filo, per cui la forza potrà trovarsi semplicemente moltiplicando sostituendo dl con L (lunghezza totale del filo). Si ottiene quindi, in modulo (direzione e verso sono già stati discussi): $F = ILB = 10^{-3}$ N.

1.1.3 Esercizio: forze e momento delle forze su una spira immersa in campo magnetico

Abbiamo visto come un campo magnetico (omogeneo) produca una forza su un filo percorso da corrente, e ne abbiamo calcolato l'intensità nel caso di un filo rettilineo. Cosa succede (in termini meccanici) se, invece, il filo è ripiegato a formare un anello, cioè una **spira**? Supponiamo allo scopo di avere una spira circolare di raggio a percorsa da una corrente stazionaria I ed immersa in una regione di campo magnetico uniforme \vec{B} , ortogonale rispetto al piano della spira. Quanto vale la forza $d\vec{F}$ su ogni elementino $d\vec{l}$ della spira? Qual è l'effetto complessivo sull'intera spira? Come cambia il risultato se \vec{B} forma un angolo $\theta \neq 0$ rispetto all'asse della spira?

Soluzione. Individuiamo la direzione della forza che agisce su ogni elementino della spira: tale direzione dovrà essere radiale, dato che l'elemento $d\vec{l}$ appartiene ad una circonferenza (è *tangenziale*) mentre \vec{B} è ortogonale al piano della circonferenza, e la forza ha la direzione individuata dal prodotto vettoriale fra queste due direzioni. Inoltre tale forza è sempre orientata verso l'esterno della spira stessa. L'effetto complessivo è, dunque, quello di tendere a "espandere" la spira. Se questa è supposta *rigida*, cioè il suo raggio non può essere modificato, non c'è alcun effetto meccanico, cioè la spira complessivamente non risente di alcuna forza dato che le forze su due elementi diametralmente opposti si annullano a vicenda. Inoltre, considerando come polo il centro della spira, possiamo senz'altro concludere che anche il momento delle forze che agiscono su elementi diametralmente opposti è nullo, dato che sono nulli i bracci delle forze coinvolte.

Se, invece, supponiamo che il campo magnetico abbia una direzione che forma un angolo $\theta \neq 0$ rispetto all'asse della spira, allora possiamo facilmente convincerci che esiste un'importante differenza. La Fig. 1.1.3 mostra la spira vista "in sezione" (cerchietto e crocetta indicano le direzioni della corrente attraverso due elementi della spira diametralmente opposti; si suppone che, guardando dall'alto, la corrente circoli in verso antiorario)

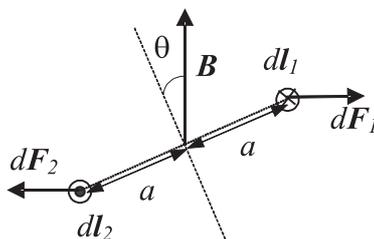


Figura 1.1: Vista in sezione della spira percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico \vec{B} di cui si tratta nel testo.

ed indica le direzioni delle forze infinitesime che agiscono su due elementi $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ diametralmente opposti della spira. Le forze sono ancora tali da annullarsi l'un l'altra, ma il *momento delle forze* complessivo diventa diverso da zero, dato che queste forze hanno un braccio non nullo rispetto al centro della spira (come si vede dalla figura). Dunque, la spira risente di un *momento torcente* il cui modulo, come si può dimostrare, vale $\tau = I\pi a^2 B \sin \theta$.

1.2 Legge di Biot-Savart e linee di campo magnetico

Obiettivo di questo paragrafo è fornire una *legge costitutiva* del campo magnetico che abbia, in qualche modo, un significato e una rilevanza simili a quelle dell'equazione $d\vec{E} = \kappa dQ/r^2 \hat{r}$ che abbiamo dato per il campo elettrico⁵. Abbiamo già lasciato intendere che l'origine fisica dei campi magnetici è la presenza di cariche in moto. Quindi un metodo immediato per produrre un campo magnetico è di impiegare una corrente elettrica di intensità I . Supponiamo allora di avere tale corrente e chiamiamo $d\vec{l}$ un elementino del filo attraverso cui la corrente scorre (analogamente a quanto fatto nella soluzione dell'esercizio precedente). Scegliamo un punto *al di fuori del filo* nel quale vogliamo determinare il valore del contributo $d\vec{B}$ al campo magnetico dovuto all'elementino di filo (cioè di corrente) generico $d\vec{l}$; chiamiamo inoltre \vec{r} il vettore che congiunge l'elementino di filo considerato al punto in questione (e poniamo \hat{r} il versore che individua la direzione di questo vettore). La **legge di Biot-Savart** stabilisce che:

$$d\vec{B} = \kappa_M I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}, \quad (1.3)$$

dove κ_M è una costante opportunamente dimensionata che è specifica per il campo magnetico (da cui il pedice M). Notate le analogie formali con l'"analoga" legge per il campo elettrico: c'è anche qui una dipendenza lineare con l'"intensità" della sorgente (lì la carica elettrica, qui l'intensità di corrente) e una dipendenza inversa con il quadrato della distanza. Il tutto è poi moltiplicato per una costante specifica che, anche in questo caso, è

⁵Notate che scriviamo un'equazione per il contributo infinitesimo al campo perché, come abbiamo visto nel capitolo precedente, questo ci lascia maggiore flessibilità per descrivere casi in cui la distribuzione di carica non è quella, semplicissima, delle cariche puntiformi.

spesso data in funzione di un'altra costante. Si pone infatti $\kappa = 4\pi/\mu_0$, con $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Tm/A, detta **permeabilità magnetica del vuoto** (anche qui supponiamo di stare “nel vuoto”, cioè di non avere materiale che subisce gli effetti magnetici di cui daremo poi un cenno).

A parte questo aspetto di costanti differenti, esiste una grande differenza rispetto al caso elettrico, dovuta alla presenza del prodotto vettoriale. Vediamone subito un'importantissima conseguenza. Supponiamo allora di avere un filo percorso dalla corrente I , e consideriamone un elementino $d\vec{l}$. Costruiamo idealmente un piano ortogonale all'elementino e passante per questo; in pratica avremo un piano che è attraversato dalla corrente. Ora consideriamo delle circonferenze che giacciono su questo piano e che hanno come centro il punto di intersezione tra elementino di filo e piano stesso. I punti di ognuna di queste circonferenze concentriche avranno tutti la stessa distanza r , in modulo, rispetto all'elementino (r sarà proprio il raggio, generico, delle circonferenze), e pertanto su tutti i punti di ognuna di queste circonferenze il campo magnetico avrà *modulo* costante (dato che l'intensità del campo dipende proprio da r). Il prodotto vettore di Eq. 1.3 ci mostra invece che la *direzione* del campo magnetico su tutti i punti di ognuna di queste circonferenze sarà sempre ortogonale al piano e al raggio \vec{r} , cioè il campo magnetico avrà direzione *tangenziale* ad ogni punto di ognuna di queste circonferenze.

Abbiamo allora stabilito una caratteristica fondamentale delle linee di campo magnetico: esse sono *sempre chiuse su se stesse*; in particolare, nel caso di un filo rettilineo percorso da corrente, esse appartengono a circonferenze concentriche con il filo. Il *verso* del campo su queste linee chiuse può essere determinato con la regola della mano destra. In questo ambito è spesso comodo rifrasedare la regola in questo modo: ponendo il pollice della mano destra in direzione della corrente, allora le linee di campo si richiudono come si chiude il pugno della mano stessa (è come fare “ciao ciao” con la mano destra!).

1.2.1 Esercizio: campo magnetico sull'asse di una spira di corrente

Nel capitolo dedicato al campo elettrico, avevamo calcolato per esercizio il campo sull'asse di un anello carico. Consideriamo ora un anello di corrente, cioè una **spira** di raggio a , percorsa da una corrente I , e determiniamo il campo magnetico \vec{B} generato da questa corrente su un punto dell'asse a distanza z generica rispetto al piano della spira.

Soluzione. Ragioniamo “di simmetria” come nel caso elettrico, e consideriamo due elementini di spira, $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$, diametralmente opposti (vedi Fig. ??, in cui la spira è in sezione). Supponiamo che il *verso* di circolazione della corrente sia tale da essere antiorario quando la spira si osserva dall'alto. Notiamo allora che, rispetto al foglio, entrambi gli elementini sono ortogonali, ma, dovendo essi avere lo stesso verso della corrente, $d\vec{l}_1$ “entra” nel foglio, mentre $d\vec{l}_2$ “esce” dal foglio, come schematicamente indicato in figura con crocetta e puntino. I contributi al campo magnetico, $d\vec{B}_1$ e $d\vec{B}_2$, dei due elementini sono uguali in modulo, mentre la loro direzione e verso è indicata in figura. Notate che essi, dovendo essere ortogonali alle congiungenti \vec{r}_1 e \vec{r}_2 (il cui modulo è, per Pitagora, pari a $(z^2 + a^2)^{1/2}$), hanno direzioni ortogonali a quelle del contributo al campo nel

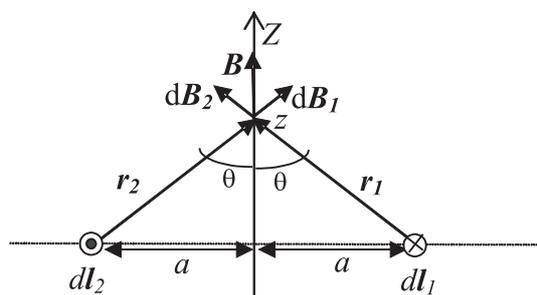


Figura 1.2: Vista in sezione della spira percorsa da corrente di cui si tratta nel testo.

caso elettrico che abbiamo calcolato nel capitolo precedente. Però, eseguendo la sovrapposizione $d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2$, il risultato è sostanzialmente lo stesso del caso elettrico, cioè le componenti fuori asse si annullano anche in questo caso. Dunque si può proseguire come abbiamo fatto nel caso elettrico (determinando la proiezione lungo Z dei contributi ed “integrando”, cioè sommando sulla circonferenza della spira) per ottenere il risultato finale: $\vec{B} = \hat{z}\mu_0 I a^2 / (2(z^2 + a^2)^{3/2})$. Anche in questo caso possiamo svogere considerazioni sull’andamento del campo a grandi distanze, cioè per $z \rightarrow \infty$: trascurando al denominatore a rispetto a z , si vede che il campo va a zero come $1/z^3$. Noterete che questo andamento è tipico di un *campo di dipolo*, come quello che avevamo determinato nel capitolo precedente per il caso elettrico.

Questa considerazione è molto generale: il *campo magnetico ha un carattere dipolare*, come ci si aspetta dalla circostanza che *non sono mai stati trovati monopoli magnetici*, cioè gli analoghi magnetici per le cariche elettriche (positive o negative). Potete anche provare a disegnare le linee di campo nel caso della spira (sembrano orecchie di elefante) e provare a confrontarle con quelle di un dipolo elettrico: a parte la sostanziale differenza che in quest’ultimo caso le linee escono dalla carica positiva ed entrano in quella negativa, la forma geometrica è simile nei due casi.

1.2.2 Esercizio: campo magnetico atomico

Il modello più semplice per l’atomo è quello cosiddetto planetario, in cui gli elettroni ruotano attorno al nucleo (supposto fisso nello spazio) compiendo un moto circolare uniforme⁶. Consideriamo un atomo di idrogeno, e poniamo che la velocità angolare dell’elettrone (la cui carica è $e \approx -1.6 \times 10^{-19}$ C) sia $\omega = 6.3 \times 10^{15}$ rad/s, e che il raggio dell’orbita valga $a = 5.0 \times 10^{-11}$ m (questi valori sono ragionevoli, come potreste facilmente verificare!). Quanto vale, in modulo, il campo magnetico B sull’asse dell’orbita, ad una distanza $z = 1.0 \times 10^{-6}$ m dal piano dell’orbita stessa?

Soluzione. È sufficiente derivare la formula, che abbiamo derivato nella soluzione dell’esercizio precedente, per il campo sull’asse di una spira percorsa da corrente. Notate che in questo caso non abbiamo un filo elettrico con un flusso di cariche che ci passa dentro,

⁶La teoria dell’irraggiamento e la meccanica quantistica stabiliscono che questo modello è sbagliatissimo per vari motivi. Usiamolo però in questo esercizio!

ma una sola carica (l'elettrone) che compie periodicamente delle rotazioni attorno ad un punto (il centro dell'orbita). Se ci mettiamo in una certa posizione appartenente all'orbita, vedremo che l'elettrone passa ripetutamente per questa posizione, con un periodo che è pari al periodo T della rotazione; si ha quindi $T = 2\pi/\omega = 1.0 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ (un tempo piccolissimo!). Allora, notando che la corrente è definita come il rapporto tra una carica ed un tempo, potremo individuare una "corrente effettiva" per il nostro problema, il cui valore è $I = e/T = 1.6 \times 10^{-4} \text{ A}$. A questo punto possiamo calcolarci il modulo del campo magnetico sull'asse a distanza z : $B = \mu_0 I a^2 / (2(z^2 + a^2)^{3/2}) \approx 2.0 \times 10^{-13} \text{ T}$. Valori di quest'ordine di grandezza, benché molto piccoli pur a distanza relativamente piccola dal piano dell'orbita, possono essere sufficienti per determinare un comportamento peculiare della materia in termini di risposta a campi magnetici, come accenneremo in seguito.

1.3 Flusso del campo magnetico ed equazione di Maxwell corrispondente

Abbiamo dunque stabilito che le linee di campo magnetico sono chiuse su se stesse. Questa situazione è ben diversa da quella che si incontra nel caso elettrico, dove invece le linee di campo escono ed entrano dalle sorgenti (qui, invece, sono sempre ortogonali alla direzione delle correnti). Introducendo le equazioni di Maxwell nel capitolo precedente, avevamo intuito come quella caratteristica delle linee di campo elettrico fosse strettamente legata alla forma di quella che abbiamo chiamato prima equazione di Maxwell, ovvero il teorema di Gauss. In particolare, è ovvio che possiamo definire anche per il campo magnetico un *flusso attraverso una superficie chiusa*, che sarà: $\Phi(\vec{B}) = \int_{\text{supchiusa}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$, \hat{n} essendo il versore normale ad ogni elementino di superficie dS .⁷ Nel caso magnetico, però, il secondo membro del teorema di Gauss sarà *sempre e comunque* (cioè anche nei casi non statici) pari a *zero*. Quindi l'equazione di Maxwell corrispondente si scrive, in forma integrale:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\text{supchiusa}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0, \quad (1.4)$$

ovvero, in forma *locale* (con la divergenza):

$$\text{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.5)$$

Riassumendo, le linee di campo magnetico sono chiuse su se stesse⁸, il campo ha sempre divergenza nulla e non esiste nel caso magnetico l'analogo delle cariche elettriche ("monopolari").

⁷Vale la pena di ricordare che all'unità di misura del flusso di campo magnetico, cioè al valore $1 \text{ T}/1 \text{ m}^2$, si dà spesso il nome di Weber, simbolo W.

⁸Il campo si dice allora **solenoidale**.

1.4 Teorema di Ampere ed equazione di Maxwell corrispondente nel caso statico

La circostanza appena enunciata ci priva di un importante strumento, il teorema di Gauss, per determinare il campo magnetico: infatti la quantità di informazioni pratica che si possono trarre dall'equazione del flusso del campo magnetico è molto più limitata che nel caso elettrico. Fortunatamente, però, esiste un'altra legge, specifica per il campo magnetico, che aiuta nella determinazione dei campi magnetici generati da una certa configurazione di corrente. Questa legge, a cui si dà spesso il nome alternativo di **teorema di Ampere**, coincide con l'ultima delle equazioni di Maxwell e, come potete intuire, ha a che fare con la *circuitazione del campo magnetico*. Nel caso statico si ha infatti:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{conc} , \quad (1.6)$$

dove I_{conc} rappresenta la **corrente concatenata** con la linea rispetto alla quale si esegue la circuitazione, cioè la corrente che *attraversa* la superficie delimitata dalla linea chiusa. Notate che anche il secondo membro del teorema di Ampere può essere espresso nella forma di un integrale (di superficie); infatti, introducendo la *densità di corrente* \vec{j} , si ha $I_{conc} = \Phi(\vec{j}) = \int_{sup} \vec{j} \cdot \hat{n} dS$, dove la superficie considerata è quella *delimitata dalla linea chiusa* di circuitazione.

Per vostra informazione, in forma *locale* l'equazione di Maxwell corrispondente si scrive:

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} . \quad (1.7)$$

Vedete quindi che, nei casi statici che per il momento consideriamo, laddove nel caso elettrico era nullo il rotore, qui è nulla la divergenza, a testimonianza ulteriore della grande differenza che esiste tra i due campi, elettrico e magnetico.

In un certo qual modo, inoltre, il ruolo del teorema di Ampere è simile a quello di Gauss nel caso elettrico, e quindi anche per la sua applicazione occorre scegliere in modo opportuno la linea chiusa di circuitazione, così come per Gauss avevamo posto attenzione nello scegliere le superfici chiuse su cui calcolare il flusso del campo elettrico.

1.4.1 Esercizio: il campo magnetico di un filo rettilineo

Torniamo a considerare un filo rettilineo percorso da corrente stazionaria I . Abbiamo già stabilito quale sia la forma delle linee di campo (delle circonferenze concentriche al filo, cioè il campo è *tangenziale* con verso dato dalla regola della mano destra), ma non ne abbiamo ancora stabilito il modulo. Ora possiamo farlo. Dunque, quanto vale il modulo B ad una distanza r generica dal filo?

Soluzione. Questo è un caso in cui l'Eq. 1.6 può essere impiegata con profitto. Infatti sappiamo che, su circonferenze di raggio r generico concentriche al filo, il campo è uniforme e sempre diretto tangenzialmente, cioè lungo la circonferenza stessa. Dunque, se scegliamo come linea di circuitazione una di queste circonferenze, con un dato raggio

r , avremo al primo membro di Eq. 1.6, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B2\pi r$ ($2\pi r$ è la lunghezza della linea chiusa, cioè della circonferenza). Al secondo membro avremo semplicemente $\mu_0 I$, dato che *tutta* la corrente che passa nel filo attraversa la superficie circolare di cui la circonferenza di circuitazione è perimetro. Uguagliando i membri avremo: $B = \mu_0 I / (2\pi r)$, che fornisce la soluzione al problema dato⁹

1.4.2 Esercizio: campo magnetico in un filo

Nell'esercizio precedente abbiamo determinato il campo "al di fuori" del filo (e d'altra parte porre $r = 0$ nella soluzione darebbe seri problemi di divergenza del risultato, che quindi non può essere ottenuto per quella via). Qui, invece, supponiamo di avere un filo cilindrico di raggio a finito (non nullo), ed immaginiamo che esso sia interessato dalla corrente I in modo *uniforme*. Quanto vale il modulo del campo magnetico B all'interno del filo e ad una certa distanza $r < a$ dal suo asse?

Soluzione. Dato che le considerazioni preliminari all'applicazione del teorema di Ampere sono valide anche in questo caso, essendo la simmetria del problema ancora di tipo cilindrico, possiamo anche qui usare l'Eq. 1.6. Il primo membro resterà formalmente inalterato, cioè sarà ancora $2\pi r B$, con $r < a$. Al secondo membro, invece, dovremo qui tenere conto del fatto che solo una porzione di I è concatenata con la linea di circuitazione. Per determinare il valore di I_{conc} , deriviamo il modulo della densità di corrente j ; poiché, per ipotesi, la corrente scorre uniformemente in ogni sezione del cilindro che rappresenta il filo, allora, essendo $S = \pi a^2$ l'area di sezione del filo, avremo $j = I/S = I/(\pi a^2)$. La corrente concatenata potremo allora determinarla calcolando il flusso di \vec{j} sulla superficie (circolare) delimitata dalla linea di circuitazione: $I_{conc} = \int_{supconc} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = j \int_{supconc} dS = j\pi r^2 = Ir^2/a^2$, avendo tenuto conto della direzione di \vec{j} (parallela all'asse del cilindro) e della sua uniformità. Uguagliando i membri del teorema di Ampere si ha allora: $B = \mu_0 I r / (2\pi a^2)$, cioè, finché si sta all'interno del filo, il campo cresce linearmente con la distanza dall'asse.

1.4.3 Esercizio: forza tra fili percorsi da corrente

Abbiamo stabilito quale forza (di natura magnetica) è esercitata da un campo magnetico su un filo rettilineo percorso da corrente, ed abbiamo visto quanto vale il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente. Dunque ci aspettiamo che si determini una forza tra due fili percorsi da corrente. Prendiamo quindi due fili rettilinei, paralleli tra loro, percorsi da corrente della stessa intensità I . Supponiamo che la lunghezza di questi fili sia L , che il verso di percorrenza della corrente sia opposto nei due fili, e che la distanza tra i fili stessi sia d (la Fig. 1.4.3 mostra schematicamente la situazione da considerare). Quale forza \vec{F} si esercita tra i due fili?

Soluzione. Consideriamo uno dei due fili, ad esempio quello indicato con 1 in figura, come sorgente del campo magnetico e calcoliamo la forza esercitata sull'altro filo,

⁹Notate che questo risultato è valido nei casi di simmetria cilindrica, cioè per fili molto sottili e lunghi.

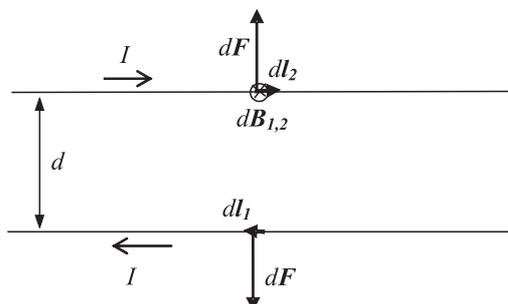


Figura 1.3: Fili paralleli percorsi da corrente per la soluzione dell'esercizio proposto nel testo.

il 2, da questo campo magnetico¹⁰. Il campo generato dal filo 1 sul filo 2 ha modulo $B_{1,2} = \mu_0 I / (2\pi d)$, essendo d la distanza tra i fili. La sua direzione è ortogonale al foglio, ed il verso, per la regola della mano destra, è entrante nel foglio. Consideriamo ora un elementino $d\vec{l}_2$ del filo 2; la forza infinitesima su questo elementino vale in modulo $dF = I dl_2 dB_{1,2}$, ha direzione ortogonale al filo (ai fili) e verso che tende ad allontanare i fili stessi¹¹. Per trovare la forza complessiva che agisce sul filo 2 occorre sommare, ovvero integrare, su tutti gli elementini; dato che l'integrando è chiaramente costante, si ottiene $F = ILB_{1,2} = \mu_0 I^2 L / (2\pi d)$.

1.4.4 Esercizio: il solenoide (molto lungo)

Il solenoide è una bobina di filo elettrico percorso da corrente. Supponiamo che questa bobina abbia una sezione circolare, con un raggio molto minore dell'altezza della bobina (cioè il sistema ha simmetria puramente cilindrica). Chiamiamo $n = N/L$ la "densità" di spire, cioè il numero totale di spire N diviso per la lunghezza totale L del solenoide; la Fig. 1.4.4 mostra una visione schematica e non in scala del sistema visto "in sezione". Inoltre indichiamo con I la corrente che scorre nel filo che costituisce la bobina. Sapendo che il campo magnetico all'esterno del solenoide è nullo¹², come è fatto e quanto vale il campo magnetico \vec{B} all'interno del solenoide?

Soluzione. Anche in questo caso è possibile, e anzi fortemente consigliabile, usare il teorema di Ampere. Consideriamo infatti una linea chiusa di circuitazione rappresentata dal rettangolo tratteggiato di figura: esso ha due lati paralleli all'asse del solenoide (ovvero del cilindro che lo rappresenta) e due ortogonali all'asse. Inoltre i due lati paralleli sono uno all'interno e uno all'esterno del solenoide. Scegliamo anche un verso su questo circuito, poniamo quello antiorario. A questo punto possiamo scomporre la circuitazione

¹⁰Ovviamente il risultato non dipende da quale filo scegliamo come sorgente e da quale, invece, usiamo per calcolare la forza: ricordate che vale sempre il principio di *azione e reazione*, e quindi la forza che il filo 1 esercita sul 2 è uguale ed opposta a quello che il 2 esercita sull'1!

¹¹Se il verso della corrente fosse concorde nei due fili, essi tenderebbero ad avvicinarsi: provatelo usando opportunamente la regola della mano destra!

¹²Questa affermazione, come potrebbe essere facilmente dimostrato, si verifica solo nel caso di solenoidi molto molto lunghi, idealmente infiniti.

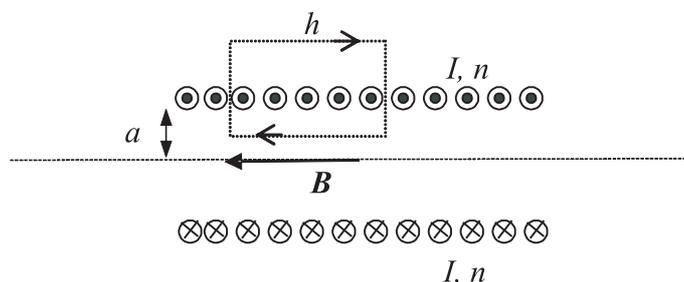


Figura 1.4: Visione schematica e in sezione del solenoide; pallini e crocette indicano la direzione della corrente, entrante od uscente dal foglio.

(primo membro del teorema di Ampere) nella somma algebrica di quattro integrali, ognuno relativo ad uno dei lati del rettangolo di circuitazione. Notiamo che, a causa della simmetria del problema, ci aspettiamo che il campo magnetico, dove presente, abbia una direzione lungo l'asse del solenoide. Infatti esso non può certamente essere radiale, dato che, se così fosse, le linee di campo entrerebbero (o uscirebbero) dalle sorgenti del campo, cioè le correnti che passano per le spire del solenoide, e questo è in disaccordo con la “terza” equazione di Maxwell. Inoltre le linee di campo non possono neppure essere tangenziali: se così fosse, esse sarebbero parallele alle sorgenti (la corrente scorre tangenzialmente, in un riferimento di coordinate cilindriche concentrico con l'asse del solenoide), e questo non è possibile per il prodotto vettoriale che compare nella legge di Biot-Savart. Dunque l'unica direzione possibile è quella assiale¹³.

Questa considerazione preliminare sulla direzione del campo, ci consente di dire che i contributi alla circuitazione sui lati ortogonali all'asse sono nulli, essendo nullo il prodotto scalare tra \vec{B} e gli elementi $d\vec{s}$ appartenenti a questi lati. D'altra parte, essendo per ipotesi nullo il campo fuori dal solenoide, anche il contributo sul lato esterno al solenoide sarà nullo. Resta quindi solo il contributo del lato interno; sempre a causa della simmetria, il campo interno al solenoide (supposto molto molto lungo) sarà uniforme rispetto alla posizione assiale, e quindi la circuitazione complessiva diventa semplicemente Bh , dove h è la lunghezza del lato del rettangolo di circuitazione considerato (vedi figura).

A questo punto dobbiamo calcolare il secondo membro del teorema di Ampere, cioè la corrente concatenata. La superficie delimitata dal rettangolo di circuitazione è attraversata da diverse spire del solenoide, esattamente in un numero pari a nh . Ognuna di esse porta una corrente I per cui la corrente concatenata diventa $I_{conc} = nhI$. Uguagliando i due membri del teorema di Ampere e semplificando opportunamente si ottiene allora: $B = \mu_0 In$. Come si vede, questo campo non dipende neppure dalla posizione all'interno della sezione del solenoide, per cui possiamo concludere che il *il campo all'interno di un solenoide molto lungo è uniforme*¹⁴. Per quanto riguarda il verso del campo, infine, esso

¹³Notate come, nel caso magnetico, a causa dei prodotti vettoriali che compaiono nelle varie leggi, le conseguenze che si possono trarre da geometria e simmetria dei problemi sono assai diverse rispetto al caso elettrico.

¹⁴Questa stessa conclusione si può trarre usando un rettangolo di circuitazione tutto interno al solenoide. Analogamente, usando un rettangolo tutto al di fuori del solenoide e scegliendolo “molto largo”, cioè tale

è dato dalla regola della mano destra e risulta essere quello indicato in figura.

1.4.5 Esercizio: continuità del campo magnetico

Nel capitolo precedente abbiamo svolto un esercizio finalizzato a determinare le relazioni tra componenti tangenziali e normali del campo elettrico in presenza di un piano di interfaccia. Servendosi della stessa configurazione (cioè della stessa figura e definizioni) ma riferendosi a campi magnetici, che relazione esiste tra le componenti $B_{1,n}$ e $B_{2,n}$ e tra le componenti $B_{1,t}$ e $B_{2,t}$?

Soluzione. Esattamente come nel caso elettrico, dobbiamo servirci delle equazioni di Maxwell, cioè calcolare il flusso e la circuitazione del campo su superfici e linee chiuse opportune (le stesse che abbiamo usato nel caso elettrico). Ripetendo i vari ragionamenti, si ottiene facilmente che: $B_{2,n} = B_{1,n}$, cioè *le componenti normali sono continue* e $B_{2,t} = B_{1,t} + \mu_0 I$, dove I è la corrente che eventualmente scorre sul piano di interfaccia (in direzione uscente dal foglio, relativamente alla figura considerata nel capitolo precedente).

1.5 Energia del campo magnetico e cenni di magnetismo nella materia

Avevamo dimostrato come ad un campo elettrico \vec{E} potesse essere associata una densità di energia di natura elettrica pari a $u_{el} = (\epsilon_0/2)E^2$. Non vogliamo qui applicare lo stesso tipo di ragionamenti al caso magnetico, cosa che richiederebbe alcune conoscenze addizionali (la definizione di *induttanza*, per esempio), ma ci limitiamo a dare un risultato che vi apparirà del tutto ragionevole. Allora, in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico \vec{B} si ha una **energia magnetica per unità di volume** $u_{mag} = B^2/(2\mu_0)$ (occhio a dove si trova la permeabilità magnetica: qui è a dividere, mentre ϵ_0 era a moltiplicare nel caso elettrico!).

Tutti i fenomeni magnetici di cui abbiamo trattato finora trascuravano eventuali effetti del campo magnetico sulla materia. D'altra parte, è arcinoto, fin dall'antichità, che la materia può possedere eclatanti proprietà magnetiche. Pensiamo ad esempio alle calamite. In effetti esistono in natura (o possono essere prodotti artificialmente) dei materiali che godono, tra l'altro, della proprietà di generare dei campi magnetici anche in assenza di correnti elettriche macroscopiche. La descrizione dettagliata di questa classe di materiali, che va sotto il nome di materiali **ferromagnetici**¹⁵, per esempio il ferro, il nickel, etc., richiede complesse teorie di tipo quantistico. Tuttavia, intuitivamente, possiamo associare i meccanismi di base dei fenomeni nei quali questi materiali sono coinvolti con le "correnti

un suo lato finisca "all'infinito" (dove si può supporre che il campo sia nullo), notando che questo circuito non concatena alcuna corrente, si può dedurre che il campo esterno al solenoide è nullo. Notate che questo implica che le linee di campo si "richiudono su se stesse" in punti molto molto distanti, ovvero *all'infinito*.

¹⁵Anche se gli effetti sono molto meno eclatanti, esistono anche materiali *ferroelettrici*, con proprietà simili ma trasferite nell'ambito elettrico.

elettriche atomiche” di cui ci siamo brevemente interessati nel par. 1.2.2. La differenza fondamentale tra i ferromagneti e gli altri materiali (che si dicono para- o dia-magnetici a seconda della risposta ad un campo magnetico applicato) sta nel fatto che le correnti atomiche associate a diversi componenti elementari della materia possono “cooperare”, all’interno di regioni relativamente estese, dette *domini*, per creare campi magnetici sufficientemente intensi da essere rilevabili (e sfruttabili in molte applicazioni, pensate alla bussola, e anche al campo magnetico terrestre che la bussola rileva!).

Inoltre, in analogia con il caso elettrico, per molti materiali la risposta ad un campo magnetico esterno dipende da un coefficiente relativo (adimensionato), la **permeabilità relativa** μ_r (che può assumere valori molto maggiori di uno), tale che la permeabilità effettiva del materiale diventa $\mu_0\mu_r$. In questo contesto è ragionevole che anche la densità di energia magnetica all’interno di un materiale possa essere modificata per la presenza di questo coefficiente relativo.

1.6 Fenomeni elettromagnetici non statici

In tutta la trattazione dei fenomeni elettrici e magnetici che abbiamo affrontato finora abbiamo sempre supposto che essi fossero statici, ovvero stazionari, o, al massimo, *quasi-stazionari* (cioè variabili su una scala temporale lenta, come quella della corrente alternata che troviamo nelle nostre case). Un mondo di effetti interessantissimi (e ricchissimi di applicazioni, dal motore elettrico al telefonino, per intenderci) è associato invece alla presenza di campi non stazionari, ma variabili (rapidamente). Come denominatore comune, questi effetti hanno l’aspetto singolare di mescolare campi elettrici e magnetici fra di loro. Di conseguenza, due delle equazioni di Maxwell che abbiamo scritto per il caso statico devono essere modificate, come vedremo.

1.6.1 Forza elettromotrice

Torniamo per un attimo ad un argomento che abbiamo già affrontato (nei casi stazionari e quasi-stazionari). Supponiamo di avere un circuito che, in prima approssimazione, consideriamo di tipo *resistivo*, cioè caratterizzato da una certa resistenza elettrica R . Il modello più semplice possibile per un tale circuito è un pezzo di conduttore, ad esempio un filo elettrico fatto di materiale che ha una certa *resistività*. Se vogliamo che questo circuito “supporti” della corrente, cioè che sia possibile che la corrente circoli al suo interno, occorre che, in un qualche modo, il circuito sia “chiuso su se stesso”. Una spirale fatta di filo di rame rappresenta allora la configurazione più semplice possibile¹⁶.

Trattando dei circuiti elettrici, abbiamo imparato che, *normalmente*, occorre applicare una differenza di potenziale affinché si possa avere una corrente in un circuito. Ad esempio,

¹⁶Ovviamente questa spirale potrebbe avere una forma qualsiasi, cioè non è necessario che essa sia circolare, anche se, per praticità, immagineremo spesso di avere geometrie semplici, ad esempio circolare, quadrata, rettangolare, etc. Notate anche che qualche volta potremo avere a che fare con *bobine*, che possiamo pensare come tante spire sovrapposte tra di loro.

questo si può realizzare collegando una pila (o altro generatore di differenza di potenziale) al circuito. Pensando alla spira, nulla ci vieta di immaginare una pila di dimensioni molto piccole, tali cioè da non modificare la “forma” della spira stessa. Allora è chiaro che la differenza di potenziale fornita dalla pila è la causa fisica che genera la corrente, cioè permette il moto delle cariche all’interno del circuito; in altre parole, la pila, a causa della differenza di potenziale esistente ai suoi poli, si comporta da “pompa di circolazione” per le cariche elettriche. In questo ambito, con una definizione non molto felice, ma storicamente consolidata, la differenza di potenziale si chiama spesso **forza elettromotrice**¹⁷, che qui indicheremo con il simbolo ε (in pratica, detta V la differenza di potenziale fornita dal generatore e fatta la giusta scelta dei segni, $\varepsilon = V$).

Ricordando la definizione di differenza di potenziale, potremo scrivere, per il nostro circuito fatto da una spira collegata ad una pila: $\varepsilon = V = \int_{\text{circ}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$, con \vec{E} campo all’interno del circuito (il campo che fa muovere le cariche) e $d\vec{s}$ elementino di circuito. L’integrale va esteso tra inizio e fine del circuito, e considerando la geometria del sistema (la pila è così piccola da non modificare la geometria della spira), di fatto l’integrale viene fatto *sulla linea chiusa* che descrive la spira. Potremo allora sostituire il simbolo di integrale con quello della circuitazione, cioè avremo:

$$\varepsilon = V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.8)$$

L’ultimo membro di questa relazione è, di fatto, la *circuitazione* del campo elettrico; se togliamo la pila, cioè poniamo $V = 0$, la “seconda” equazione di Maxwell per il campo elettrostatico ci dice che $\varepsilon = 0$. Infatti, *in condizioni statiche*, non è possibile avere corrente in una spira a meno che questa non venga collegata ad un generatore di differenza di potenziale.

1.6.2 Induzione magnetica e legge di Faraday

Qualcuno di voi avrà sicuramente smontato una dinamo da bicicletta: nella bicicletta non ci sono pile o batterie, eppure, sfruttando il lavoro meccanico del pediatore, si riesce a creare una corrente, cioè si produce una forza elettromotrice, che serve ad illuminare la lampadina nelle passeggiate notturne. Il componente fondamentale della dinamo è un pezzo di calamita, un magnete, che viene posto in rotazione (grazie alle pedalate) all’interno di una spira (o bobina, o avvolgimento di filo). D’altronde tutti sappiamo che esistono i motori elettrici (e tanti altri dispositivi), in cui, in pratica, si compie un processo “opposto” rispetto a quello della dinamo. Nel motore, una forza elettromotrice (prodotta ad esempio da una pila) viene usata per creare del lavoro meccanico, e anche nel motore elettrico possono esserci magneti e spire, o avvolgimenti.

¹⁷La definizione è brutta perché non si tratta di una *forza*, ma, piuttosto, di una *differenza di potenziale*, quindi una grandezza che ha dimensioni completamente diverse rispetto a quelle della forza. Inoltre avvertiamo che non entreremo nel dettaglio della scelta dei segni, a meno che questo non venga esplicitamente richiesto, limitandoci a considerare la convenzione per cui la corrente è fatta di cariche positive, e quindi va da punti a potenziale maggiore a punti a potenziale minore (dal polo positivo a quello negativo della pila).

In effetti, numerosissimi esperimenti hanno confermato che, *nei casi non statici*, la circuitazione del campo elettrico *non è nulla*¹⁸. Infatti vale la cosiddetta **legge di Faraday dell'induzione magnetica**. Supponendo di avere un campo magnetico il cui flusso $\Phi(\vec{B})$ attraverso la superficie delimitata dal circuito (dalla spira) *cambia nel tempo*, si ha:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}. \quad (1.9)$$

In altre parole, se abbiamo un campo magnetico e, in qualche modo, ad esempio attraverso opportune configurazioni di movimento meccanico, riusciamo ad ottenere che il suo flusso attraverso la spira sia non costante nel tempo¹⁹, allora generiamo *per induzione* una forza elettromotrice *anche in assenza di generatori di differenza di potenziale*.

In conseguenza della legge di Faraday, l'equazione di Maxwell in forma integrale per la circuitazione del campo diventa:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}, \quad (1.10)$$

che, per vostra informazione, diventa in forma locale:

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (1.11)$$

Notate come, nei casi non statici, l'equazione di Maxwell stabilisca un fondamentale legame tra campo elettrico e campo magnetico: quindi, nei casi non statici, non ha più senso trattare separatamente i due aspetti, ma si ha piuttosto a che fare con **campi elettromagnetici**.

Osservate anche la presenza del segno meno in queste equazioni; a questa presenza si dà talvolta il nome di **legge di Lenz**. Dato che si tratta di discutere sui segni, a questo punto è essenziale dare una convenzione per il segno del flusso. Ricordando la definizione di flusso, $\Phi(\vec{B}) = \int_{\text{sup}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$, dove l'integrale è calcolato sulla superficie delimitata dalla spira, è chiaro che questa convenzione si traduce nello stabilire univocamente il verso di \hat{n} (che, ricordiamo, è il versore ortogonale ad ogni elementino dS in cui suddividiamo la superficie stessa). La convenzione è la seguente: il verso di \hat{n} si ottiene con la regola della mano destra. Infatti esso ha il verso del pollice quando il pugno della mano destra si chiude seguendo il verso della corrente (positiva). A sua volta, il verso della corrente (positiva) è quello che produce un campo magnetico diretto come \hat{n} .

Per capire il significato di quanto detto, supponiamo di avere una spira interessata da un flusso variabile di campo magnetico "esterno" (come questo si possa praticamente realizzare lo vedremo negli esercizi riportati nel seguito). Dunque, questo flusso variabile induce una forza elettromotrice, cioè una corrente all'interno della spira. Questa corrente

¹⁸Se ricordate bene, l'equazione della circuitazione del campo elettrico era stata derivata partendo dalla definizione di campo conservativo: qui stiamo quindi affermando che, nei casi non statici (e solo in questi!), si perde il carattere conservativo del campo elettrico.

¹⁹Se il flusso fosse costante la sua derivata sarebbe nulla, e ritroveremmo la situazione statica.

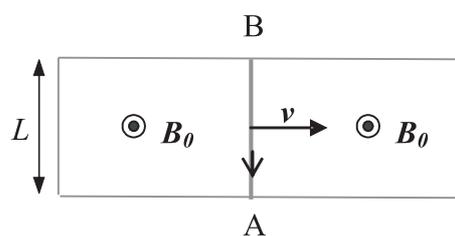


Figura 1.5: Rappresentazione schematica della spira con lato mobile immersa in campo magnetico considerata nel testo; si intende che il campo magnetico \vec{B}_0 è presente, ed omogeneo, in tutto lo spazio.

indotta produce a sua volta un campo magnetico, dato che circola nella spira; il segno negativo nella legge di Faraday significa che la variazione di flusso prodotto da questo campo indotto *si oppone* alla variazione di flusso del campo “esterno”. Capiremo meglio come stanno le cose svolgendo i prossimi esercizi.

1.6.3 Esercizio: forza di Lorentz e legge di Faraday

Abbiamo trattato situazioni in cui si induce una forza elettromotrice a causa di variazioni di flusso di campo magnetico. La presenza di una forza elettromotrice indica che le cariche del conduttore che realizza la spira vengono messe in movimento, cioè risentono di una forza. D'altra parte abbiamo visto come, avendo un campo magnetico, si possano avere forze sulle cariche elettriche dovute alla *forza di Lorentz*. Dunque è ragionevole cercare un legame tra questa forza e la legge di Faraday. Allo scopo, serviamoci di un esercizio. Avete una spira di forma rettangolare disposta su un piano. Questa spira ha un “lato mobile” senza attrito (ad esempio potete pensare ad una bacchettina di materiale conduttore che scorre, senza attriti, mantenendo un contatto elettrico con il resto della spira). Le dimensioni rilevanti di questa spira con lato mobile sono indicate nella Fig. 1.6.3, che mostra una visione del sistema: in particolare, il lato mobile ha lunghezza L . Ora, supponete di avere un campo magnetico \vec{B}_0 *uniforme e costante* di direzione ortogonale al piano della spira (immaginatelo “uscente”, come in figura). Il lato mobile viene trainato da una forza esterna, muovendosi con una velocità *costante* \vec{v} diretta come in figura. Che origine microscopica ha e quanto vale la forza elettromotrice ε indotta sul lato mobile della spira (e quindi sulla spira), cioè la differenza di potenziale V tra i punti A e B indicati in figura?

Soluzione. La nostra spira, e quindi in particolare il lato mobile, è fatta di materiale conduttore. Pertanto, coerentemente con il modello di conduttore che abbiamo sempre usato, essa contiene delle cariche (relativamente) libere di muoversi. Dato che avremo a che fare con correnti elettriche, convenzionalmente create da cariche *positive* in moto, prendiamo in considerazione cariche di questo segno. Poiché la barretta si muove con velocità \vec{v} , anche le cariche si muovono. D'altra parte è presente un campo magnetico, dunque una carica positiva q appartenente alla barretta risentirà di una forza di Lorentz, $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}_0$. Applicando la regola della mano destra al prodotto vettoriale, vediamo

che questa forza è diretta *lungo* la barretta, ed orientata “verso il basso” della figura. Per l’ortogonalità di \vec{v} rispetto a \vec{B}_0 , il suo modulo vale semplicemente $F_M = qvB_0$. Dunque, le cariche della barretta si muovono sotto l’effetto di questa forza; ciò equivale a dire che è come se esse risentissero di un campo elettrico *indotto* $\vec{E}^* = \vec{F}_M/q$ (ricordate la definizione operativa di campo elettrico!). Possiamo allora attribuire a questo campo elettrico indotto il ruolo di causa per il moto delle cariche, e calcolare la differenza di potenziale tra i punti A e B che ad esso è associata: $V = -\int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{s}$, dove l’integrale è calcolato sul lato mobile, cioè sulla barretta. Dato che la forza è uniforme su tutta la barretta (e parallela ad ogni suo elemento di lunghezza $d\vec{s}$), l’integrale dà semplicemente $V = E^*L$. Sostituendo con il valore del campo indotto si ottiene $V = F_M L/q = qvB_0 L/q = vB_0 L$.

Ora esaminiamo il problema da un altro punto di vista, quello della legge di Faraday. Infatti possiamo osservare che il movimento della spira mobile produce, di fatto, una variazione (costante nel tempo, perché v è costante) dell’area della spira stessa. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira, vista l’ortogonalità tra \vec{B}_0 e il piano della spira, è semplicemente $\Phi(\vec{B}) = AB_0$, con A *area della spira*; essendo \vec{B}_0 costante, la derivata temporale del flusso che entra nella legge di Faraday è: $d\Phi(\vec{B}_0)/dt = B_0 dA/dt$. D’altra parte, dato che la spira è rettangolare, di altezza costante L e base che aumenta nel tempo secondo la velocità (costante) v , si ha semplicemente $dA/dt = Lv$. Allora per la legge di Faraday abbiamo: $\varepsilon = -vB_0 L$. Notate che il punto B viene a trovarsi a potenziale maggiore rispetto al punto A: questo significa che la corrente che scorre nella barretta va “verso il basso” in figura.

Notate che, a parte il segno, che discuteremo fra un attimo, abbiamo riottenuto lo stesso valore trovato applicando il metodo della forza di Lorentz. In effetti la spira è un circuito chiuso; di conseguenza, la differenza di potenziale V coincide, in modulo, con la forza elettromotrice ε . La trattazione con Faraday, in realtà, fornisce un’ulteriore informazione, quella sul *segno*; il segno negativo che abbiamo trovato indica che *la corrente indotta scorre in senso opposto* rispetto a quello che avrebbe una corrente in grado di determinare una variazione di flusso dello stesso segno di quella prodotta dal campo esterno. In parole, l’area della spira sta aumentando, e quindi sta aumentando il flusso del campo magnetico esterno attraverso di essa. Questo segno positivo significa che abbiamo stabilito come *positivo* il verso di \vec{B}_0 . Riferendosi alla figura ed applicando la regola della mano destra, un campo diretto come \vec{B}_0 sarebbe prodotto da una corrente che circola in senso antiorario. Invece, come si deduce dal segno negativo, e come abbiamo verificato con Lorentz, la corrente *indotta* circola in senso orario.

Questo esercizio, oltre ad illustrare alcune particolarità tipiche delle situazione di induzione magnetica, ci mostra quindi come la legge di Faraday abbia un’origine chiara e ben definita in termini *microscopici*, cioè basati sull’esame del moto delle singole cariche. Quindi la legge di Faraday e la modifica delle equazioni di Maxwell che ne consegue sono perfettamente compatibili con quanto già avevamo stabilito a proposito del campo magnetico.

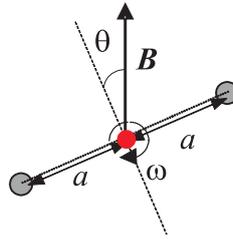


Figura 1.6: Rappresentazione schematica del problema considerato nel testo; la spira è rappresentata in sezione, ed il punto colorato al centro è l'asse di rotazione (che corrisponde ad un suo diametro). Si intende che il campo magnetico \vec{B} è presente, ed omogeneo, in tutto lo spazio.

1.6.4 Esercizio: la dinamo della bicicletta

Supponiamo di avere una spira circolare di raggio $a = 5.0$ cm che ruota *attorno ad un suo diametro* con una velocità angolare $\omega = 10$ rad/s (la rotazione avviene senza attriti). Un campo magnetico omogeneo e costante \vec{B} , di modulo $B = 1.0 \times 10^{-3}$ T, generato da un magnete, intercetta la spira come indicato in Fig. 1.6.4, che rappresenta una vista “in sezione” della spira; per chiarire, supponiamo che l'angolo tra asse della spira e \vec{B} sia $\theta_0 = 0$ all'istante $t = 0$. Sapendo che il filo con cui è realizzata la spira ha una resistenza elettrica $R = 10$ mohm (si legge milliohm), quanto vale il valore massimo I_{max} della corrente indotta nella spira, e come è fatto l'andamento temporale $I(t)$ di tale corrente?

Soluzione. Se considerate che il moto della spira sia reso possibile dalle pedalate di un ciclista, vedete che l'esercizio proposto rappresenta, con un po' di approssimazione, una dinamo di bicicletta. Calcoliamo il flusso del campo magnetico (esterno) \vec{B} attraverso la spira; esso sarà $\Phi(\vec{B}) = \int_{\text{spira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$. In questo problema, sia l'area della spira ($A = \pi a^2$) che il campo magnetico esterno rimangono costanti nel tempo, mentre la direzione di \hat{n} (che coincide con l'asse della spira!) cambia nel tempo. Detto θ l'angolo indicato in figura, si vede che, ad un istante t generico, avremo $\theta(t) = \theta_0 + \omega t = \omega t$ (l'ultimo passaggio tiene conto della “condizione iniziale” $\theta_0 = 0$). Allora il coseno dell'angolo che entra nel prodotto scalare necessario per il calcolo del flusso sarà anch'esso funzione del tempo. Avremo quindi: $\Phi(\vec{B}) = BA \cos(\theta(t)) = B\pi a^2 \cos(\omega t)$. Derivando questa relazione troveremo $\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -B\pi a^2 \omega \sin(\omega t)$, e quindi, applicando la legge di Faraday, avremo $\varepsilon = B\pi a^2 \omega \sin(\omega t)$. Questo risultato indica che avremo una forza elettromotrice *alternata*, cioè con un verso che cambia segno periodicamente, che fluisce nella spira. Poiché questa ha resistenza R , e supponendo di poter applicare la legge di Ohm²⁰, si avrà attraverso la spira, una corrente alternata $I(t) = \varepsilon/R = (B\pi a^2 \omega \sin(\omega t))/R$. Il valore massimo che questa corrente può assumere nel tempo (il *valore di picco*) si ha negli istanti in cui $\sin(\omega t) = 1$. Allora $I_{max} = B\pi a^2 \omega/R$; numericamente si ottiene

²⁰Questa precisazione è necessaria perché la legge di Ohm vale, a rigore, solo nei casi di corrente continua o alternata con frequenza bassa; qui è possibile servirsene, ma, come vi sarà più chiaro in seguito, in genere occorre un po' di attenzione.

$I_{max} \approx 8 \times 10^{-2}$ A. Chiaramente nella dinamo di una bicicletta, o, in generale, in qualsiasi generatore che sfrutta un campo magnetico, la corrente viene fatta fluire fuori della spira, ad esempio nella lampadina del fanale. In altre parole, la spira non è chiusa su se stessa, ma attraverso un *carico* (e allora la resistenza da considerare sarà la serie di quella della spira e di quella del carico esterno). Inoltre, dato che questo valore di corrente non è esaltante, in genere al posto di una semplice spira si usano avvolgimenti composti da tante spire; poiché si ha induzione di forza elettromotrice su ognuna di esse, il risultato sarà quello di “moltiplicare” per il numero di spire la corrente generata. Infine notate come la corrente indotta aumenti all’aumentare di ω (più velocemente pedalate, più si illumina la lampadina del fanale!).

1.6.5 Esercizio: il motore elettrico

Facciamo un modello semplicissimo di motore elettrico; riferendoci alla stessa situazione geometrica dell’esercizio precedente, quello sulla dinamo, immaginiamo qui che non sia imposto alcun movimento alla spira, e che, invece, il modulo del campo magnetico esterno sia *variabile nel tempo*, ad esempio esprimibile nella forma $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$. Supponendo che, all’istante $t = 0$, asse della spira e direzione di \vec{B} coincidano, cioè che $\theta_0 = 0$, quanto vale la corrente indotta I ? Quale effetto si determina?

Soluzione. In questo problema la variazione del flusso di campo magnetico è dovuta (anche) alla variazione temporale di $B(t)$; nella configurazione considerata, la forza elettromotrice indotta ha comunque la stessa espressione che abbiamo trovato in precedenza: $\varepsilon = B\pi a^2 \omega \sin(\omega t)$. A questa forza elettromotrice corrisponde una corrente indotta, il cui valore è, come prima, $I(t) = \varepsilon/R$. Ora osserviamo che questa corrente circola su una spira; pertanto essa genera un campo magnetico indotto (lo sappiamo calcolare solo sull’asse, ma esso è comunque presente in tutto lo spazio). Ci veniamo quindi a trovare nelle condizioni di una spira immersa in un campo magnetico; come abbiamo discusso nel par. 1.1.3, questa situazione determina un *momento di forze* sulla spira, che quindi comincia a ruotare attorno all’asse. Determinare questo momento delle forze, e in particolare la sua evoluzione temporale, è un obiettivo complesso, dato che, quando la spira comincia a ruotare, l’angolo θ diventa diverso da zero (e variabile nel tempo). Tuttavia possiamo sicuramente affermare che quello che abbiamo stabilito è alla base del funzionamento di un motore elettrico.

1.6.6 Esercizio: spira in solenoide

Abbiamo un solenoide di lunghezza $L = 20$ cm e raggio $a = 2.0$ cm (quindi “molto lungo”, idealmente infinito) realizzato avvolgendo $N = 1000$ spire di filo elettrico, la cui resistenza è $R_1 = 0.22$ ohm; all’interno di questo solenoide, e coassiale ad esso, si trova una spira di raggio $b = 1.0$ cm. Se il solenoide viene collegato alla rete elettrica “di casa”, cioè ad un generatore (ideale) di differenza di potenziale $V(t) = V_0 \cos(2\pi ft)$, con $V_0 = 220$ V e $f = 50$ Hz, quanto vale la forza elettromotrice massima (di picco) $V_{2,max}$ che si genera sulla spira?

Soluzione. Come suggerito dal testo, possiamo considerare il solenoide come “infinito”; quindi, notando che la corrente che vi fluisce vale, per la legge di Ohm²¹, $I_1(t) = (V_0/R_1) \cos(2\pi ft)$, possiamo dire che il campo nel solenoide è variabile nel tempo e vale $B(t) = \mu_0(N/L)I(t) = \mu_0(N/L)(V_0/R_1) \cos(2\pi ft)$. Determiniamo ora il flusso di questo campo sulla spira di sezione $S = \pi b^2$ completamente immersa in questo campo; vista la geometria (la spira è coassiale al solenoide), avremo semplicemente $\Phi(\vec{B}(t)) = \pi b^2 B(t)$. Derivando rispetto al tempo questo flusso (e cambiando di segno), otterremo la forza elettromotrice indotta sulla spira, che quindi sarà: $\varepsilon_{spira} = \pi b^2 \mu_0(N/L)(V_0/R_1) 2\pi f \sin(2\pi ft)$. La forza elettromotrice massima si avrà negli istanti in cui la funzione seno vale uno, e sarà $V_{2,max} = \pi b^2 \mu_0(N/L)(V_0/R_1) 2\pi f$; numericamente si ottiene $V_{2,max} \approx 0.6$ V (abbiamo usato il valore $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Tm/A).

Questo semplice esercizio mette in luce come gli effetti dell’induzione magnetica possano essere usati per modificare il valore di una differenza di potenziale alternata. In particolare, proprio sull’induzione sono basati i meccanismi di operazione dei **trasformatori** in cui, facendo passare corrente alternata in un avvolgimento (primario), si induce una forza elettromotrice, sempre alternata, in un avvolgimento (secondario) che “sente” il flusso di campo magnetico (variabile) dovuto al primario²². Giocando con numero delle spire e altri parametri costruttivi si può fare in modo che al secondario si abbia una forza elettromotrice maggiore o minore rispetto a quella del primario, “trasformando” così la tensione disponibile.

1.7 Circuitazione del campo magnetico ed equazione di Maxwell non statica

Osservando le equazioni di Maxwell così come esse sono state scritte nel caso statico, è possibile apprezzare una sorta di “parallelismo speculare” tra campo elettrico e magnetico. Negli ultimi paragrafi abbiamo visto come la trattazione di situazioni non stazionarie modifichi l’equazione della circuitazione del campo elettrico, e ne abbiamo anche dato una interpretazione microscopica. Non vi stupirà allora sapere che, nei casi non statici, anche l’equazione che esprime la circuitazione del campo magnetico (cioè il teorema di Ampere) viene modificata. Avevamo scritto $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{conc}$, che è valida nel caso statico. Se però nella superficie delimitata dalla linea di circuitazione si registra un *flusso di campo elettrico* variabile nel tempo, allora al secondo membro occorre aggiungere (sommare) un termine del tipo $\epsilon_0 \mu_0 d\Phi(\vec{E})/dt$. Quindi l’equazione di Maxwell corrispondente (la

²¹Ricordate la nota ad un precedente esercizio e considerate che questa è una (discreta) *approssimazione* di quanto si verifica in realtà, parzialmente giustificata dal fatto che la corrente alternata che stiamo considerando ha una bassa frequenza.

²²In genere, per aumentare l’efficienza di accoppiamento magnetico tra primario e secondario mantenendo la possibilità di realizzare dispositivi pratici si sfrutta anche una importante proprietà dei materiali *ferromagnetici* della quale non abbiamo fatto cenno. Questa proprietà consente di “catturare” tutte le linee di campo del primario e “guidarle” nel secondario.

“quarta”) diventa, in forma integrale e nel vuoto (stiamo usando ϵ_0 e μ_0):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{conc} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}, \quad (1.12)$$

dove sia la corrente concatenata che il flusso del campo elettrico sono calcolati rispetto alla superficie di cui la linea chiusa di circuitazione rappresenta il perimetro. Esprimendo tutti i termini al secondo membro attraverso integrali di superficie, si ha, equivalentemente:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\text{sup}} \vec{j} \cdot \hat{n} dS + \epsilon_0 \mu_0 \int_{\text{sup}} \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (1.13)$$

Per vostra informazione, la corrispondente espressione locale recita:

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (1.14)$$

L'insieme completo delle quattro equazioni di Maxwell fornisce la base per la trattazione generale dei fenomeni elettromagnetici, in particolare delle *onde elettromagnetiche* di cui tratteremo brevemente nel prossimo capitolo. Qui limitiamoci a notare un aspetto interessante (e un po' inquietante) delle situazioni non statiche, che serve anche a motivare alcune affermazioni che abbiamo fatto in questo capitolo. Dunque, nei casi non statici campi elettrici e magnetici sono accoppiati tra loro. Se supponiamo di avere un campo magnetico oscillante nel tempo, ad esempio prodotto da un solenoide alimentato con una tensione variabile (velocemente), allora verrà indotto un campo elettrico. Anche questo campo elettrico sarà oscillante, alla stessa frequenza del primo, e quindi sarà in grado di produrre un campo magnetico indotto. Ma questo campo magnetico indotto sarà a sua volta oscillante, e quindi indurrà un campo elettrico che creerà un campo magnetico, e così via. Dunque, un grado sempre più accurato di conoscenza dei campi elettromagnetici sembrerebbe richiedere una sorta di approccio “iterativo”, di cui, evidentemente, la soluzione stazionaria o quasi stazionaria rappresenta la prima approssimazione. Fortunatamente, come vedremo in seguito, esiste un potente metodo, quello legato alle funzioni d'onda, che permette di ottenere una soluzione accurata dei campi elettromagnetici in numerosi casi di interesse.