Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2007/08

Francesco Fuso[1]
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3, 56127 Pisa

versione 6 - 07.11.07

[1]tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: http://www.df.unipi.it/~fuso/dida

Indice

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce da lezioni di fisica generale per diversi corsi di laurea, non ha alcuna pretesa di costituire il testo "unico" per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario (ed anche in molti testi per la scuola superiore). Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, con pochi discorsi, senza tabelle e con pochissime figure[1], è soprattutto quello di fornire una sorta di "programma esteso" del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti, con particolare riferimento alla soluzione di semplici esercizi.

Revisioni:

1. Versione 5, 15.10.06: prima versione completa destinata agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura;
2. Versione 5a, 19.10.06: aggiunte alcune figure, qualche esercizio e commenti minori a proposito di vettori e moto circolare;
3. Versione 5b, 30.10.06: correzioni minori ai paragrafi relativi al moto armonico;
4. Versione 5c, 10.01.07: aggiunti cap. 2–4 e revisione complessiva del testo;
5. Versione 5, 15.10.06: prima versione completa destinata agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura;
6. Versione 5a, 19.10.06: aggiunte alcune figure, qualche esercizio e commenti minori a proposito di vettori e moto circolare;
7. Versione 5b, 30.10.06: correzioni minori ai paragrafi relativi al moto armonico;
8. Versione 5c, 10.01.07: aggiunti cap. 2–4 e revisione complessiva del testo;
9. Versione 6, 7.11.07: versione rivista dei capitoli 1 e 2;

[1] A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo!

Capitolo 1

Introduzione

Questo corso ha lo scopo di introdurre i concetti e le tecniche di base della fisica generale (meccanica del punto, del corpo rigido e dei fluidi, termodinamica, elettromagnetismo). L'obiettivo della fisica generale è lo studio di alcuni fenomeni e processi fondamentali che si verificano spontaneamente in natura o che sono provocati dall'applicazione di tecniche specifiche. Proprio perché si rivolge a fenomeni di tipo fondamentale, la fisica è una disciplina *semplice*: ad esempio, il punto di vista della fisica prevede di studiare separatamente i singoli processi di base, di discutere il comportamento di singole particelle, o al massimo di coppie di particelle che interagiscono solo fra di loro, di impiegare "semplici" principi che consentono di giungere direttamente alla descrizione delle principali conseguenze fisiche di fenomeni anche complicati.

Il *metodo* della fisica si basa sull'osservazione della realtà, cioè sull'individuazione di grandezze caratteristiche del fenomeno sotto indagine e sulla loro misura. Quindi, sfruttando un modello interpretativo "ragionevole", i dati dell'osservazione vengono analizzati, consentendo di giungere alla formulazione di *leggi*, cioè di rappresentazioni matematiche che riassumono la dipendenza tra le variabili sperimentali, o di *principi*, cioè considerazioni di carattere generale sul comportamento fisico del sistema studiato.

L'interesse (ed il valore aggiunto) dello studio della fisica è nella possibilità di fare un percorso simile, ma in un certo senso "alla rovescia", rispetto a quello che conduce alla formulazione di leggi e principi. Partendo dalla conoscenza di pochi, semplici concetti, spesso mutuati od ispirati dall'esperienza comune, lo studio della fisica dovrebbe condurre a costruire un modello interpretativo dei dati (sperimentali o riportati nel testo di un problema) che offre la possibilità di comprendere il fenomeno indagato, o di fare previsioni quantitative sull'esito di un effetto.

In questi appunti cercheremo di seguire questa impostazione, privilegiando, più che la conoscenza delle nozioni (che comunque sono poche e facili da ricordare), la formulazione del modello, che serve a semplificare il trattamento dei dati, e le tecniche che consentono di usare le leggi della fisica per la soluzione di problemi. A questo scopo ci serviremo, ogni volta che sarà possibile, di esercizi più o meno ragionevoli (cioè più o meno ispirati da situazioni realistiche), di cui discuteremo in breve la soluzione. Questi esercizi, per la loro natura, non costituiscono un complemento, ma la loro soluzione rappresenta piuttosto uno dei principali obiettivi che intendiamo raggiungere.

1.1 Dimensioni ed unità di misura

Un aspetto fondamentale della fisica, come di tutte le discipline scientifiche che si occupano dell'osservazione di fenomeni e processi, è la *misura* di grandezze che possano servire a descrivere le osservazioni in modo "universale" (cioè comprensibile a tutti, secondo regole generali) e compatibile con leggi di tipo matematico.

Il problema di eseguire misure fisiche su di un sistema, sia esso naturale o artificiale, è più delicato di quanto si possa pensare e richiede attenzione per evitare imprecisioni ed errori. Come prima avvertenza, occorre adottare in modo sistematico la nozione di **dimensione**: tutte le grandezze fisiche devono riferirsi ad opportune dimensioni (ad esempio, lunghezza, massa, carica elettrica, etc.), e nella formulazione matematica di una legge fisica deve essere rispettata la coerenza fra le dimensioni delle grandezze che sono coinvolte. Per intenderci, una legge fisica è generalmente espressa sotto forma di un'equazione: se le dimensioni del primo membro sono, per esempio, quelle di una lunghezza, anche il secondo membro deve avere le stesse dimensioni. Ancora, somme o differenze hanno senso solo se coinvolgono grandezze che hanno le stesse dimensioni (sommare "pere con pere" e "mele con mele").

Per soddisfare le esigenze di "universalità" che abbiamo già anticipato, le misure devono essere riferite ad un *sistema di unità di misura* definito senza ambiguità. Noi faremo riferimento al cosiddetto sistema **mks**, che prende nome dalle iniziali di metro, kilogrammo, secondo, che sono le unità di misura fondamentali rispettivamente per lunghezza, massa, tempo. Per queste grandezze esistono dei *campioni* (i testi di fisica ne descrivono le caratteristiche) e sono disponibili ricette e procedure di vario genere che consentono di "calibrare" gli strumenti di misura, dovunque essi si trovino, rispetto a questi campioni standard. Ovviamente incontreremo non solo grandezze che si misurano in termini di metri, kilogrammi e secondi, cioè non avremo a che fare solo con lunghezze, masse ed intervalli di tempo. Per le altre dimensioni e le unità di misura che tratteremo avremo in genere tre situazioni diverse: (i) introdurremo nuove unità fondamentali, ad esempio per la carica elettrica (che si misura in Coulomb, un'unità fondamentale nel cosiddetto Sistema Internazionale, di cui l'mks è un sottoinsieme); (ii) grandezze derivate da quelle di lunghezza, massa, tempo, che sono espresse in funzione di metro, kilogrammo, secondo, come ad esempio la velocità, che si misura in m/s (si legge metri al secondo); (iii) in alcuni casi daremo nomi speciifici a grandezze derivate, ad esempio nel caso della forza, che si misura in Newton, e che può essere espressa in funzione delle unità mks come kilogrammo per metro su secondi al quadrato. Nel corso del testo vedremo caso per caso come ci si deve comportare.

1.2 Grandezze e prefissi

Poiché la fisica si occupa di fenomeni che appartengono ad ambiti assai diversi tra loro, le grandezze coinvolte nei problemi della fisica possono anche essere estremamente diverse tra di loro dal punto di vista numerico. Ad esempio, nella fisica si ha a che fare con lunghezze astronomiche e con le lunghezze che servono a descrivere fenomeni atomici e sub-atomici. Quindi è spesso opportuno utilizzare un metodo che permetta di esprimere con facilità grandezze che possono coprire un intervallo molto vasto.

Questo scopo può essere raggiunto servendosi della cosiddetta *notazione esponenziale*, che consiste nell'esprimere una grandezza come prodotto di una "mantissa" e di una potenza di 10. Ad esempio, il numero 0.000123 può essere espresso come 1.23 $\times 10^{-4}$, il numero 123000 come 1.23 $\times 10^{5}$. Possiamo indicare *approssimativamente* tali numeri facendo riferimento agli **ordini di grandezza**, che sono rispettivamente 10^{-4} e 10^{5}. Per tornare agli esempi di prima, in astronomia si trovano lunghezze con ordine di grandezza di 10^{26} m (un uno seguito da venticinque zeri), in fisica sub-atomica le lunghezze possono essere dell'ordine di 10^{-15} m (uno zero seguito dalla virgola e da altri quattordici zeri, e poi dall'uno).

Un modo alternativo usato spesso per descrivere grandezze che appartengono ad un vasto intervallo di valori si basa sull'uso dei **prefissi**. Ci sono prefissi che moltiplicano (ad esempio kilo, Mega, Giga, Tera, simboli k, M, G, T, per indicare moltiplicazione rispettivamente per $10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}$) e prefissi che dividono (ad esempio milli, micro, nano, pico, simboli m, μ, n, p, per indicare *divisione* rispettivamente per $10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}$). Per intenderci, 1 μm = 10^{-6}m, 1 kg = 10^3g, e così via.

1.3 Precisione e cifre significative

Dato che la fisica si basa su una descrizione *quantitativa* della natura, cioè sull'osservazione e sulla misura di grandezze, occorre molta attenzione nello stabilire le regole e le modalità operative della misura. Supponiamo infatti di dover misurare la larghezza di un tavolo: a seconda del tipo di metro che impieghiamo (in particolare, della *risoluzione* dello strumento, praticamente la spaziatura delle tacchettine, che può essere, ad esempio, mezzo centimetro, un millimetro, mezzo millimetro, e così via) e della attenzione che poniamo nell'eseguire la misura, possiamo ottenere dei risultati diversi.

In generale, ogni misura che viene eseguita è associata ad una **precisione**, che dipende da numerosi fattori (strumentali, sperimentali, statistici, fondamentali, etc.). Quindi ogni misura è affetta da un'**incertezza** (o errore di misura) che a rigore non può essere annullata. Talvolta, l'incertezza viene specificata esplicitamente, ad esempio scrivendo che una lunghezza è (120 $\pm$ 1) mm se l'incertezza è di un millimetro. In altri casi ci si affida ad una *convenzione*, che stabilisce che l'incertezza è nell'*ultima cifra significativa.*

Le **cifre significative** sono quelle (tutte quelle) che servono a stabilire il valore di una grandezza. Ad esempio, la grandezza 12345 mm = 1.2345 $\times 10^4$ mm ha cinque cifre significative, e convenzionalmente le si attribuisce un'incertezza pari a $\pm$ 1 mm. La grandezza 0.0123 mm = 1.23 $\times 10^{-2}$ mm ha invece tre cifre significative (gli zeri iniziali non "contano", come dimostra la riscrittura in forma esponenziale), e l'incertezza convenzionale è pari a $\pm$ 0.0001 mm, ovvero $\pm\ 10^{-4}$ mm.

In questo corso non avremo a che fare con operazioni sperimentali di misura, e quindi tali problemi non avranno un ruolo centrale. Tuttavia, i concetti che vi sono coinvolti devono ugualmente essere tenuti presente. Quando si cercherà di risolvere numericamente dei problemi di fisica, sarà opportuno ricordare che il numero di cifre significative della risposta finale deve essere adeguato a quello dei dati di partenza. Questo aspetto diventa particolarmente cruciale quando la risposta richiede alcune operazioni, come ad esempio la divisione fra grandezze, che, se eseguite con una calcolatrice, possono facilmente fornire un numero di cifre significative eccessivo e privo di significato fisico (la calcolatrice mostra sempre tutte le cifre significative che può, generalmente otto o dieci, a prescindere dalla precisione dei dati introdotti). Ad esempio, supponiamo di dover calcolare la velocità media del moto di un punto, che, come vedremo, si ottiene dividendo lo spazio percorso per il tempo necessario a percorrerlo. Se lo spostamento è $\Delta S = 152$ m (si intende che l'incertezza sia $\pm$ 1 m, cioè la grandezza ha tre cifre significative) ed il tempo vale $\Delta t = 54$ s (si intende un'incertezza $\pm$ 1 s, cioè si hanno due cifre significative), il rapporto tra ΔS e Δt si esprime come 2.8 s, cioè con due cifre significative (è anche accettabile la risposta 2.81 s, con tre cifre significative). Se viene usata una calcolatrice, il display mostra altre cifre che, però, non devono essere considerate dato che l'operazione di divisione necessaria per calcolare il risultato finale non può "aumentare la precisione" delle misure.

Capitolo 2

Moto del punto

In questo capitolo affrontiamo gli aspetti fondamentali della cinematica del punto materiale; in particolare, intendiamo descrivere lo spostamento (il moto) di un oggetto in funzione delle caratteristiche del moto stesso (velocità, accelerazione, etc.) senza interessarci delle cause fisiche che lo provocano (forze, momenti di forze, etc.), di cui tratteremo occupandoci della dinamica. In questo capitolo useremo, per la prima volta in questo corso, degli strumenti matematici e geometrici (ad esempio, derivate, integrali, vettori) che hanno una rilevanza di carattere generale per lo studio della fisica, e che quindi non riguardano solamente la cinematica.

2.1 Posizione e spostamento

Studiare il moto di un oggetto richiede di munirsi di tutti gli strumenti che ne permettono una descrizione in termini scientifici. In primo luogo, supporremo di avere a disposizione un sistema per misurare i *tempi* (un cronometro), dato che lo studio del moto prevede di prendere in considerazione l'*evoluzione temporale* della posizione dell'oggetto. In generale, eseguiremo il nostro studio del moto a partire da un certo istante, che chiameremo t_0. In alcuni casi faremo coincidere questo *istante iniziale* con lo *zero dei tempi*, l'istante in cui supponiamo di far partire il cronometro, cioè porremo $t_0 = 0$. L'unità di misura del tempo nel sistema mks è il secondo, simbolo s. [1] Per un istante di tempo "qualsiasi" t, definiamo *intervallo temporale* Δt la differenza $\Delta t = t - t_0$ ($\Delta t = t$ se $t_0 = 0$); [2] in generale, l'evoluzione temporale richiederà di studiare la situazione considerata ad istanti successivi a quello iniziale, cioè normalmente avremo $\Delta t > 0$.

Avremo poi bisogno di definire in termini quantitativi lo spostamento dell'oggetto considerato. Questo implica di costruire ed usare un **sistema di riferimento**, e di misurare la posizione s dell'oggetto in corrispondenza a diversi istanti di tempo. Per rendere chiaro il fatto che la posizione dipende dal tempo, scriveremo talvolta $s(t)$, che, in

[1] Per i distratti ricordiamo che un minuto vale 60 s, ed un'ora 3600 s!

[2] Presa una variabile generica ξ, indicheremo spesso con $\Delta\xi$ la *variazione* $\Delta\xi = \xi - \xi_0$ rispetto al valore "iniziale" ξ_0.

termini matematici, suggerisce di considerare la *funzione* s della variabile t.[3] In generale, non è assolutamente necessario che tale funzione sia *analitica*, ovvero esprimibile con "semplici" funzioni matematiche, anche se avremo a che fare normalmente con leggi del moto che hanno un'espressione matematica poco complessa. La cinematica si occupa fondamentalmente proprio del problema di definire la **legge oraria del moto** di un oggetto (useremo anche il termine "corpo") di cui siano note la velocità e/o l'accelerazione, e le sue *condizioni iniziali*, cioè di trovare la funzione $s(t)$.

Ci restringiamo per ora ad un caso **unidimensionale**, in cui la **traiettoria** dell'oggetto, cioè la sequenza delle posizioni da esso occupate in istanti successivi, descrive una linea continua nello spazio. Si può immaginare che questa linea sia retta, cioè che essa appartenga ad una retta, per avere un ottimo esempio di moto unidimensionale. Tuttavia questa restrizione non è generalmente indispensabile: come vedremo, a patto di occuparsi solo delle caratteristiche del moto "lungo la traiettoria" [4], anche una qualsiasi linea curva può essere considerata un buon esempio. Dal punto di vista geometrico, possiamo definire la *direzione del moto*, che è rappresentata dalla retta tangente punto per punto alla traiettoria: dunque se il moto è rettilineo tale direzione non cambia mai durante il moto stesso, mentre essa può cambiare nel caso generale di moto curvilineo.

Infine schematizziamo l'oggetto come un *punto geometrico*, cioè supponiamo che esso non abbia dimensioni. Si tratta di un'approssimazione che non ha sempre senso, e anzi, come vedremo, sicuramente non vale per lo studio completo della cinematica dei cosiddetti corpi rigidi, oggetti estesi che ad esempio possono ruotare su se stessi mentre si muovono, oppure di sistemi complessi, in cui i diversi costituenti del sistema possono essere dotati di moti *relativi*. Tuttavia il "modello puntiforme" ha una notevole rilevanza pratica, e può essere applicato in numerose situazioni fisiche, comprese quelle in cui si considerano corpi estesi. Notate che un'entità senza dimensioni geometriche che si trovi in movimento non può che seguire una traiettoria lineare, cioè non può che essere dotata di un moto di **traslazione**; corpi estesi, costituiti da tanti componenti, la posizione di ognuno dei quali è rappresentata da un punto, possono anche avere un moto di **rotazione** attorno ad un certo asse, dato che i diversi componenti possono percorrere traiettorie diverse tra loro.

Definiamo allora lo spostamento del punto, $\Delta s(t)$, come lo spazio percorso dal punto dall'istante t_0 all'istante t generico. In altre parole, detta $s(t)$ la posizione del punto sulla traiettoria all'istante t generico e $s_0 = s(t_0)$ la posizione "iniziale" del punto, cioè quella occupata all'istante "iniziale" t_0, si ha $\Delta s(t) = s(t) - s_0$. Se poi si fa coincidere la posizione iniziale del punto con l'origine del sistema di riferimento, in pratica misurando le distanze a partire dalla posizione occupata dal punto all'istante iniziale, cioè si pone $s_0 = 0$, allora si ha $\Delta s(t) = s(t)$. L'unità di misura dello spostamento nel sistema mks è il metro, simbolo m.

Notiamo che questa definizione di spostamento dà la possibilità di avere $\Delta s(t)$ positivi

[3] Fate attenzione al fatto che la scrittura $s(t)$ significa, in questo contesto, che la s è funzione della variabile indipendente t e non che intendete eseguire il prodotto della grandezza s per la grandezza (t). Purtroppo la notazione è per sua natura ambigua!

[4] Di conseguenza, alcune caratteristiche del moto, come l'accelerazione centripeta, che ha direzione ortogonale alla traiettoria, non potranno essere determinate trattando casi unidimensionali.

o negativi. Questo implica di definire come positivo un *verso* di percorrenza della traiettoria. Un buon esempio per capire il significato di quanto affermato è costituito dalle strade consolari, che, come noto, partono tutte da Roma e sono dotate di pietre miliari poste ad intervalli di distanza tutti uguali fra loro. In sostanza, Roma (ovvero una posizione ben precisa in Roma, forse il Colosseo) è il punto con *coordinata* $s_0 = 0$, e le distanze sono tutte riferite a questo punto origine. Nella via Aurelia, se ci spostiamo "verso nord" incontriamo pietre miliari di valore sempre crescente, e quindi il verso positivo di percorrenza della traiettoria (costituita dalla via Aurelia) è il nord. Allora, se ci spostiamo da Grosseto a Pisa compiamo uno spostamento positivo, dato che $s(\mathrm{Pisa}) > \mathrm{s(Grosseto)}$, viceversa se andiamo da Pisa a Grosseto compiamo uno spostamento negativo. Nel primo caso, infatti, ci muoviamo "verso Nord", nel secondo "verso Sud", cioè gli spostamenti avvengono con versi opposti.

2.1.1 Velocità e derivata

Nella cinematica, un po' come succede in molti settori della fisica, fa comodo servirsi di grandezze che possano aiutare a descrivere il fenomeno sotto osservazione. Una grandezza utile a caratterizzare il moto di traslazione è la **velocità**, che indica lo spostamento che il punto fa in un certo intervallo temporale. Possiamo definire la velocità come il rapporto $\Delta s/\Delta t$, dove Δs è proprio lo spostamento compiuto nell'intervallo di tempo Δt ; le dimensioni della velocità sono [lunghezza]/[tempo] e quindi la sua unità di misura nel sistema mks è m/s.

Proviamo a pensare ad una situazione fisica in cui consideriamo il moto di un oggetto, approssimabile ad un punto geometrico[5]. Muniamoci di un cronometro e supponiamo di avere un opportuno sistema di riferimento fissato lungo la traiettoria del punto. La rappresentazione grafica della legge oraria del moto non è altro che un grafico $s(t)$ in cui l'asse delle ascisse riporta il tempo (di osservazione) t e quello delle ordinate la posizione $s(t)$ misurata ad ogni istante t considerato; spesso questo grafico si indica come **diagramma del moto**. Sperimentalmente è chiaro che l'osservazione si esegue in tanti istanti *discreti*, cioè separati e distinti tra loro, che indichiamo con t_i (il pedice va da 1 ad un numero indefinito, che dipende solo dalla nostra pazienza!); in corrispondenza a questi t_i misureremo delle posizioni $s_i = s(t_i)$, ottenendo un grafico "a punti"; avremo quindi tanti spostamenti $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ corrispondenti a tanti intervalli di tempo $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Né gli spostamenti, né gli intervalli di tempo saranno necessariamente uguali fra loro, ed anzi potrà succedere che alcuni spostamenti abbiano segno opposto rispetto ad altri (l'oggetto può tornare indietro), oppure che siano nulli (l'oggetto sta fermo). Per ognuno degli intervallini considerati potremo definire una velocità:

$$v_i = \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} \; . \tag{2.1}$$

[5]Se ci si disinteressa della struttura interna dell'oggetto, spesso basta guardarlo da una certa distanza per poter trascurare le sue dimensioni e rendere ragionevole l'approssimazione puntiforme: pensate alla fotografia da un satellite di un transatlantico nell'oceano!

Dal punto di vista grafico la v_i non è altro che la "pendenza" del trattino di retta che congiunge s_i ad s_{i+1}, come è facile dimostrare ricordando le nozioni elementari di trigonometria. Più precisamente, la v_i rappresenta il *coefficiente angolare* della retta tangente al grafico di v_i in funzione di t_i, ovvero la *tangente* dell'angolo compreso tra l'asse delle ascisse e tale retta. La Fig. 2.1.1, in cui tale angolo è indicato con α, mostra una rappresentazione della situazione considerata.

Dato che non abbiamo posto alcuna restrizione nella scelta dell'intervallo di tempo Δt_i, potremo indicare la velocità di Eq. 2.1 come una **velocità media**, intendendo che abbiamo eseguito un *processo di media* sull'intervallo temporale Δt_i considerato. Ovviamente potremo considerare un qualsiasi intervallo temporale Δt, e definirci una velocità **media** (su questo intervallo):

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}; , \tag{2.2}$$

essendo Δs lo spostamento corrispondente; la barra sopra al simbolo, $\overline{v}$, sta proprio ad indicare convenzionalmente che si tratta di una grandezza media. Dato che, in genere, è $\Delta t > 0$, il *segno* della velocità dipende da quello di Δs, cioè la velocità è positiva quando il moto avviene verso valori della coordinata s crescenti, e negativa altrimenti (la velocità è ovviamente nulla se non c'è spostamento!).

Vediamo con un esempio il significato fisico della velocità media. Se andate in treno da Pisa a Firenze (supponiamo Δs = 79.2 km = 7.92×10^3 m) impiegando un tempo, poniamo, Δt= 1 ora = 3600 s,[6] il rapporto $\Delta s/\Delta t$ = 22.0 m/s = 79.2 km/h, rappresenta la velocità media del vostro viaggio relativa alla sua intera durata. Tutti sapete però che la velocità attuale cambia continuamente (ad esempio, diminuisce ed aumenta rispettivamente all'entrata e all'uscita dalle varie stazioni)[7].

È evidente che il valore di $\overline{v}$ non dipende dall'intervallo temporale considerato solo se la velocità media rimane costante in tutta la durata del fenomeno studiato, cioè del moto del punto, una situazione tutt'altro che generale. Allo scopo di ottenere una valutazione più "sensata" della velocità e della sua dipendenza dal tempo (ovvero per definire la *funzione* del tempo $v(t)$), occorre suddividere il tempo totale in tanti piccoli intervallini, cioè esaminare il moto per intervalli $\Delta t \to 0$, tutti estremamente piccoli ed uguali tra loro. La velocità che si ottiene per ognuno di questi intervallini è **istantanea**, cioè caratterizza istante per istante il moto sotto osservazione.

Dal punto di vista matematico, per tenere conto del processo di considerare intervalli di tempo sempre più piccoli si definisce la velocità come *limite di un rapporto incrementale*:$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$, dove la simbologia usata indica proprio che si considerano intervallini di tempo piccoli a piacere[8]. L'intero procedimento, consistente nel valutare

[6] Supponiamo che la precisione nel determinare il tempo sia di un secondo.

[7] Notate quante "approssimazioni" avete adottato per impostare il problema: ad esempio, avete considerato il treno come un punto, ragionevole se trascurate le variazioni della sua lunghezza dovute alla contrazione/dilatazione dei respingenti e se non siete interessati a studiare i possibili "cappottamenti" dei vagoni, e avete considerato il moto unidimensionale perché vincolato alla linea delle rotaie, anche se di sicuro queste non procedono in linea retta.

[8] In realtà, alcuni aspetti fondamentali della meccanica quantistica rendono poco ragionevole scegliere intervallini indefinitamente piccoli, almeno quando si ha a che fare con la cinematica di oggetti "molto

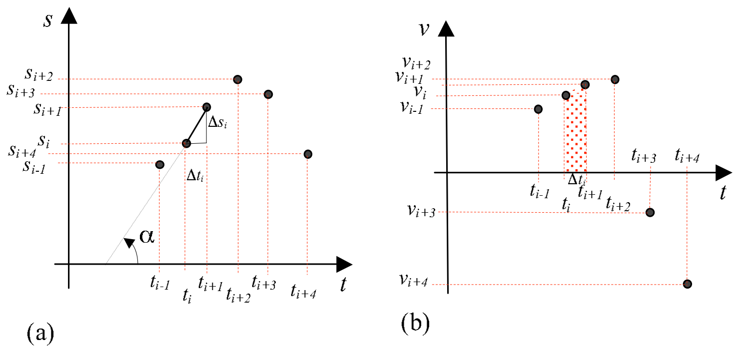

Figura 2.1: Grafico per punti della posizione (a) e della velocità (b) per un moto unidimensionale "qualsiasi"; le indicazioni si riferiscono a quannto scritto nel testo.

il rapporto per intervalli di tempo molto molto piccoli (cioè, con termine matematico, *infinitesimi*), si può riassumere in un modo compatto affermando che la velocità è la **derivata** rispetto al tempo della *funzione* $s(t)$), cioè scrivendo:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \ . \tag{2.3}$$

In sostanza, non abbiamo fatto altro che scrivere $ds(t)/dt$ al posto di $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t$, cioè non abbiamo fatto altro che utilizzare una simbologia compatta per esprimere un concetto operativo (quello di limite del rapporto incrementale).

Se ripensiamo al diagramma del moto costruito prima per una certa situazione fisica reale, allora il procedimento di considerare intervalli di tempo infinitesimi significa, praticamente, che quel grafico a punti (discreto) diventa una curva *continua*; graficamente la velocità rappresenta allora il coefficiente angolare della retta tangente a questa curva in ogni suo punto, cioè, con un'espressione compatta, *la tangente a questa curva in ogni suo punto*. Quindi possiamo stabilire un'interpretazione grafica generale per l'operazione di derivazione di una funzione, che consiste nell'estrarre, punto per punto, la tangente della curva che rappresenta la funzione stessa[9].

Un caso molto semplice, ma comunque rilevante in diverse situazioni fisiche, è quello di un moto in cui velocità istantanea e velocità media hanno sempre lo stesso valore; in altre parole, la velocità (istantanea) rimane costante nel tempo. Si parla in questi casi di **moto**

piccoli e veloci". Tuttavia, per i problemi che affronteremo potremo sempre immaginare di poter reperire un cronometro sufficientemente preciso da consentirci di misurare intervalli di tempo arbitrariamente piccoli.

[9]Avevamo già intuito che la tangente alla traiettoria rappresenta la direzione del moto; qui stiamo affermando che la velocità è la tangente della legge oraria del moto: il concetto di fondo è lo stesso, ma l'ambito è ben diverso. Qui costruiamo la tangente ad una curva disegnata su un grafico sul cui asse delle ascisse c'è il tempo, mentre la traiettoria è una curva disegnata nello spazio reale. Torneremo in seguito su questo aspetto.

rettilineo uniforme[10], e si può allora scrivere $v(t) = \overline{v} = v_0$, dove con v_0 indichiamo qui la velocità (costante) dell'oggetto considerato. Infatti, essendo tale velocità costante, essa è anche quella che il punto ha all'istante iniziale del moto, t_0, motivo per cui l'abbiamo indicata proprio con $v_0 = v(t = t_0)$. Possiamo tranquillamente invertire la definizione di velocità media, cioè scrivere: $\Delta s(t) = v_0 \Delta t$, ovvero (ricordando il significato di $\Delta s(t)$ e di Δt): $s(t) = s_0 + v_0(t - t_0)$. Questa è la semplicissima legge oraria del moto nel caso di moto rettilineo uniforme[11].

2.1.2 Spostamento ed integrale

La legge oraria del moto retilineo uniforme fa capire l'importanza della velocità nel determinare il moto del punto, cioè nel prevederne la posizione in funzione del tempo: infatti in questo semplice caso è sufficiente conoscere la velocità (sempre costante!) e la *condizione iniziale* s_0 per predire la posizione $s(t)$ occupata in qualsiasi istante t misurato a partire dall'istante iniziale t_0. Questo obiettivo può essere perseguito, almeno in linea di principio, per un moto *vario*, cioè con velocità qualsiasi $v(t)$.

Per capire come si può operare, torniamo alla situazione descritta nel paragrafo precedente, in cui immaginavamo di costruire il diagramma del moto a partire da osservazioni sperimentali condotte a diversi istanti t_i. Potendo calcolare il valore $v_i = \Delta s_i / \Delta t_i$ per ogni intervallo di tempo, possiamo anche costruire la rappresentazione grafica della **legge oraria della velocità**, nome pomposo per indicare il grafico con in ascissa $v(t)$ ed in ordinata t; anche questo grafico sarà a punti, riportando, intervallo per intervallo, il valore di v_i appena calcolato. Se invertiamo la relazione appena scritta, possiamo porre $\Delta s_i = v_i \Delta t_i$. In altre parole, se invece di misurare la posizione avessimo una misura di velocità v_i per ogni intervallino, potremmo ricostruire il diagramma del moto eseguendo, intervallo per intervallo, il prodotto $v_i \Delta t_i$ e riportando il valore corrispondente Δs_i su di un grafico in corrispondenza del valore di t_i.

Cerchiamo un'interpretazione grafica per questo procedimento; consideriamo la figura geometrica che si ottiene connettendo, sul grafico della legge oraria della velocità, i punti $t_i, t_{i+1}, v_{i+1}, v_i, t_i$: come si vede in Fig. 2.1.1(b), questa figura è un trapezio, con lato di base $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Supponiamo che la velocità "non cambi troppo" con il passare del tempo, cioè che v_{i+1} non differisca "troppo" da v_i (vedremo in seguito il senso di questa assunzione); allora il trapezio viene ad assomigliare ad un rettangolo, e l'"area" in es-

[10] A rigore, questa denominazione si applicherebbe solo a spostamenti che avvengono lungo una retta; inoltre l'aggettivo "uniforme" non dovrebbe essere confuso con "costante", dato che il primo si riferisce al fatto che una certa caratteristica non varia, e il secondo, invece, significa che questa invarianza si ha rispetto allo scorrere del tempo. Comunque si può tollerare un po' di confusione tra questi due aggettivi, che coinvolge spesso anche un terzo aggettivo, "omogeneo" (riferito propriamente all'invarianza spaziale di una grandezza).

[11] Da questo esempio è chiaro che la definizione di "legge" è usurpata: questa presunta legge, infatti, discende direttamente dalle definizioni (di velocità, spostamento, etc.) e dall'uso di un po' di matematica elementare!

so compresa è ben approssimata dal prodotto $v_i \Delta t_i$ ("altezza" per "base"!)[12]. Se, ora, vogliamo conoscere lo spostamento Δs corrispondente ad un intervallo temporale (generico) Δt, dovremo fare la somma delle aree di tutti questi trapezi (o, meglio, rettangoli, così come li abbiamo approssimati): $\Delta s = \Sigma_i v_i \Delta t_i$, dove il simbolo di sommatoria si intende esteso su tutti gli elementi (intervalli temporali Δt_i) considerati, cioè compresi nell'intervallo Δt.

Passiamo ora alla descrizione "continua", cioè, operativamente, immaginiamo di ridurre indefinitamente la durata degli intervalli temporali, che diventeranno degli infinitesimi dt; lo spostamento infinitesimo per ognuno di questi intervalli sarà $ds = v(t)dt$. [13] Questo prodotto è qualcosa che assomiglia molto all'area di cui trattavamo prima; anzi, in questo caso, essendo la "base" del trapezio molto molto piccola, probabilmente l'approssimazione ad un rettangolo è meglio giustificata che nel caso precedente (a patto che la velocità non vari con il tempo in modo troppo brusco, cosa che non si verifca pressoché mai in situazioni fisiche realistiche di cinematica). Lo spostamento per un intervallo (generico) Δt, compreso, ad esempio, fra t_0 e l'istante (generico) t, si ottiene *sommando* su tutti questi contributi $v(t)dt$. Osserviamo che questi contributi, essendo dati dal prodotto di una grandezza finita (come supponiamo essere la velocità) per l'infinitesimo dt, saranno molto molto piccoli, numericamente parlando; però il loro numero sarà molto molto grande, e quindi il risultato della somma potrà essere anche ben diverso da zero.

In matematica questa particolare operazione di somma su tanti tanti elementi si chiama **integrale** (definito), e si scrive, in modo compatto:

$$\Delta s(t) = s(t) - s_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \; . \tag{2.4}$$

Potremo allora affermare in termini generali che, per una qualsiasi funzione di una certa variabile, l'integrale ha il significato grafico dell'*area sottesa alla curva che rappresenta la funzione stessa, riferita all'intervallo specificato negli estremi di integrazione* (t_0 e t, nel caso considerato). Fate attenzione al fatto che l'integrale che abbiamo scritto è, secondo la terminologia matematica, di tipo *definito*, cioè dotato di estremi di integrazione stabiliti; notate anche, però, che in questo esempio uno dei due estremi ha un *valore* variabile (si tratta di t, che è una variabile). In questo modo, lasciando variare l'estremo di integrazione, possiamo ottenere lo spostamento $\Delta s(t)$ come funzione esplicita del tempo t.

[12] Notate che quanto affermato calza a pennello per il moto rettilineo uniforme, dove la velocità vale sempre v_0 e non c'è bisogno di alcuna approssimazione.

[13] Nello scrivere questa relazione ci siamo comportati con una certa disinvoltura, dato che abbiamo trattato grandezze molto molto piccole (gli infinitesimi) come se fossero grandezze "finite". Secondo le leggi dell'analisi matematica, questa disinvoltura non è sempre giustificata. Supporremo però di trovarci nelle condizioni che permettono di compiere con tranquillità l'operazione, circostanza che si verifica molto spesso quando si esaminano casi fisici realistici.

2.1.3 Esercizio: approccio complicato al moto rettilineo uniforme

Come dimostrato nel Par. 2.1.1, la legge oraria del moto rettilineo uniforme, $\Delta s(t) = v_0 \Delta t$, può essere ottenuta usando strumenti matematici particolarmente semplici. In questo esercizio intendiamo ottenere la stessa legge usando la relazione ("formale" e un po' complicata) che fa uso dell'integrale.

Soluzione. Dobbiamo risolvere l'integrale $\Delta s(t) = \int_{t_0}^{t} v_0 dt$; in questa espressione, v_0 è una costante, cioè il valore di v_0 non cambia mentre facciamo l'integrale, ovvero mentre suddividiamo l'area sottesa alla curva $v(t)$ (che in questo caso è una retta parallela all'asse delle ascisse, di valore sempre pari a v_0) in tanti piccoli contributi e li sommiamo fra loro. Se pensiamo all'integrale come ad una somma su tanti tanti contributi, allora è chiaro che possiamo immaginare di "mettere in evidenza" il termine v_0; usando un gergo tecnico, essendo v_0 indipendente dalla variabile di integrazione (il tempo t), possiamo "portarlo fuori" dal segno di integrale, ottenendo: $\Delta s(t) = v_0 \int_{t_0}^{t} dt$. Ora, l'integrale che è rimasto da "calcolare" può essere facilmente risolto tornando ancora ad interpretare l'operazione come una somma su tanti tanti elementini; in questo caso, gli elementini sono proprio gli intervalli infinitesimi di tempo dt, e quindi $\int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 = \Delta t$.[14] Da qui si ricava la legge oraria del moto uniformemente accelerato che stavamo cercando. È inoltre immediato notare che lo spostamento ha il significato geometrico dell'area sottesa al grafico della legge oraria della velocità: in questo semplicissimo caso, l'area in questione è proprio quella di un rettangolo, di base Δt ed altezza v_0.

Dato che stiamo lavorando in modo formale, vale la pena di soffermarsi anche su un'altra osservazione: come già visto, nel moto a velocità costante si ha $\Delta s(t) = v_0 \Delta t$, cioè, esplicitando i vari prodotti, $s(t) = s_0 + v_0 t - v_0 t_0$. Per definizione, la velocità è $v(t) = ds(t)/dt$, cioè: $v(t) = d(s_0 + v_0 t - v_0 t_0)/dt$; poiché l'operazione di derivata possiede l'utile proprietà che la derivata di una somma di funzioni è pari alla somma delle derivate delle varie funzioni, si può scrivere: $v(t) = ds_0/dt + d(v_0 t)/dt - d(v_0 t_0)/dt$. Esaminiamo i tre termini: il primo e l'ultimo sono nulli, dato che le funzioni s_0 e $(v_0 t_0)$ sono *costanti* rispetto alla variabile di derivazione, che è il tempo t.[15] Resta il termine $d(v_0 t)/dt$ che, visto che già sappiamo che la velocità del nostro moto è v_0, deve essere proprio pari a v_0. Infatti, l'operazione di derivata ha un'altra utile regola, che recita che la derivata del prodotto di una costante (generica) α per una funzione (generica) $f(\xi)$ è pari al prodotto della costante per la derivata della funzione: $d(\alpha f(\xi)/d\xi = \alpha df(\xi)/d\xi$. Usando un'espressione gergale, si dice che "la costante si porta fuori" dal segno di derivata, per cui $d(v_0 t)/dt = v_0 dt/dt = v_0$, dove l'ultimo passaggio è ovvio (per una variabile generica ξ è sempre $d\xi/d\xi = 1!$).

[14] Ovviamente analoghe considerazioni possono farsi per una qualsiasi variabile generica ξ: posti due estremi di integrazione (generici) a e b, si avrà sempre $\int_a^b d\xi = b - a$.

[15] Che la derivata di una costante sia nulla viene diretamente dalla definizione: per una funzione costante generica $f(\xi)$, l'"incremento" $\Delta f(\xi)$ è ovviamente nullo (la funzione è costante!), e quindi è nulla la derivata rispetto a ξ: $df(\xi)/d\xi = 0$.

2.1.4 Accelerazione e moto uniformemente accelerato

Un'ulteriore caratteristica del moto è costituita dall'**accelerazione** a, che rappresenta la variazione della velocità nell'unità di tempo. In sostanza, l'accelerazione è la "velocità della velocità", coè essa dà la misura di quanto cambia, con il passare del tempo, il valore della velocità. Quanto affermato nel Par. 2.1.1 a proposito della velocità può quindi essere ripetuto nel caso dell'accelerazione, avendo cura di sostituire al posto dello spostamento Δs la variazione di velocità Δv. In sostanza, quindi, si può definire un'*accelerazione media* $\overline{a}$ riferita all'intervallo Δt, che vale:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \ , \tag{2.5}$$

ed un'*accelerazione istantanea* che si ottiene considerando intervalli di tempo $\Delta t \rightarrow 0$. Infatti, tenendo conto del fatto che anche l'accelerazione può cambiare istante per istante durante il moto del punto, cioè essere una funzione del tempo $a(t)$, si ha:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \ , \tag{2.6}$$

dove l'ultima espressione, che si ottiene ricordando che la velocità è la derivata temporale della posizione, indica, nel linguaggio matematico, la *derivata seconda* della funzione posizione rispetto al tempo. Ancora, ripetendo quanto già discusso, potremo scrivere:

$$\Delta v(t) = v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \ , \tag{2.7}$$

ed interpretare la variazione di velocità come l'area sottesa al grafico della legge oraria dell'accelerazione.

Le dimensioni dell'accelerazione sono [velocità]/[tempo], cioè [lunghezza] / [tempo]^2, e quindi l'unità di misura mks è m/s^2. Analogamente a quanto osservato prima, l'accelerazione istantanea è proporzionale alla pendenza punto per punto del grafico della legge oraria della velocità, costruito mettendo sull'ordinata la funzione velocità e sull'ascissa il tempo. Per esempio, nel moto rettilineo uniforme tale grafico è rappresentato da una retta parallela all'asse delle ascisse, la cui pendenza è nulla (e l'accelerazione vale, giustamente, zero).

Notate che il *segno* dell'accelerazione ha un chiaro significato solo se esso viene paragonato al segno della velocità: in particolare, se i segni di velocità ed accelerazione sono gli stessi (tutti e due positivi o tutti e due negativi), allora il punto sta accelerando, cioè la sua velocità aumenta (in valore assoluto!); viceversa, se i segni sono opposti significa che il punto sta "decelerando", cioè la sua velocità (in valore assoluto!) sta diminuendo.

Avendo stabilito le relazioni matematiche che esistono fra spostamento, velocità ed accelerazione, ad avendo dato la loro interpretazione grafica, può essere utile confrontare gli andamenti delle tre grandezze per un moto vario qualsiasi. A questo scopo, la Fig. 2.1.4 riporta un esempio (i grafici sono a punti per indicare che potrebbe trattarsi di una misura sperimentale, eseguita su intervalli di tempo discreti). La figura mostra qual è la relazione (grafica) che esiste tra gli andamenti dei tre grafici.

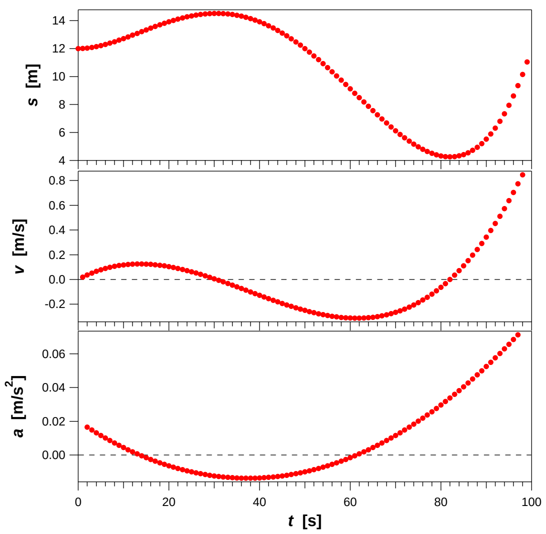

Figura 2.2: Leggi orarie del moto, della velocità e dell'accelerazione desunte da osservazioni sperimentali; le linee tratteggiate orizzontali indicano la posizione dello zero.

Un esempio di moto parecchio interessante è quello caratterizzato da una accelerazione costante ed uniforme (**moto uniformemente accelerato**). In questo caso è facile determinare la legge oraria del moto (la funzione $s(t)$) a partire dal valore dell'accelerazione a, che non dipende dal tempo, essendo costante, ed è anche ovviamente pari a $\overline{a}$. Cominciamo con il notare che la variazione della velocità $\Delta v(t)$ si può ottenere direttamente invertendo l'Eq.2.5: $\Delta v(t) = \overline{a}\Delta t = a\Delta t$. Ponendo $\Delta v(t) = v(t) - v_0$, essendo $v_0 = v(t_0)$ la velocità del punto all'istante iniziale, si ha quindi:

$$v(t) = v_0 + a\Delta t = v_0 + a(t - t_0). \tag{2.8}$$

Pertanto la velocità varia *linearmente* con il tempo (è *direttamente proporzionale* ad esso), cioè la legge oraria della velocità è rappresentata da una retta la cui pendenza (cioè il coefficiente angolare), costante, è proporzionale all'accelerazione. Per ottenere la $s(t)$ non si può direttamente impiegare la relazione $\Delta s(t) = v\Delta t$, poiché la velocità dipende dal tempo. È però possibile impiegare uno stratagemma, basato proprio sul fatto che la velocità è funzione lineare del tempo. Il *valore medio* della variazione di velocità calcolata tra gli istanti t_0 e t (generico), che indichiamo con $< \Delta v >$, è[16]:

$$< \Delta v >= \frac{\Delta v(t_0) + \Delta v(t)}{2} = \frac{v(t) - v_0}{2} \ , \tag{2.9}$$

dove l'ultimo passaggio è ovvio tenendo conto che la variazione della velocità è nulla all'istante iniziale.

[16] Ricordiamo che la media algebrica delle grandezze A e B vale $\frac{A+B}{2}$; notate inoltre che abbiamo usato un nuovo simbolo, i segni di maggiore e minore, per indicare l'operazione di media.

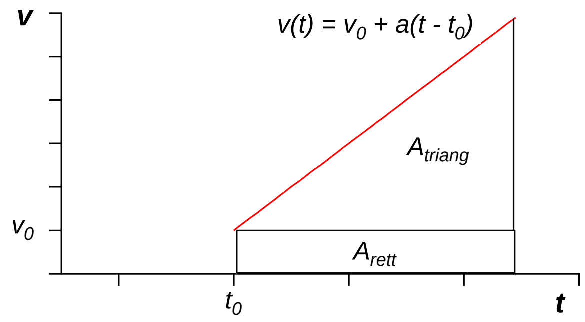

Figura 2.3: Grafico della funzione $v(t)$ per un moto uniformemente accelerato ed interpretazione grafica dell'operazione di integrazione discussa nel testo.

Ora sostituiamo nell'Eq.2.9 l'espressione della $v(t)$ trovata prima in Eq.2.8, ottenendo:

$$< \Delta v >= \frac{a(t-t_0)+v_0-v_0}{2} = \frac{a}{2}(t-t_0) \; . \tag{2.10}$$

A questo punto possiamo utilizzare la $\Delta s(t) = \overline{v}\Delta t$ mettendoci la velocità media appena trovata, ottenendo:

$$s(t) = s_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2. \tag{2.11}$$

È bello notare che questa legge si riduce a quella del moto rettilineo uniforme ponendo $a = 0$, come è giusto dato che velocità costante implica accelerazione nulla.

Come vedremo in seguito, questa espressione è rilevante in molti casi, ad esempio per descrivere la cosiddetta caduta dei gravi (un oggetto qualsiasi che cade verso il suolo). Notate che il grafico della legge oraria è in questo caso rappresentato da una *parabola*; inoltre si vede chiaramente che la legge del moto uniformemente accelerato è completamente determinata solo se è nota l'accelerazione (costante) a e sono note le *due* condizioni iniziali s_0 e v_0 (nel moto rettilineo uniforme occorreva conoscere la velocità (costante) v_0 ed *una* sola condizione iniziale, s_0).

Otteniamo ora la legge oraria del moto uniformemente accelerato, Eq. 2.11, ragionando in termini grafici. Come abbiamo già affermato, lo spazio percorso $s(t)$ è interpretabile come l'area sottesa alla curva del grafico che rappresenta la legge oraria della velocità, calcolata considerando l'intervallo temporale tra t_0 e l'istante generico t. Come si vede in Fig. 2.1.4, tale area è quella di un trapezio, ed è pari alla somma dell'area A_{rett} del rettangolo di base $t - t_0$ ed altezza v_0, che vale $A_{rett} = (t - t_0)v_0$, e dell'area A_{triang} del triangolo di base $t - t_0$ ed altezza $v(t) - v_0$. Poiché nel moto uniformemente accelerato si ha $\Delta v = a\Delta t$, ovvero $v(t) - v_0 = a(t - t_0)$, l'area del triangolo in questione è $A_{triang} = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$. Allora, dato che, per l'assunto iniziale, $s(t) = A_{rett} + A_{triang}$, si ottiene la legge $s(t)$ di Eq 2.11.

2.1.5 Esercizio: approccio complicato al moto uniformemente accelerato

Esattamente come nel caso del moto rettilineo uniforme, è possibile ottenere la legge del moto uniformemente accelerato ragionando in termini "formali", cioè facendo uso delle relazioni che coinvolgono integrali. In questo esercizio vediamo come ci si può comportare per ottenere il risultato.

Soluzione. Nei paragrafi precedenti abbiamo stabilito che, in generale: $\Delta s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$ e $\Delta v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$. Nel caso di moto uniformemente accelerato, possiamo porre $a(t) = a$ (abbiamo tolto le parentesi per indicare che si tratta di una costante!), e quindi: $\Delta v(t) = \int_{t_0}^{t} adt$; poiché a è costante, questo termine, che sta a moltiplicare, può essere portato fuori dal segno di integrale, cioè $\Delta v(t) = a\int_{t_0}^{t} dt = a\Delta t$, dove l'ultimo passaggio è già stato incontrato e discusso in precedenza. Esplicitando le variazioni ed i prodotti, possiamo allora scrivere: $v(t) = v_0 + at - at_0$. Lo spostamento si trova ora integrando rispetto al tempo questa somma di tre funzioni; dato che anche l'operazione di integrazione gode della proprietà che l'integrale di una somma è pari alla somma degli integrali, potremo scrivere: $\Delta s(t) = \int_{t_0}^{t}(v_0 + at - at_0)dt = \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} atdt - \int_{t_0}^{t} at_0 dt$. Il primo e l'ultimo di questi integrali si calcolano immediatamente, notando che in entrambi i casi l'*integrando* (la funzione da integrare) è costante rispetto alla variabile di integrazione (il tempo t), per cui si ha: $\int_{t_0}^{t} v_0 dt = v_0\int_{t_0}^{t} dt = v_0(t-t_0)$ e $\int_{t_0}^{t} at_0 = at_0\int_{t_0}^{t} dt = at_0(t-t_0)$. Per l'altro integrale, si può notare che a è costante, e quindi scrivere $\int_{t_0}^{t} atdt = a\int_{t_0}^{t} tdt$. Per il calcolo, ci si può servire della regola generale che stabilisce che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n d\xi = \frac{1}{n+1}\xi^{n+1}$, con $n \neq -1$, [17] per cui $\int_{t_0}^{t} tdt = \frac{1}{2}t^2|_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)$.[18] Rimettendo tutti i pezzi assieme, si ha allora: $\Delta s(t) = v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) - at_0(t-t_0) = v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2 - 2tt_0 + 2t_0^2) = v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2$, che è esattamente la legge oraria che ci aspettavamo di trovare[19].

Anche nel caso del moto uniformemente accelerato conviene soffermarsi su un paio di considerazioni di carattere formale. Avevamo definito $a(t) = d^2s(t)/dt^2$, che, in questo caso, si può riscrivere $a = d^2s(t)/dt^2$ (abbiamo tolto le parentesi al primo membro per indicare che l'accelerazione è costante!). Quella appena scritta può essere considerata come una semplice forma di *equazione differenziale*, detta *del secondo ordine* a causa della presenza di una "derivata seconda". La legge oraria del moto uniformemente accelerato ci consente di affermare che la soluzione di questa (*specifica*) equazione differenziale è la funzione $s(t) = s_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2$. Che questa soluzione sia "giusta" ci è garantito da una semplice procedura "di controllo" che adotteremo spesso anche in seguito: facendo la derivata seconda di questa funzione $s(t)$ si deve ottenere l'uguaglianza $d^2s(t)/dt^2 = a$.

[17] Notate che, nello scrivere questa regolina, che approfondirete nei corsi di analisi matematica, non abbiamo messo gli estremi di integrazione, cioè abbiamo voluto indicare la "primitiva" della funzione ξ^n, ovvero il suo integrale *indefinito*.

[18] La riga verticale accanto alla funzione t^2 indica che questa funzione deve essere calcolata per i valori t e t_0 e che poi si deve fare la variazione, cioè la differenza, tra i valori cha la funzione assume per questi due istanti temporali.

[19] Se ripercorrete all'indietro il procedimento logico, vi potrete facilmente rendere conto che, di fatto, esso può essere considerato come una sorta di dimostrazione della regolina $\int \xi d\xi = \xi^2/2$.

Verifichiamolo, notando che calcolare una derivata seconda significa eseguire due volte consecutive un'operazione di derivata. Allora comininciamo notando che $ds(t)/dt = d(s_0 + v_0 t - v_0 t_0 + \frac{a}{2}t^2 - att_0 + \frac{a}{2}t_0^2)/dt = v_0 + \frac{a}{2}(2t) - at_0$. In questo passaggio abbiamo posto uguali a zero tutte le derivate di funzioni costanti rispetto al tempo ed abbiamo portato fuori dal segno di derivata tutte le costanti a moltiplicare, come abbiamo già imparato a fare; inoltre abbiamo impiegato la regola per cui $dt^2/dt = 2t$, che discende dalla regolina generale che stabilisce, per una variabile generica ξ: $d\xi^n/d\xi = n\xi^{n-1}$.[20] In sostanza, quindi, rimanipolando un po' l'espressione si ha $ds(t)/dt = v_0 + a(t - t_0)$, che è, come atteso dalla definizione di velocità, proprio la velocità $v(t)$ per un moto uniformemente accelerato. Per trovare l'accelerazione dobbiamo derivare ulteriormente rispetto al tempo la funzione $ds(t)/dt$, operazione che si scrive: $d(ds(t)/dt)/dt = d(v_0 + a(t - t_0))/dt = a$, dove l'ultimo passaggio si ottiene impiegando tutte le regole già date per l'operazione di derivata. Si è quindi dimostrato che la soluzione proposta è effettivamente valida per l'equazione differenziale considerata, ovvero che, mettendola nell'equazione differenziale, si ottiene uguaglianza del primo con il secondo membro.

2.1.6 Esercizio: caduta di un oggetto

La caduta degli oggetti (dotati di massa, come vedremo nel prossimo capitolo) è regolata dalla presenza di un'accelerazione diretta verticalmente verso il basso e di valore "abbastanza" costante; questa accelerazione si chiama *di gravità* e si indica, spesso, con il simbolo g. Il suo valore numerico è $|g| \approx 9.8$ m/s^2, perlomeno qui a Pisa al livello del mare. Supponiamo che un oggetto venga lasciato cadere da fermo a partire da un'altezza $h = 20$ m: con quale velocità v_S raggiunge il suolo?

Soluzione. Supponiamo che il moto dell'oggetto sia governato *solamente* dall'accelerazione di gravità (cosa che implica di trascurare le forze di attrito, di cui tratteremo nel seguito), e di poter adottare l'approssimazione puntiforme. Allora il moto è unidimensionale (avviene lungo la verticale) e di tipo uniformemente accelerato (l'accelerazione è quella di gravità, costante ed uniforme). Prendiamo un sistema di riferimento che coincide con la direzione verticale ed ha l'origine al suolo; poniamo come positivo il verso di percorrenza orientato verso l'alto. Allora la legge oraria del moto si scrive: $s(t) = h + \frac{g}{2}t^2$; rispetto alle espressioni scritte in precedenza, abbiamo "specializzato" la legge per il nostro caso. In pratica abbiamo posto $t_0 = 0$ (cosa che possiamo ben fare, dato che non ci sono vincoli sulla scelta dell'istante di inizio della caduta), $v_0 = 0$ (l'oggetto viene lasciato cadere "da fermo", come recita il testo), $s_0 = h$ (che è la posizione iniziale). Notate che, quando verrà il momento (alla fine!) di determinare una risposta numerica, dovremo ricordarci che l'accelerazione di gravità punta verso il basso, cioè scrivere $g = -9.8$ m/s^2.

Fatte queste considerazioni preliminari, possiamo risolvere l'esercizio. Quella che abbiamo determinato è una funzione del tempo; con il passare del tempo l'oggetto si muove, scendendo lungo la verticale, e, ad un certo istante che chiamiamo t_S, esso raggiunge il suolo. Dal punto di vista matematico, questa situazione si esprime ponendo: $s(t = t_S) = 0$,

[20] Anche qui, ripercorrendo in senso inverso il procedimento logico, sarà possibile ottenere una sorta di dimostrazione della regolina impiegata.

essendo $s_0 = 0$ la quota del suolo nel nostro sistema di riferimento. Ciò conduce a scrivere la seguente equazione algebrica: $0 = h + \frac{g}{2}t_S^2$, da cui si ricava $t_S = \pm(-2h/g)^{1/2}$.[21] Un rapido controllo dimensionale ci garantisce che la soluzione scritta è giusta; inoltre, la circostanza che $g < 0$ ci dice che la radice quadrata può essere calcolata, cioè che l'istante di arrivo al suolo esiste ed è reale. A dire il vero, la matematica ci suggerisce che le soluzioni sono due (il simbolo $\pm$!), però la soluzione negativa è fisicamente non accettabile, dato che si riferisce ad un istante precedente a $t_0 = 0$, che è l'inizio della nostra osservazione. La velocità v_S si ottiene allora ricordando la legge oraria della velocità per il moto uniformemente accelerato, specializzandola per il caso considerato e calcolandola all'istante $t = t_S$ (con il segno positivo): $v_S = v(t = t_S) = gt_S = g(-2h/g)^{1/2} = (-2hg)^{1/2}$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione di t_S appena determinata. Numericamente si ottiene $v_S = -20$ m/s (notate il segno negativo ad indicare che l'oggetto si muove verso il basso, ed il fatto che abbiamo adottato le giuste convenzioni su precisione e cifre significative). Andando avanti con la meccanica, troveremo un approccio assai più semplice (basato sulla conservazione dell'energia) per risolvere simili problemi.

2.1.7 Esercizio: cavalli che si rincorrono

Due cavalli, A e B, corrono in un ippodromo[22]. Ad un dato istante (che per noi sarà l'istante iniziale t_0, e per semplificare le nostre scritture porremo $t_0 = 0$, cioè a questo istante facciamo partire il cronometro), A ha oltrepassato il traguardo per la distanza d_A = 16 m e viaggia a velocità uniforme v_A= 6.0 m/s. Il cavallo B, invece, a quello stesso istante $t_0 = 0$ parte da fermo dal traguardo, con accelerazione costante ed uniforme a_B= 2.0 m/s^2. A quale distanza D dal traguardo B raggiungerà A?

Soluzione. A si muove di moto rettilineo (ehm, significa che abbiamo mentalmente linearizzato l'ippodromo...) uniforme, partendo dalla posizione iniziale d_A. Quindi la sua legge del moto, considerandolo come un punto, è:

$$s_A(t) = d_A + v_A t \ . \tag{2.12}$$

B, invece, si muove partendo dal traguardo (posizione iniziale zero, avendo posto l'origine del nostro riferimento sul traguardo) e con velocità iniziale nulla (è inizialmente fermo) con moto uniformemente accelerato:

$$s_B(t) = \frac{a_B t^2}{2} \ . \tag{2.13}$$

Perché B raggiunga A occorre che $s_B = s_A$. Ammesso che questa situazione si verifichi (in questo caso ovviamente sì , ma in altri problemi in cui si studia il moto di due corpi non è detto si verifichi sempre), significa che esiste un istante $\tilde{t}$ in cui $s_A(\tilde{t}) = s_B(\tilde{t})$. Questo

[21] Notate che non c'è nessun motivo per determinare numericamente il valore di t_S: non è richiesto, e farlo può aumentare il rischio di errori ed imprecisioni. Ricordate di usare i "numeri" solo alla fine della soluzione!

[22] Questa affermazione è importante perché ci consente di considerare il moto unidimensionale: la traiettoria è infatti vincolata al tracciato della pista.

istante si trova uguagliando fra loro le Eqq.2.12 e 2.13: $d_A + v_A\tilde{t} = (a_B/2)\tilde{t}^2$. In sostanza, si deve risolvere un'equazione algebrica di secondo grado, che, riscritta, recita:

$$\frac{a_B}{2}\tilde{t}^2 - v_A\tilde{t} - d_A = 0 \; ; \tag{2.14}$$

la soluzione è:

$$\tilde{t}_{1,2} = \frac{v_A \pm \sqrt{v_A^2 + 4(a_B/2)s_A}}{2a_B/2} \; . \tag{2.15}$$

A questo punto possiamo sostituire i valori numerici, e verificare che le due soluzioni sono reali e distinte (il "discriminante" è positivo e diverso da zero). Una delle due possibili soluzioni è negativa, cioè dà $\tilde{t} < 0$: questa soluzione è da scartare, perché si riferisce ad un evento che avrebbe dovuto verificarsi prima dell'istante iniziale. L'altra soluzione, che numericamente vale $\tilde{t}$= 8.0 s, definisce l'istante in cui B raggiunge A, e per sapere qual è la distanza percorsa dai due cavalli basta usare una delle due leggi del moto (Eq.2.12 o 2.13, tutte e due devono dare lo stesso risultato) infilandoci dentro come tempo l'istante di incontro appena trovato, cioè ponendo $t = \tilde{t}$. Si trova $D = s_A(\tilde{t}) = s_B(\tilde{t}) = 64$ m.

2.1.8 Esercizio: evitare un tamponamento tra treni

Ad un date istante, il treno A passa per la stazione di Pisa, muovendosi a velocità costante $v_A = 100$ km/h; all'istante $t_B = 500$ s, il treno B parte da fermo dalla stazione di Pisa, con un'accelerazione costante $a_B = 2.0 \times 10^{-1}$ m/s^2. I due treni impegnano lo stesso binario. Sapendo che a Torre del Lago, ad una distanza $D = 18.0$ km da Pisa, si trova un semaforo, riusciranno gli addetti ad accendere in tempo il semaforo rosso e fermare il treno B prima che questo tamponi il treno A?

Soluzione. Diamo per scontato di poter usare l'approccio puntiforme e considerare il moto dei due treni A e B rispettivamente come a velocità uniforme ed uniformemente accelerato. Entrambi i moti sono unidimensionali e avvengono sulla stessa traiettoria assegnata (il binario!) con lo stesso verso (visti i segni concordi di v_A ed a_B); poniamo per comodità l'origine coincidente proprio con la stazione. Specializzando le leggi per il caso specifico, si può scrivere: $s_A(t) = v_At$ e $s_B(t) = \frac{a}{2}(t - t_B)^2$, dove è rilevante notare che, per il treno B, abbiamo dovuto tenere conto esplicitamente dell'affermazione che esso parte (da fermo) dalla stazione (la posizione $s_0 = 0$) all'istante $t = t_B$. Se grafichiamo le leggi orarie del moto per i due treni, vedremo che esiste un istante in cui la parabola (che rappresenta il moto di B) incrocia la retta (che rappresenta il moto A). Matematicamente, questo istante, che indichiamo con t', si ottiene imponendo: $s_A(t = t') = s_B(t = t')$, cioè: $v_At' = \frac{a_B}{2}(t' - t_B)^2$. Con qualche manipolazione algebrica otteniamo un'equazione di secondo grado con incognita t': $\frac{a_B}{2}t'^2 - t'(a_Bt_B + v_A) + \frac{a_B}{2}t_B^2 = 0$. Le soluzioni sono: $t'_{1,2} = \frac{(v_A+a_Bt_B)\pm\sqrt{(v_A+a_Bt_B)^2-a_B^2t_B^2}}{a_B}$, ed è facile verificare che esse sono reali e distinte. Tuttavia, una delle due soluzioni si riferisce ad un istante precedente a $t_0 = 0$, ed è quindi da scartare fisicamente perché indica una situazione che si verifica prima di quando il treno A passa per la stazione; l'altra soluzione è invece valida, e dà $t' = \frac{v_A+a_Bt_B+\sqrt{v_A^2+2v_Aa_Bt_B}}{a_B}$.

Per verificare se l'incidente può essere evitato basta calcolare la distanza percorsa dai treni (uno qualsiasi dei due, sono uguali a quell'istante!) $S = s_A(t = t') = s_B(t = t')$ e paragonarla con D. Numericamente si ottiene $S = 29$ km, cioè $S > D$, e quindi il punto di incontro tra i treni si troverebbe ben oltre il semaforo: il treno B può essere tranquillamente arrestato in tempo!

2.1.9 Esercizio: una strana legge del moto

I moti rettilineo uniforme ed uniformemente accelerato sono due esempi importanti, ma, naturalmente, essi non esauriscono tutti i tipi di moto che si possono avere nella realtà. Immaginiamo allora che una serie di osservazioni sperimentali sul moto di un oggetto stabiliscano che la sua legge oraria del moto (unidimensionale) ha la forma: $s(t) = At^2 + Bt^3$, con A e B costanti opportunamente dimensionate. Che dimensioni ha la costante B? Come si scrivono le leggi orarie di velocità, $v(t)$, ed accelerazione, $a(t)$, per questo moto?

Soluzione. La legge oraria del moto deve rappresentare uno spostamento e quindi il primo membro deve avere le dimensioni di [lunghezza]; semplici considerazioni di coerenza dimensionale indicano che le dimensioni di B sono [lunghezza]/[tempo]^3. La velocità si ottiene derivando rispetto al tempo la funzione $s(t)$; applicando le regoline per l'operazione di derivata che abbiamo già incontrato si ottiene $v(t) = 2At + 3Bt^2$. L'accelerazione si ricava derivando rispetto al tempo la $v(t)$ appena trovata: $a(t) = 2A + 6Bt$. Osservando quest'ultima legge, si può attribuire alla costante $6B$ il ruolo di "velocità dell'accelerazione", ovvero "velocità della velocità della velocità" (scusate il gioco di parole).

2.1.10 Esercizio: un moto vario

Un punto si muove lungo l'asse X di un sistema di riferimento secondo la legge oraria $x(t) = A + Bt^2 + Ct^4$, con $A = 5.0$ m, $B = 4.0$ m/s^2 e $C = -5.0$ m/s^4 (notate segni ed unità di misura, ed osservate che in questo problema la posizione del punto si indica con $x(t)$ invece che con $s(t)$). Osservandone il moto per $t > 0$, si nota che ad un certo istante il punto inverte il verso del suo moto, che passa da positivo a negativo. Quanto vale la coordinata x_I occupata dal punto quando esso cambia il verso del suo moto? Quanto vale l'accelerazione a_I in tale istante?

Soluzione. Come potete facilmente verificare facendo un grafico della funzione $x(t)$, il moto cambia effettivamente di verso; questo si verifica quando la velocità $v(t)$ cambia segno. La *funzione* $v(t)$ si ottiene semplicemente dalla definizione, ovvero derivando rispetto al tempo lo spostamento. Se ricordate che, per una variabile generica ξ, si ha $\frac{d\xi^n}{d\xi} = n\xi^{n-1}$, potete ottenere: $v(t) = 2Bt + 4Ct^3$. Cerchiamo l'istante (o gli istanti) t_I in cui questa funzione si annulla, cioè $v(t_I) = 0$; oltre alla soluzione banale $t_I = 0$, da scartare perché il problema chiede esplicitamente di considerare gli istanti $t > 0$, si ha $t_I = (-B/(2C))^{1/2}$ (ricordate che $C < 0$, secondo i dati del problema!). A questo istante la velocità cambia di segno, passando da positiva a negativa. La posizione occupata dal punto quando questo si verifica è $x(t_I) = A + B(-B/(2C) + C(-B/(2C))^2 = A - (B/(2C)(B - B/2) = A - B^2/(4C) = 5.8$ m. La *funzione* $a(t)$ si ottiene, secondo la definizione, derivando rispetto al tempo la velocità; applicando tutte le regoline della derivata di potenze, si ha $a(t) = 2B + 12Ct^2$. Pertanto l'accelerazione all'istante considerato vale $a(t_I) = 2B + 12C(-B/(2C)) = 2B - 6B = -16$ m/s^2.[23]

2.2 Sistemi di riferimento e moto in più dimensioni

Come visto nei vari esempi incontrati finora, è chiaro che ci si serve delle leggi del moto unidimensionale quando si ha a che fare con un moto che avviene lungo una retta o su una traiettoria *assegnata* (i binari, una strada, etc.). In molte situazioni, però, questo approccio non è possibile o non è conveniente, ed occorre allora impiegare strumenti adatti per lo studio di posizioni e spostamenti in più di una dimensione, in particolare di opportuni sistemi di riferimento.

Nel caso unidimensionale, infatti, una volta costruito un sistema di riferimento (stabilendo origine e verso), è sufficiente servirsi di *una* sola *coordinata*, la posizione (che abbiamo in genere indicato con s). Per individuare la posizione di un punto nello spazio reale, una sola coordinata non è più sufficiente, dato che ne occorrono due o tre per i casi rispettivamente bidimensionali o tridimensionali. Cominciamo proprio con l'esaminare situazioni tridmensionali; il più semplice tra i sistemi di riferimento è il sistema di **coordinate cartesiane** X, Y, Z, costruito tracciando tre semirette in direzione ortogonale fra loro a partire da un punto definito come l'origine del sistema ($x = y = z = 0$). Per convenzione, le semirette che individuano il sistema devono formare una terna "destrorsa", cioè X, Y, Z sono disposti come pollice, indice, medio della mano *destra* (dovete mettere le dita ad angolo retto l'un l'altra!). Estendendo le semirette a rette, cioè dando la possibilità di avere anche valori negativi delle coordinate, un punto qualsiasi nello spazio può essere individuato univocamente con una terna di coordinate x, y, z. Nel caso bidimensionale, cioè per individuare la posizione di un punto su un piano (la lavagna, un foglio, etc.), bastano ovviamente due sole coordinate, che ad esempio possiamo chiamare x, y.

Anche se le coordinate cartesiane sono estremamente utili ed hanno un carattere "naturale" (tutti abbiamo giocato a battaglia navale...), in alcune situazioni, determinate dalla *geometria* del problema considerato, è più conveniente servirsi di altri sistemi di riferimento. Ad esempio, per problemi che coinvolgono posizioni nel piano (casi bidimensionali) è spesso utile servirsi delle cosiddette **coordinate polari**. In esse le due coordinate necessarie per individuare univocamente la posizione sono una coordinata spaziale, R, che ha le dimensioni di una lunghezza e rappresenta la *distanza* tra l'origine ed il punto di cui si vuole determinare la posizione, ed una coordinata *angolare*, θ. Per convenzione, l'angolo θ è compreso tra una certa direzione del piano, ad esempio quella individuata dall'asse X di un sistema di riferimento cartesiano, e la congiungente (di lunghezza R) tra l'origine

[23]Notate che per la soluzione non è stato necessario calcolare esplicitamente t_I, cioè calcolare la radice quadrata coinvolta nella sua definizione; ancora una volta, vedete che è sempre consigliabile usare i valori numerici solo all'ultimo ed andare avanti il più possibile con espressioni di tipo "letterale".

ed il punto, come rappresentato in Fig. 2.2(a). In fisica, gli angoli si misurano in genere in unità angolari (adimensionali) dette *radianti*, abbreviazione rad, [24] e la convenzione sui segni generalmente adottata consiste nel definire positivo il senso di rotazione antiorario (guardando "dall'alto" il piano).

Le regole della trigonometria aiutano a determinare le relazioni di conversione tra coordinate cartesiane e polari, e viceversa. In particolare, dala Fig. 2.2(a), osservando che quello che si forma è un triangolo rettangolo, risulta evidente che:

$$x = R\cos\theta \tag{2.16}$$
$$y = R\sin\theta\ . \tag{2.17}$$

Inoltre, per il teorema di Pitagora, è sempre $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, mentre θ può essere determinato attraverso le regole della trigonometria, ad esempio come $\theta = \arctan(y/x)$. Torneremo più avanti sull'uso delle coordinate polari, che sono un sistema utilissimo per descrivere il moto circolare (che avviene su una traiettoria che ha la forma di una circonferenza); per il momento ci limitiamo a sottolineare che la posizione di un punto su di un piano può essere determinata univocamente anche attraverso le *due* coordinate R, θ, delle quali la prima ha dimensioni di [lunghezza] e la seconda è invece adimensionale. Anticipiamo che a queste due coordinate è possibile associare due "direzioni" sempre ortogonali fra loro, che si dicono rispettivamente *radiale* e *tangenziale* e si riferiscono alla direzione in cui varia rispettivamente la coordinata radiale o quella angolare. Il verso di queste direzioni è stabilito in modo "automatico": infatti esso si assume positivo se coincide con il verso in cui aumentano le coordinate considerate, negativo altrimenti.

Se il punto si trova nello spazio (a tre dimensioni) e si è nella situazione in cui è poco conveniente usare un sistema cartesiano, allora è necessario individuare una terza coordinata. Esistono due possibilità: la terza coordinata può essere costituita dalla coordinata (cartesiana!) z, avendo l'asse Z direzione ortogonale al piano su cui giace il segmento R, oppure si può usare una ulteriore coordinata angolare, generalmente indicata con ϕ. Nel primo caso, che si applica benissimo a geometrie (o *simmetrie*, secondo quanto chiariremo in seguito) di forma cilindrica, si parla di sistema di **coordinate cilindriche**, nel secondo di **coordinate sferiche**. Le coordinate cilindriche sono un'ovvia estensione di quelle polari (che possono essere immaginate come la "proiezione" delle coordinate cilindriche su un piano di quota z fissata[25]); le coordinate sferiche, invece, meritano un rapido approfondimento, finalizzato a stabilire le convenzioni usate per individuare l'angolo ϕ e a determinare le relazione di conversione tra coordinate sferiche e cartesiane. La Fig. 2.2(b) cerca di chiarire questo aspetto (purtroppo, avendo a che fare con una situazione tridimensionale, la resa sul foglio è inevitabilmente poco chiara!). In sostanza, immaginate di avere un sistema cartesiano ed uno sferico con l'origine in comune. Se tracciate la congiungente (di lunghezza R) tra l'origine ed il punto P di coordinate x, y, z, ottenendo

[24] L'angolo giro, cioè 360 gradi, vale 2π rad, l'angolo piatto vale π rad, l'angolo retto $\pi/2$ rad. In generale, si ha che il valore in rad si ottiene da quello in gradi con la semplice relazione: [rad]=2π[gradi]/360. Il valore in gradi di un radiante risulta circa 57 gradi.

[25] In geometria, l'equazione che rappresenta analiticamente un piano parallelo al piano XY e che si trova alla quota q è semplicemente $z = q$!

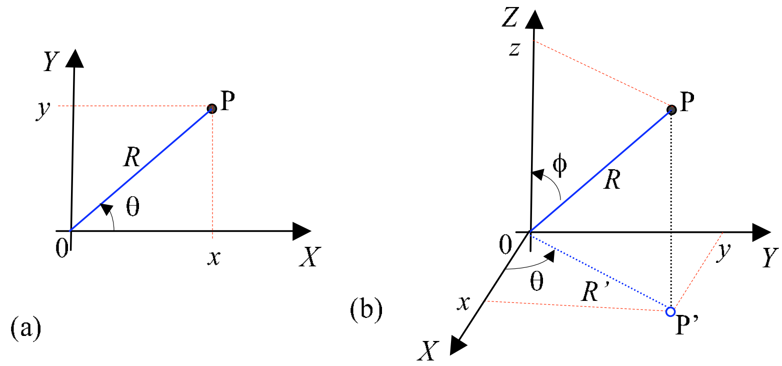

Figura 2.4: Diagrammi rilevanti per i sistemi di coordinate polari (a) e sferici (b).

il segmento $\overline{OP}$ (O essendo l'origine), avrete la possibilità di individuare i due angoli ϕ e θ rispettivamente come quelli compresi: tra asse Z ed il segmento $\overline{OP}$; tra asse X e la *proiezione* $\overline{OP'}$ del segmento $\overline{OP}$ sul piano XY.[26] Notando che la lunghezza di $\overline{OP'}$ è pari a $R\sin\phi$, si ottengono le seguenti relazioni di conversione:

$$x = R\sin\phi\cos\theta \quad (2.18)$$
$$y = R\sin\phi\sin\theta \quad (2.19)$$
$$z = R\cos\phi\ ; \quad (2.20)$$

inoltre, per il teorema di Pitagora, è sempre $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Il sistema di coordinate sferiche è di grande interesse per lo studio di parecchie situazioni fisiche, ma per il momento torniamo a concentrarci sui sistemi cartesiani. In particolare affermiamo che, grazie al fatto che gli assi X, Y, Z sono ortogonali fra loro, è sempre possibile descrivere il moto nello spazio come *sovrapposizione* (o combinazione) del moto lungo le tre direzioni cartesiane[27]. Allora lo studio del moto a più dimensioni si può ricondurre in modo immediato a quello del moto unidimensionale, nel senso che, come vedremo nei prossimi esempi, le leggi orarie del moto unidimensionale possono essere impiegate per determinare il moto lungo le tre (o due, nel caso di problemi sul piano) direzioni dello spazio. La posizione del punto ad ogni istante potrà allora essere facilmente dedotta dal valore assunto in questo istante dalle tre (o due) coordinate.

2.2.1 Legge del moto e traiettoria

Determinare un moto a più dimensioni attraverso le leggi orarie delle coordinate dà, almeno in linea di principio, la possibilità di descrivere in via analitica la traiettoria

[26] Il ruolo degli angoli ϕ e θ è lo stesso di quelli usati in geografia per indicare rispettivamente longitudine e latitudine.

[27] Attraverso un'estensione del concetto di ortogonalità, è possibile fare simili affermazioni anche se si usano i sistemi polari, cilindrici, sferici.

compiuta dal punto. Limitiamoci a considerare il caso bidimensionale di moto su un piano XY, e supponiamo di conoscere le leggi orarie $x(t)$ ed $y(t)$. Se "invertiamo" la legge $x(t)$, cioè agiamo con gli strumenti matematici a nostra disposizione sulla funzione $x(t)$, possiamo ricavare la funzione $t(x)$, che ci dice a quale istante t la coordinata X del punto assume un dato valore. Inserendo la funzione $t(x)$ nella legge $y(t)$ possiamo ottenere una relazione del tipo $y(x)$; questa relazione individua una curva sul piano XY che rappresenta proprio la traiettoria del moto. Quanto detto sarà più chiaro analizzando gli esempi riportati in seguito.

Notate, comunque, che per avere informazioni sulla traiettoria del moto non è sempre necessario scrivere la funzione $y(x)$. Infatti per individuare la traiettoria può essere sufficiente individuare la retta tangente, punto per punto, alla traiettoria stessa, in particolare il coefficiente angolare m della curva $y(x)$ che rappresenta la traiettoria. Come abbiamo più volte sottolineato, dal punto di vista formale il coefficiente angolare della retta tangente ad una curva in un suo punto corrisponde alla derivata della curva stessa, cioè $m = dy(x)/dx$; d'altra parte, per la definizione di velocità, si ha $dy = v_y dt$ e $dx = v_x dt$ (le velocità lungo le direzioni X ed Y possono ovviamente essere diverse tra loro). Sostituendo si ottiene quindi $m = v_y/v_x$, cioè il coefficiente angolare della retta tangente punto per punto alla traiettoria, che dà un'informazione geometrica sulla traiettoria stessa, è pari al rapporto tra le velocità lungo le due direzioni (ortogonali fra loro) Y ed X. Per una traiettoria rettilinea questo coefficiente angolare deve mantenere un valore costante, dato che la tangente ad una retta è una retta e la sua pendenza rimane costante. Quindi, per stabilire se un dato moto è rettilineo, o no, è in genere sufficiente analizzare il rapporto tra le velocità nelle due direzioni.

2.2.2 Esercizio: legge oraria e traiettoria

Una nave si allontana dal porto partendo da ferma con un'accelerazione costante ed uniforme $a_S = 2.0 \times 10^{-2}$ m/s^2 diretta verso Sud ed un'accelerazione costante ed uniforme $a_E = 5.0 \times 10^{-2}$ m/s^2 diretta verso Est. Qual è la traiettoria del moto?

Soluzione. Approssimiamo la nave ad un punto e prendiamo un sistema di riferimento centrato nella posizione di partenza e con l'asse Y diretto verso Nord e l'asse X diretto verso Est (un riferimento destrorso impone questa scelta); trascuriamo gli effetti della curvatura terrestre e poniamo quindi che il moto avvenga sul piano XY. Essendo il moto uniformemente accelerato, e scegliendo $t_0 = 0$, le leggi orarie del moto si scrivono: $x(t) = (a_E/2)t^2$ e $y(t) = (-a_S/2)t^2$ (notate il segno negativo, dovuto all'orientazione del riferimento![28]). Per scrivere la formula analitica della traiettoria, cioè per trovare la funzione $y(x)$, ricaviamo dalla prima: $t = \pm(2x(t)/a_E)^{1/2}$. Sostituendo nella seconda otteniamo $y(x) = (-a_S/a_E)x$. Questa è l'equazione di una retta che passa per l'origine e forma un angolo $\theta = \arctan(-a_S/a_E) \approx -14$ gradi rispetto all'asse X (cioè il suo coefficiente angolare è $m = -a_S/a_E$). Dunque il moto è uniformemente accelerato lungo la semiretta che parte dall'origine (verso Ovest c'è terra ferma, la traiettoria non può

[28] Alternativamente avremmo potuto scrivere $y(t) = (a_N/2)t^2$, con $a_N = -a_S$. State sempre attenti alla scelta dei segni!

estendersi in questa direzione, e quindi è una semiretta) e va verso SudEst formando un certo angolo. Notate che l'affermazione che si tratta di un moto *rettilineo* si può ottenere in modo più immediato osservando che le leggi orarie della velocità sono: $v_X(t) = a_E t$ e $v_Y(t) = -a_S t$; poiché tale valore non dipende dal tempo, la traiettoria è una retta dotata del coefficiente angolare che abbiamo determinato sopra.

2.2.3 Esercizio: il moto parabolico

Abbiamo un punto che compie un moto nel piano XZ (la coordinata y rimane sempre costante, supponiamo sempre nulla, cioè ad esempio $y = 0$) con le leggi:

$$x(t) = v_0 t \qquad (2.21)$$
$$z(t) = -a/2t^2 \; , \qquad (2.22)$$

essendo $a > 0$ ed avendo scelto $t_0 = 0$. Queste leggi rappresentano un moto rettilineo uniforme lungo X ed uniformemente accelerato lungo Z, con accelerazione diretta nel verso negativo dell'asse Z. [29] Si vuole sapere la traiettoria del moto, cioè che tipo di curva è realizzata dalla sequenza di posizioni occupate dal punto in istanti successivi del suo moto.

Soluzione. Se ricaviamo il tempo dalla legge del moto lungo X, cioè "invertiamo" l'equazione che descrive la legge ricavando $t(x) = x/v_0$, e lo mettiamo nella legge del moto lungo Z, otteniamo l'equazione:

$$z(x) = -\frac{a}{2}\frac{x^2}{v_0^2} \qquad (2.23)$$

che rappresenta geometricamente una parabola con vertice nell'origine (e diretta "verso il basso"). Per chi ha poca dimestichezza con curve e geometrie, la parabola di questo esempio è praticamente la traiettoria percorsa da un piccolo oggetto lanciato con velocità iniziale orizzontale. Per illustrazione, la funzione $z(x)$ è descritta in Fig. 2.2.3 in un grafico che ha sull'asse orizzontale la posizione x e su quello verticale la posizione z. Notate bene che questo grafico *non* rappresenta la legge oraria del moto (e d'altra parte il tempo non vi compare), ma la traiettoria seguita dal punto nel piano XZ. Questo andamento a parabola motiva la denominazione *parabolico* che si dà spesso al moto (di traslazione) di un oggetto che subisce l'accelerazione gravitazionale in direzione verticale ed è dotato di velocità iniziale non nulla in direzione orizzontale.

2.2.4 Esercizio: colpire lontano

Riferiamoci ancora ad una situazione simile a quella dell'esercizio precedente, ma supponiamo stavolta che il punto, che parte sempre dall'origine del sistema di riferimento XZ considerato, abbia una velocità iniziale che ha componenti in entrambi le direzioni, cioè che il moto abbia velocità iniziali $v_{0,X}$ e $v_{0,Z}$ entrambi positive e diverse da zero (e

[29] Spesso l'asse Z si assume diretto "verso l'alto", quindi in questo caso l'accelerazione punta "verso il basso", proprio come nella caduta dei gravi di cui abbiamo già trattato.

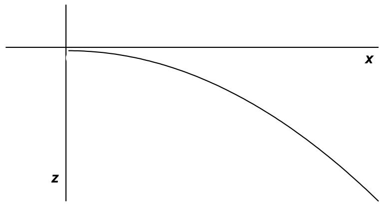

Figura 2.5: Rappresentazione della traiettoria $z(x)$ ottenuta nel testo.

non necessariamente uguali fra loro), mentre l'accelerazione ha solo componente lungo Z. Come si esprime, in funzione dei parametri del problema, la distanza d (misurata sull'asse X) a cui l'oggetto ricade al suolo?

Soluzione. La distanza d, detta spesso *gittata*, rappresenta la coordinata $x(t = t_C)$ assunta dal corpo nell'istante t_C in cui esso raggiunge il suolo. Le leggi del moto lungo le due direzioni sono:

$$x(t) = v_{0,X}t \quad (2.24)$$
$$z(t) = v_{0,Z}t - a/2t^2 \; . \quad (2.25)$$

L'istante di caduta t_C è tale che $z(t = t_C) = 0$; questa condizione dà luogo all'equazione algebrica $0 = v_{0,Z} - a/2t_C^2$, ovvero $t_C = (2v_{0,Z}/a)$ (l'altra soluzione è $t = 0$, che rappresenta l'istante di partenza e quindi è fisicamente da escludere). Sostituendo si ottiene $d = x(t = t_C) = (v_{0,X}v_{0,Z})/(a/2)$.

2.3 Vettori

Lo spostamento nello spazio a tre dimensioni può essere espresso convenientemente con tre coppie di coordinate (per intenderci x_0, x e y_0, y e z_0, z). Queste tre coppie identificano nello spazio:

- un punto di partenza, detto anche **punto d'applicazione**[30], che ha coordinate x_0, y_0, z_0;
- una **direzione**, quella della congiungente la partenza con l'arrivo, che è il punto di coordinate x, y, z;
- un **verso** (dalla partenza all'arrivo);
- una lunghezza (o **modulo**), corrispondente all'entità dello spostamento.

Dare queste quattro proprietà, che nello spazio reale possono essere rappresentate graficamente con una *freccia* che congiunge la partenza con l'arrivo, significa definire un **vettore**, il vettore spostamento. Dal punto di vista della simbologia, una grandezza

[30]Capiremo il motivo di questa denominazione quando tratteremo dei momenti delle forze.

vettoriale si indica con una freccina sopra (ad esempio, lo spostamento Δs si scrive come vettore $\overrightarrow{\Delta s}$), oppure usando il carattere grassetto $\mathbf{\Delta s}$, o anche sottolineando il simbolo ($\underline{\Delta s}$).

Fate attenzione al fatto che lo spostamento, pur prestandosi in modo "naturale" a questa rappresentazione, non è l'unica grandezza vettoriale possibile. Ad esempio, anche velocità ed accelerazione nel moto in più dimensioni sono vettori. Possiamo infatti generalizzare a grandezze vettoriali le relazioni che abbiamo già scritto nel caso unidimensionale. Per esempio, facendo riferimento alla definizione di velocità che abbiamo dato nel caso unidimensionale, notiamo che, se $\overrightarrow{\Delta s}$ è un vettore, anche la velocità, che si ottiene dividendo lo spostamento per un intervallo temporale (che, come ribadiremo più avanti, non è una grandezza vettoriale) *deve* essere un vettore. Possiamo anche aggiungere che, per come questo vettore è costruito, direzione e verso coincidono con quelli dello spostamento. Dunque, direzione e verso della velocità, anche nel caso di un moto vario in cui la velocità istantanea non è costante ed uniforme, coincidono con quelli dello spostamento *istantaneo.* Come già ricordato, in geometria l'operazione di estrarre dalla traiettoria di un moto la direzione istantanea di percorrenza consiste nel disegnare la *retta tangente* punto per punto alla traiettoria; dunque il vettore velocità è sempre tangente, punto per punto, alla traiettoria del moto.

Altro esempio rilevante per generalizzare in senso vettoriale le leggi del moto è il seguente. Un modo compatto per esprimere la legge del moto uniformemente accelerato nel caso tridimensionale è:

$$\overrightarrow{\Delta s}(t) = \overrightarrow{v_0}\Delta t + \frac{\vec{a}}{2}(\Delta t)^2 . \tag{2.26}$$

Questa espressione equivale di fatto a scrivere *tre* leggi del moto, ognuna relativa ad una singola direzione nello spazio, che si ottengono considerando le *componenti vettoriali* dello spostamento lungo X, Y, Z: $x(t) = v_{0,x}\Delta t + \frac{a_x}{2}(\Delta t)^2$, $y(t) = v_{0,y}\Delta t + \frac{a_y}{2}(\Delta t)^2$,$z(t) = v_{0,z}\Delta t + \frac{a_z}{2}(\Delta t)^2$. Per intenderci sulla modalità di scrittura adottata, $v_{0,x}$ significa la componente lungo l'asse X della velocità iniziale $\overrightarrow{v_0}$, cioè il valore iniziale della velocità del punto lungo la direzione individuata dall'asse X; analogamente per le altre grandezze. Il moto del punto risulta allora dalla "composizione" del moto lungo le tre direzioni cartesiane X, Y, Z, *ortogonali fra loro.* La circostanza che le tre direzioni sono ortogonali è di fondamentale importanza: infatti vi potete facilmente convincere che spostarsi lungo una certa direzione non implica alcuna variazione della posizione lungo le direzioni ortogonali a quella dello spostamento. Quindi i moti nelle tre direzioni sono "disaccoppiati" (indipendenti) fra loro.

Anticipando quanto vedremo in altre parti del corso (anche fuori dallo studio della meccanica), possiamo affermare che ogni volta che si ha a che fare con grandezze che "dipendono" dalla direzione considerata si fa riferimento a grandezze vettoriali[31]. Le grandezze che non hanno una dipendenza dalla direzione spaziale si dicono invece **scalari** (per ora, ad esempio, abbiamo incontrato il tempo, che è chiaramente uno scalare, dato

[31]Nella fisica, in realtà, si utilizzano talvolta rappresentazioni ancora più complesse, dette *tensoriali*, per tenere conto in modo completo della dipendenza spaziale, come vedrete in corsi più avanzati.

che la sua misura non dipende dalla direzione, almeno in ambito di fisica classica; vedremo poi tante altre grandezze scalari, come massa, carica elettrica, energia, lavoro, etc.).

Ripetiamo ancora che definire un vettore equivale ad indicarne le sue **componenti**, che, nel caso dello spostamento e considerando un sistema di riferimento cartesiano, sono: $\Delta s_x = x - x_0, \Delta s_y = y - y_0, \Delta s_z = z - z_0$. La lunghezza del vettore, cioè il suo **modulo**, che si indica come $|\overrightarrow{\Delta s}|$ (o anche semplicemente come Δs, senza freccina in capo, sottolineature o grassetti), è:

$$|\overrightarrow{\Delta s}| = \sqrt{\Delta s_x^2 + \Delta s_y^2 + \Delta s_z^2}\ . \tag{2.27}$$

Questo risultato si ottiene immaginando le componenti come spigoli di un prisma, di cui il vettore è la diagonale; il teorema di Pitagora fornisce il risultato.

Abbiamo parlato del vettore spostamento nello spazio reale a tre dimensioni. Se ci riferiamo ancora allo spazio reale, che immaginiamo dotato di un sistema di riferimento cartesiano centrato in un qualche punto origine, possiamo facilmente introdurre un altro vettore, che ha anch'esso dimensioni fisiche di una lunghezza, come lo spostamento. Questo vettore è il *vettore posizione*, spesso indicato con $\vec{r}$, che è il vettore che congiunge l'origine del sistema di riferimento al punto di coordinate x, y, z.

Per il vettore $\vec{r}$ definito qui sopra è molto semplice stabilire quali sono le **componenti** nel sistema di riferimento cartesiano che abbiamo costruito. Esse sono praticamente le coordinate cartesiane del punto individuato dal vettore (dove cade la punta, ovvero la "freccia" del vettore), cioè valgono x, y, z. Pensate mentalmente all'operazione che fate per determinare geometricamente queste componenti, ad esempio la x, cioè per individuare il valore della coordinata lungo l'asse, per esempio X, del punto finale del vettore. Questa operazione, che comporta di tracciare un segmento che parte dalla punta del vettore ed ha direzione ortogonale a quella dell'asse rispetto al quale vogliamo determinare la componente, ad esempio l'asse X, rappresenta la **proiezione** (ortogonale) del vettore lungo la direzione considerata.

La trigonometria permette di esprimere in modo formalmente quantitativo il risultato dell'operazione di proiezione. Per cercare di essere generali, dato che, come detto, incontreremo parecchie grandezze vettoriali, facciamo riferimento ad un vettore generico $\vec{w}$, e per semplicità immaginiamo che esso si trovi sul piano XY (la componente lungo l'asse Z è nulla, in questo esempio), così che si possa facilmente disegnare il vettore su un piano, come in Fig. 2.3(a). Fate attenzione al fatto che questo piano non è (necessariamente) la rappresentazione di un piano reale. Per intenderci, i suoi assi non riporteranno l'unità di misura dello spostamento o posizione, ma quella della grandezza specifica w che stiamo considerando (velocità, forza, campo elettrico, o quant'altro[32]). Chiamiamo le componenti lungo X ed Y del vettore rispettivamente w_x e w_y. Dunque questo vettore è rappresentato graficamente da una freccia che parte dall'origine del sistema di riferimento considerato e va a finire in un qualche punto. Esso forma un certo angolo θ rispetto

[32] Questo aspetto, che sulle prime appare un po' spiazzante, è in realtà la chiave per capire ed apprezzare l'utilità della notazione vettoriale. Spesso vi capiterà di disegnare, su uno schema della situazione reale, cioè riferito allo spazio reale, un vettore rappresentativo di una grandezza che non è uno spostamento. In questo modo potrete immediatamente avere informazioni di tipo "spaziale" sulla grandezza vettoriale, in particolare sulla sua direzione e verso e, quando rilevante, sul punto di applicazione.

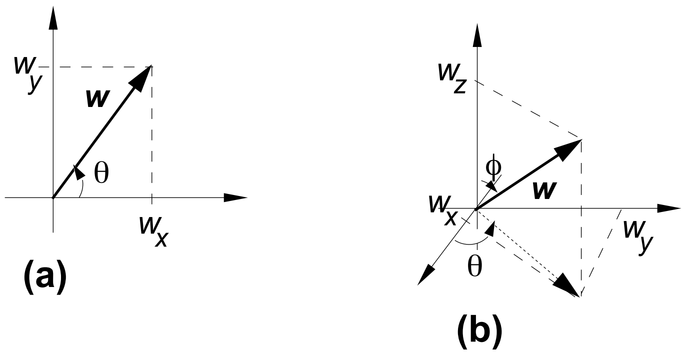

Figura 2.6: Determinazione delle componenti di un vettore (generico) $\vec{w}$ appartenente al piano del foglio (a) o diretto genericamente nello spazio (b); nel pannello (b), il vettore disegnato "a punti" rappresenta la proiezione di $\vec{w}$ sul piano XY, che ha lunghezza $w \sin\phi$.

all'asse orizzontale (delle ascisse), che dipende dalla *direzione* (e dal *verso*) del vettore, non dal suo modulo. A questo punto è chiaro che il nostro compito è del tutto analogo a quello che abbiamo già affrontato per passare dalle coordinate *polari* a quelle cartesiane; infatti il vettore $\vec{w}$ rappresenta proprio il segmento (orientato, cioè dotato di un verso) che congiunge l'origine con la punta del vettore. Le componenti che stiamo cercando sono allora: $w_x = w\cos\theta$ e $w_y = w\sin\theta$.

Se il vettore $\vec{w}$ non giacesse su un piano assegnato, cioè se fosse necessario determinarne anche la componente lungo l'asse Z, w_z, allora è chiaro che ci troveremmo nella stessa situazione che abbiamo incontrato per convertire le coordinate *sferiche* in coordinate cartesiane. Otteremmo allora: $w_x = w\cos\theta\sin\phi, w_y = w\sin\theta\sin\phi, w_z = w\cos\phi$; la Fig. 2.3(b) mostra uno schizzo della situazione.

Per inciso, tutto quanto abbiamo discusso finora ci fa capire che un vettore è completamente determinato dalle sue componenti cartesiane. Quindi un modo frequentemente usato per "scrivere" un vettore consiste nel mettere le componenti fra parentesi, separate da una virgola. Ad esempio, nel caso tridimensionale potrete trovare la seguente espressione: $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$, o anche $\vec{w} \equiv (w_x, w_y, w_z)$, dove il simbolo di uguale con una lineetta in più indica che quella data è proprio la definizione del vettore secondo le sue componenti cartesiane.

2.3.1 Alcune operazioni con i vettori

I vettori, in quanto entità geometrico-matematiche, sono soggetti a diverse operazioni, alcune delle quali saranno introdotte nel seguito. Per ora rammentiamo la *moltiplicazione di un vettore per uno scalare* (o viceversa, vale la proprietà commutativa!), che equivale a moltiplicare per lo stesso scalare tutte le tre componenti. Quindi, supponendo di avere uno scalare a ed un vettore $\vec{w}$ di componenti (w_x, w_y, w_z), il prodotto $a\vec{w}$ ha componenti (aw_x, aw_y, aw_z). Ricordando poi che l'operazione algebrica di divisione equivale a moltiplicare per il reciproco, è anche possibile definire la divisione di un vettore per uno scalare, $\vec{w}/a = \frac{1}{a}\vec{w}$, con componenti $(w_x/a, w_y/a, w_z/a)$.[33]

In generale, il significato geometrico di moltiplicare o dividere un vettore per uno scalare indica l'operazione di "allungare" o "accorciare" il vettore stesso senza modificarne la direzione, che dipende dal *rapporto* tra le componenti. Ad esempio, per un vettore sul piano XY, la trigonometria ci suggerisce che vale $\tan\theta = w_y/w_x$; questo rapporto rimane evidentemente inalterato se le componenti vengono moltiplicate o divise tutte e due per lo stesso scalare. Il verso cambia qualora il segno dello scalare sia negativo.

Particolarmente rilevante è la divisione di un vettore per il suo stesso modulo. Il risultato si chiama **versore**, si indica con un cappelluccio in testa, ed ha il significato di un vettore di *modulo unitario adimensionale* (come si può facilmente dimostrare) *con la stessa direzione e verso del vettore* di partenza: $\hat{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$. Molto utili sono i versori costruiti partendo dagli assi (ortogonali) di un sistema di riferimento. Ad esempio, nel caso cartesiano tridimensionale si hanno i tre versori, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, noti anche come, rispettivamente, $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, che hanno lunghezza unitaria ed individuano le tre direzioni (ed i tre versi) degli assi cartesiani. Secondo quanto già stabilito, essi possono essere costruiti prendendo in considerazione tre vettori, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, di modulo qualsiasi, diretti ed orientati come i tre assi X, Y, Z; si ha allora $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$, $\hat{y} = \vec{y}/|\vec{y}|$, e così via.

Altra operazione vettoriale molto importante è la *somma tra vettori*, che si esegue sommando tra loro le tre componenti a coppie[34]. Se abbiamo due vettori $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$, con componenti cartesiane rispettivamente (w_{1x}, w_{1y}, w_{1z}) e (w_{2x}, w_{2y}, w_{2z}), la loro somma ha componenti cartesiane $(w_{1x} + w_{2x}, w_{1y} + w_{2y}, w_{1z} + w_{2z})$. La somma di due vettori ha anche una rappresentazione geometrica (**regola del parallelogramma**) che vale la pena ricordare. Facendo coincidere i punti di applicazione dei due vettori[35], il vettore somma è la diagonale del parallelogramma di cui i vettori da sommare sono i lati, come rappresentato schematicamente in Fig.2.3.1(a). Omettiamo qui la dimostrazione che questa interpretazione geometrica è compatibile con la definizione di somma tra vettori come somma tra le componenti (provate da soli a fare questa dimostrazione!).

Sottrarre un vettore ad un altro equivale a sommare *l'inverso* del vettore da sottrarre all'altro, cioè $\vec{w_1} - \vec{w_2} = \vec{w_1} + (-\vec{w_2})$. Invertire un vettore significa moltiplicarlo per lo scalare (-1), cioè cambiare segno alle sue componenti. Dal punto di vista geometrico, questa operazione non tocca modulo e direzione, ma consiste in un'inversione del verso. Graficamente, come si vede in Fig.2.3.1(b) (e anche in questo caso a meno di operazioni di traslazione rigida), il vettore differenza che stiamo cercando è un vettore che parte dalla punta del vettore $\vec{w_2}$ e si dirige alla punta del vettore $\vec{w_1}$.

[33] Osservate che la definizione di questa operazione è già contenuta implicitamente nella scrittura di Eq. 2.26: infatti in quella equazione avevamo usato, ad esempio, la moltiplicazione del vettore $\vec{v_0}$ per lo scalare Δt e la divisione del vettore $\vec{a}$ per il numero 2, che evidentemente è uno scalare.

[34] Ovviamente la somma di un vettore con uno scalare non è definita, essendo oggetti matematici diversi fra loro!

[35] Nel caso in cui i vettori da sommare non abbiano i punti di applicazione in comune, è possibile "traslare rigidamente" uno dei due vettori finché il suo punto di applicazione non coincide con quello dell'altro. Traslare rigidamente significa spostare nello spazio il vettore *senza cambiarne direzione, verso e modulo.*

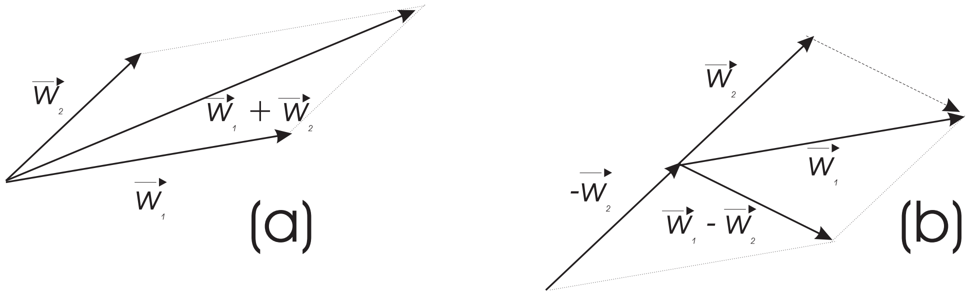

Figura 2.7: Illustrazione della regola del parallelogramma per la somma (a) e la differenza (b) di vettori. Nella figura (b) il vettore $\vec{w}_1 - \vec{w}_2$ è stato disegnato due volte, e la seconda (disegno "a punti") è stato traslato rigidamente in modo da diventare la congiungente fra le "punte" dei vettori di partenza.

A questo punto possiamo dare una suggestiva (ed ovvia) interpretazione del vettore spostamento come differenza di vettori posizione. Infatti, lo spostamento $\overrightarrow{\Delta s}$ tra i punti individuati dai vettori posizione $\vec{r} = (x, y, z)$ ed $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ può essere visto come una differenza vettoriale: $\overrightarrow{\Delta s} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Potete facilmente verificarlo facendo un opportuno disegnino, o anche tenendo conto del significato dell'operazione di sottrazione tra vettori: in pratica è proprio come se dal punto di partenza vi spostaste al punto di arrivo. Analogamente, risulta chiaro che un qualsiasi vettore $\vec{w}$ può sempre essere immaginato come somma vettoriale dei vettori $\vec{w_x}, \vec{w_y}, \vec{w_z}$ costruiti lungo gli assi X, Y, Z e di modulo pari alle componenti del vettore di partenza, ovvero: $\vec{w} = \vec{w}_x + \vec{w}_y + \vec{w}_z$. Un modo alternativo (molto utile!) di scrivere l'ultima espressione prevede di impiegare i versori degli assi, definiti in questo stesso paragrafo, e scrivere: $\vec{w} = w_x\hat{x} + w_y\hat{y} + w_z\hat{z}$ (ovvero $\vec{w} = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k}$).

2.3.2 Esercizio: la caccia al tesoro

Seguite una mappa che vi condurrà al tesoro. Partendo dall'origine di un sistema di riferimento cartesiano XY, vi muovete per un tratto $A = 8.0$ m lungo una direzione che forma un angolo di 30 gradi rispetto all'asse X e quindi vi muovete per un tratto $B = 10$ m in direzione parallela all'asse Y ed infine per un tratto $C = 14$ m in direzione *antiparallela* (cioè stessa direzione, ma verso opposto) all'asse Y. Qual è la coordinata y del punto che raggiungete alla fine?

Soluzione. Si tratta di tre spostamenti vettoriali, di modulo rispettivamente A, B e C, che vanno sommati tra loro. Dato che il problema richiede solo la componente y della somma dei vettori, ci limitiamo a sommare *algebricamente* solo le componenti in questa direzione: $y = A_y + B_y + C_y$. Per calcolare A_y applichiamo le leggi, già citate, della trigonometria, che ci danno $A_y = A\cos(30) = A/2$.[36] Inoltre, tenendo conto del testo del

[36]Le funzioni trigonometriche per alcuni angoli, grazie a ragioni di natura geometrica, sono facili da ricordare. Ad esempio, esprimendo gli angoli in gradi, si ha $\cos(60) = \sin(30) = 1/2$, $\sin(30) = \cos(60) = \sqrt{3}/2$, $\sin(45) = \cos(45) = \sqrt{2}/2$, oltre che, ovviamente, $\sin(0) = \sin(180) = \cos(90) = \cos(270) = 0$,

problema, si ha $B_y = B$ e $C_y = -C$ (occhio al "verso opposto", che dà luogo al segno meno!). Quindi risulta $y = 0$.

2.3.3 Composizione delle velocità

La composizione delle velocità è un tipico esempio che mostra l'utilità dell'impiego dei vettori e che può essere significativo anche per introdurre il concetto di *cambio dei sistemi di riferimento* inerziali (cioè dotati di velocità uniforme l'uno rispetto all'altro). Supponiamo di avere un punto materiale che si muove con velocità $\vec{v}_0$ rispetto ad un qualche sistema di riferimento che si muove, a sua volta, con velocità $\vec{v}_{rif}$ rispetto ad un altro riferimento, considerato fisso nello spazio. Esempio semplice, tanto per chiarire: vi state muovendo con velocità $\vec{v}_0$ lungo il corridoio di un treno in corsa che si muove a sua volta con velocità $\vec{v}_{rif}$ rispetto al suolo. La vostra velocità *assoluta* rispetto al suolo (cioè rispetto ad un sistema di riferimento solidale al suolo[37]) è semplicemente $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rif}$. [38] La dimostrazione, di cui omettiamo i dettagli, è molto semplice: in sostanza lo spostamento $\overrightarrow{\Delta s}$ nel sistema assoluto è dato dalla somma vettoriale dello spostamento $\overrightarrow{\Delta s}'$ nel riferimento relativo e dello spostamento $\overrightarrow{\Delta S}$ dell'origine del sistema relativo misurata rispetto all'origine del sistema assoluto. Dividendo lo spostamento per l'intervallo temporale Δt (che supponiamo abbia lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento, cosa non vera quando valgono le condizioni della relatività ristretta), otteniamo la relazione già scritta per le velocità. Talvolta ci si riferisce a questa regola di somma tra vettori velocità come alla *relatività galileiana* e in questo ambito si mostra come dedurre conseguenze simili nel caso delle accelerazioni possa essere rischioso; infatti sommare vettorialmente accelerazione del riferimento e accelerazione relativa non conduce a risultati corretti per sistemi dotati di accelerazione relativa qualsiasi.

Come ulteriore esempio, consideriamo un pesciolino che intende attraversare a nuoto un fiume le cui acque sono mosse da una "corrente" che ha una data velocità. Se indichiamo con $\vec{v}_p$ la velocità che il pesciolino sarebbe in grado di mantenere *in assenza di corrente* e con $\vec{v}_{corr}$ la velocità delle acque rispetto al suolo, possiamo applicare quanto scritto prima, e dedurre che la velocità assoluta del pesciolino, cioè misurata rispetto alle sponde del fiume, è data da $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_{corr}$. Se, ad esempio, doveste calcolare il tempo che il pesciolino impiega per attraversare il fiume, è chiaramente questa la velocità da usare nella soluzione del problema.

Infine, quando si hanno due oggetti in moto relativo fra loro, può essere utile considerare la *velocità relativa* $\vec{v}_{rel}$, cioè quella del loro reciproco avvicinamento (o allontanamento, a seconda del segno). Applicando i concetti sopra esposti, è facile dedurre che, dette $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ le velocità dei due corpi (misurate rispetto allo stesso riferimento!), si ha $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$.

$\sin(90) = \cos(0) = 1$ e $\sin(270) = \cos(180) = -1$.

[37] Il termine "assoluto" che abbiamo impiegato ha, in realtà un significato "relativo": infatti il suolo della terra si muove rispetto al sole, che a sua volta si muove rispetto alle altre stelle, etc. etc.

[38] Fate attenzione al fatto che la *somma vettoriale* va eseguita componente per componente, tenendo conto del verso del vettore, cioè del segno delle varie componenti, che vanno sommate *algebricamente* tra loro. Infatti, il risultato è ben diverso se vi muovete verso la cima o verso la coda del treno!

Per la dimostrazione, basta osservare che la velocità relativa è quella di un oggetto (ad esempio B) misurata in un riferimento solidale all'altro (ad esempio A).

2.4 Moto circolare e circolare uniforme

Un interessante caso di moto a più dimensioni (precisamente a due dimensioni) è il moto circolare uniforme, in cui il punto percorre una circonferenza di raggio R muovendosi in modo costante ed uniforme. Fissiamo un sistema di riferimento X, Y (il moto avviene ovviamente sul piano a cui appartiene la circonferenza) con l'origine sul centro della circonferenza. Tracciamo il raggio che congiunge la posizione del punto sulla circonferenza con il centro (tale raggio ovviamente "ruoterà" con il tempo, e supponiamo che tale rotazione sia antioraria - fosse oraria, dovremmo solo cambiare alcuni segni, come vedremo in seguito); chiamiamo $\theta(t)$ l'angolo compreso tra il raggio e l'asse X ad un dato istante t. È chiaro che il moto che stiamo studiando è **periodico**, cioè, se lasciamo il punto ruotare indefinitamente lungo la circonferenza, la stessa posizione (sulla circonferenza) verrà occupata tante (infinite!) volte nel corso del tempo.

Dato che abbiamo assegnato la traiettoria del moto, dicendo che esso deve avvenire su una circonferenza di raggio R, allora possiamo aspettarci che la descrizione bidimensionale sia in qualche modo ridondante. Infatti, avendo stabilito la condizione iniziale del moto (la posizione assunta dal punto all'istante t_0, ovvero il valore $\theta(t_0) = \theta_0$), potremo sempre esprimere la posizione del punto ad un qualsiasi istante t generico attraverso il valore assunto dalla *variabile angolare* $\theta(t)$. Quindi molte (non tutte!) informazioni sul moto circolare si possono ottenere scrivendo equazioni e leggi per questa variabile angolare. In altre parole, stiamo sostanzialmente impiegando delle coordinate polari $(R, \theta(t))$ per descrivere la posizione di un punto sul piano, e ci stiamo restringendo al caso R costante nel tempo[39] ; possiamo allora definire una **velocità angolare**:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{2.28}$$

ed una **accelerazione angolare**:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \tag{2.29}$$

ed impiegare gli approcci che abbiamo già introdotto in precedenza per il moto unidimensionale[40]. Ovviamente, le grandezze con cui abbiamo a che fare qui hanno dimensioni

[39] Un moto in cui anche la coordinata R dipende dal tempo ha ovviamente una traiettoria non circolare, ad esempio ellittica o curvilinea: il valore di R coincide allora, istante per istante, con il *raggio di curvatura* della traiettoria considerata.

[40] Più avanti in questi appunti vedremo che può essere comodo definire la velocità angolare come un *vettore* $\vec{\omega}$; per il momento limitiamoci a stabilire convenzionalmente come positiva una velocità angolare che comporta rotazioni in senso *antiorario* e negativa viceversa; in questa convenzione si intende che il moto del punto è osservato dall'alto. Simili considerazioni valgono anche per l'accelerazione angolare, che talvolta è utile definire come *vettore* $\vec{\alpha}$.

specifiche: infatti la coordinata $\theta(t)$ è *angolare*, e quindi la sua unità di misura è quella degli angoli, e non delle distanze, cioè è radianti invece che metri.

Il moto circolare si dice *uniforme* quando la velocità angolare ω è costante ed uniforme. Di conseguenza la legge oraria dello spostamento angolare si scrive:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \ , \tag{2.30}$$

come è facile dimostrare in analogia con le leggi del moto "lineare" che abbiamo discusso in precedenza. Infatti dal punto di vista formale l'equazione differenziale Eq. 2.28 è analoga all'equazione differenziale Eq. 2.3 e quindi la soluzione deve avere le stesse caratteristiche formali. Si vede facilmente che, a parte la diversa simbologia ed il diverso significato e dimensioni delle variabili usate, la funzione $\theta(t)$ di Eq. 2.30 è molto simile alla legge oraria del moto rettilineo uniforme $s(t)$ che abbiamo più volte incontrato in precedenza. Per motivi di praticità, molto spesso ci capiterà di scrivere la funzione di Eq. 2.30 nella forma $\theta(t) = \omega t + \phi$, con ϕ *termine di fase costante*: per passare da un'espressione all'altra, basta notare che si può sempre porre $\phi = \theta_0 + \omega t_0$.

Nel moto circolare uniforme è evidente che, essendo ω una costante, è $\alpha = 0$. Ci sono situazioni fisiche in cui α assume un valore costante nel tempo e diverso da zero, cioè il moto avviene con una *accelerazione angolare uniforme* e costante. Ponendo la velcoità angolare iniziale $\omega_0 = \omega(t = t_0)$, è facile rendersi che la legge oraria dello spsotamento angolare diventa in questo caso $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2$, cioè l'andamento è formalmente analogo a quello del moto uniformemente accelerato.

Una grandezza utile per caratterizzare un moto circolare (periodico) è il **periodo** T, cioè il tempo (misurato in s) necessario a percorrere un giro (ovvero uno spostamento angolare $\Delta\theta = 2\pi$ rad = 360 gradi). Nel caso del moto circolare uniforme, dove ω è costante, T, che rappresenta il tempo necessario a percorrere un giro, può essere determinato dalla relazione: $\theta(T) = \theta_0 + 2\pi = \theta_0 + \omega T$. Deve quindi essere $T = 2\pi/\omega$. L'inverso di T si chiama **frequenza**, che qui indichiamo con il simbolo $\nu = 1/T$; essa indica quanti giri vengono compiuti in un secondo. L'unità di misura di ν è s^{-1}, a cui si dà spesso il nome di Hertz, abbreviato in Hz. Giocando con l'algebra, si vede facilmente che vale la relazione $\nu = \omega/2\pi$.

Abbiamo parlato finora di spostamento e velocità angolari, cioè relative all'angolo $\theta(t)$, però è chiaro che il punto percorre anche uno spostamento vero e proprio, dato che si muove sulla circonferenza. Quindi dobbiamo anche preoccuparci della **velocità lineare** del moto[41], cioè la grandezza $\vec{v} = \overrightarrow{\Delta s}/\Delta t$, che si misura in m/s. Si tratta di un vettore che ha chiaramente una direzione (cartesiana) variabile continuamente con il tempo, dato che $\overrightarrow{\Delta s}$ appartiene alla circonferenza che viene percorsa dal punto. La direzione del vettore velocità è, punto per punto, tangente alla traiettoria, cioè alla circonferenza. Si dice quindi che $\vec{v}$ è una velocità *tangenziale*, essendo la sua direzione sempre quella tangenziale. Tale direzione forma, punto per punto, un angolo retto rispetto alla direzione

[41] L'aggettivo lineare applicato al moto su una circonferenza può sembrare improprio, ma è utile per ricordare che ci stiamo preoccupando del moto lungo una traittoria descritta da una linea (curva, in questo caso!).

radiale, quella del raggio R. Il modulo v, che, invece, rimane costante durante il moto, può essere determinato notando che l'intera circonferenza, corrispondente ad uno spostamento $|\overrightarrow{\Delta s}| = 2\pi R$, viene percorsa nel tempo $T = 2\pi/\omega$, per cui $|\vec{v}| = |\overrightarrow{\Delta s}|/T = \omega R$. Questa relazione tra grandezze angolari e lineari, che ha la semplice origine geometrica che abbiamo descritto, ci tornerà utile anche per esaminare situazioni fisiche molto diverse dal moto circolare uniforme, ad esempio il rotolamento di un cilindro e il comportamento delle carrucole.

In modo simile a quanto fatto per le direzioni dei sistemi cartesiani, è possibile, e spesso utile, definire dei *versori* corrispondenti alle direzioni tangenziale e radiale, che potremo indicare con $\hat{\theta}$ e $\hat{R}$, rispettivamente. Nel caso tridimensionale, che qui non stiamo trattando per evitare complicazioni, può far comodo determinare ed impiegare anche i versori $\hat{z}$ (per la direzione *assiale* in un sistema di coordinate cilindriche) e $\hat{\phi}$ (per la direzione, detta talvolta *zenitale*, associata alla variazione dell'angolo ϕ in coordinate sferiche - la direzione di variazione di θ si può allora chiamare *azimutale*). Avendo dato queste definizioni, si può scrivere ad esempio $\vec{v} = v\hat{\theta}$, che significa appunto che nel moto che stiamo considerando la velocità è un vettore di modulo $v = \omega R$ diretto sempre in direzione tangenziale.

Essendo il moto uniforme l'accelerazione angolare è nulla. L'accelerazione (*lineare*) $\vec{a} = \overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$, che si misura in m/s^2, invece, non è nulla. Questo aspetto è piuttosto singolare, ed è proprio dei moti curvilinei (in generale, cioè anche per quelli la cui velocità angolare non è costante o la traiettoria non è puramente circolare, ma, per esempio, ellittica o altro). Nei moti rettilinei, dove la direzione della velocità è una retta, se il modulo della velocità rimane costante l'accelerazione è nulla. Qui, invece, la variazione continua della *direzione* di $\vec{v}$ comporta un'accelerazione diversa da zero anche se v (in modulo) è costante.

Vediamo per prima cosa la direzione e verso del vettore $\vec{a}$, per poi esaminarne il modulo. Facciamo riferimento alla Fig. 2.4, in cui abbiamo disegnato sulla circonferenza i due vettori $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ che si riferiscono a due istanti t_A e t_B molto vicini tra loro, cioè $\Delta t = t_B - t_A$ è piccolo (coerentemente con la definizione di accelerazione istantanea). Se facciamo coincidere il punto di applicazione dei due vettori, cioè ne trasliamo rigidamente uno fino a portare il suo punto di partenza sopra a quello dell'altro, ed applichiamo la regola del parallelogramma, possiamo tracciare la differenza $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ come il vettore che congiunge le punte (frecce) dei due vettori di partenza. Poiché l'intervallo temporale è piccolo, i vettori $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ hanno direzioni molto simili fra loro, e la differenza $\overrightarrow{\Delta v}$ è praticamente ortogonale sia rispetto a $\vec{v}_A$ che rispetto a $\vec{v}_B$.[42] Tale direzione è la direzione radiale. Quindi $\overrightarrow{\Delta v}$ è diretto lungo il raggio della circonferenza, e risulta puntare verso il centro. L'accelerazione si dice allora **centripeta** (in Greco, la parola suggerisce la direzione ed il verso che abbiamo trovato): la indicheremo con $\vec{a}_{centr}$. La presenza di una componente centripeta nell'accelerazione è comune a tutti i moti curvilinei, e non è una caratteristica del solo moto circolare uniforme. In altre parole, *affinché un punto possa percorrere una traiettoria curvilinea occorre che su di esso agisca un'opportuna*

[42]Per esigenze tipografiche, la figura non rende al meglio questo aspetto, a cui però potete facilmente credere immaginando di avere una circonferenza di raggio molto grande.

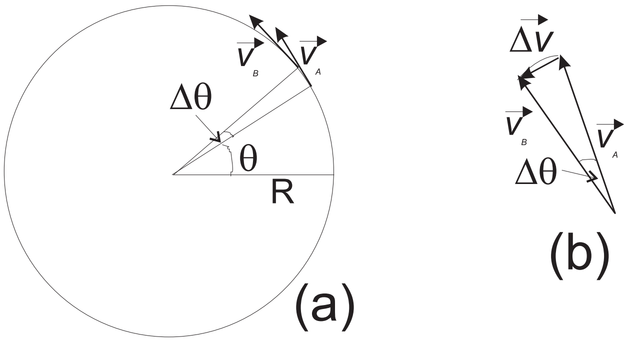

Figura 2.8: Rappresentazione vettoriale dell'accelerazione centripeta. In (b) il vettore $\vec{v}_B$ è stato traslato in modo da far coincidere il suo punto di applicazione con quello del vettore $\vec{v}_A$. Per esigenze di chiarezza grafica, l'intervallo angolare $\Delta\theta$ è stato esagerato rispetto a quanto sarebbe necessario.

accelerazione diretta ortogonalmente (punto per punto) alla traiettoria, ed orientata verso il "centro di curvatura".

Il modulo dell'accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme può essere dedotto facendo ancora riferimento alla Fig. 2.4. Tenendo conto che l'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ è, per ragioni di similitudine geometrica, uguale al $\Delta\theta$ compreso tra i raggi che vanno ai due punti della circonferenza occupati agli istanti t_A e t_B, ed approssimando il lato $\overrightarrow{\Delta v}$ con l'arco di circonferenza disegnato in figura, si ha $|\overrightarrow{\Delta v}| \simeq |\vec{v}_A|\Delta\theta$. Ora, essendo $|\vec{v}_A| = \omega R$ e $\Delta\theta = \omega\Delta t$, si ha:

$$a_{centr} = \frac{|\overrightarrow{\Delta v}|}{\Delta t} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \ , \tag{2.31}$$

dove l'ultimo passaggio si deve alla relazione $\omega = v/R$ che abbiamo già determinato. In modo compatto, potremo allora scrivere $\vec{a}_{centr} = -\omega^2 R\hat{R} = -(v^2/R)\hat{R}$, dove abbiamo usato il versore radiale $\hat{R}$ ed abbiamo posto un segno negativo per indicare il verso centripeto.

Qualora il moto fosse dotato anche di una accelerazione angolare $\alpha \neq 0$, cioè non fosse *uniforme*, ma accelerato angolarmente, ad esempio in modo uniforme (α = costante), allora per il calcolo dell'accelerazione $\vec{a}$ si dovrebbe tenere conto anche di una componente $\overrightarrow{a_{tang}}$ di direzione *tangenziale*, il cui modulo è legato ad α attraverso una relazione geometrica del tutto analoga a quella che abbiamo introdotto per le velocità: infatti, essendo $\alpha = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ e, per definizione, $a_{tang} = \frac{dv(t)}{dt}$, si ottiene subito $a_{tang} = \alpha R$. Usando la simbologia dei versori, si può allora scrivere, in generale: $\vec{a} = -\omega^2 R\hat{R} + (dv/dt)\hat{\theta}$, espressione che indica la presenza delle due componenti, radiale e tangenziale (nulla nel caso di moto circolare uniforme!) dell'accelerazione.

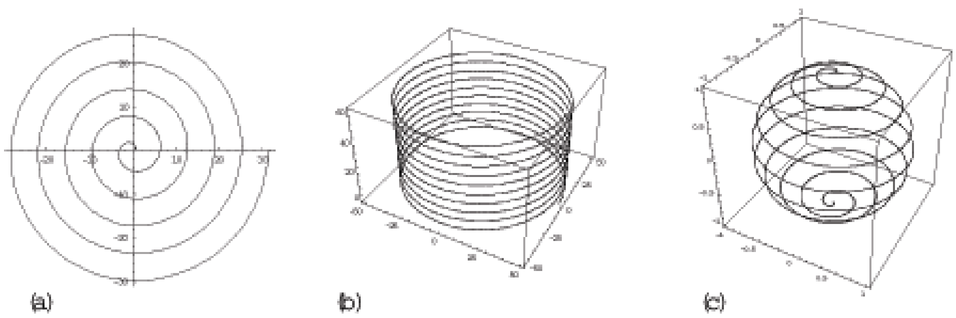

Figura 2.9: Rappresentazione di una traiettoria “a spirale” (a), “ad elica” (b), su una superficie sferica (c) ottenute secondo quanto stabilito nel testo

2.4.1 Esercizio: traiettorie fantasiose

Il moto di un punto su un piano è descrivibile attraverso le leggi orarie del moto (scritte nel sistema polare): $R(t) = v_R t$ e $\theta(t) = \omega t$; come è fatta la traiettoria che viene percorsa dal punto e come si scrivono le leggi orarie del moto, $x(t)$ ed $y(t)$, in un sistema cartesiano centrato in $R = 0$ (e costruito secondo le convenzioni)? Inoltre, (un altro) moto di un punto nello spazio è descrivibile attraverso le leggi orarie (scritte nel sistema cilindrico): $R(t) = R$ (costante!), $\theta(t) = \omega t$, $z(t) = v_Z t$; anche qui, come è fatta la traiettoria? Infine, (un ulteriore) moto di un punto nello spazio è descrivibile attraverso le leggi orarie (scritte nel sistema sferico): $R(t) = R$, $\theta(t) = \omega_1 t$, $\phi(t) = \omega_2 t$; come è fatta la traiettoria?

Soluzione. Consideriamo il primo degli esercizi proposti; il moto può essere visto come circolare a velocità angolare uniforme (lo spostamento angolare, $\theta(t)$, va linearmente con il tempo e quindi la velocità angolare è ω, costante) su un'orbita il cui raggio varia anche linearmente con il tempo. La “forma” di questa traiettoria è dunque quella di una *spirale* sul piano, che parte dall'origine del riferimento e si estende (all'infinito). Nel sistema cartesiano, le leggi orarie recitano: $x(t) = R(t)\cos(\theta(t)) = v_R t \cos(\omega t)$ e $y(t) = R(t)\sin(\theta(t)) = v_R t \sin(\omega t)$. Per il secondo esercizio, si può facilmente intuire che il moto prevede una rotazione a velocità angolare e raggio costanti accompagnata da una traslazione lungo l'asse Z, a velocità costante. La “forma” è dunque *ad elica.* L'ultimo caso, infine, si riferisce ad un moto che avviene sulla superficie di una sfera di raggio R (costante), sulla quale vengono compiute delle orbite circolari (con velocità angolare ω_1) lungo i “paralleli” accompagnate da un moto, sempre di tipo circolare (con velocità ω_2), lungo i “meridiani”. La Fig. 2.4.1 mostra una rappresentazione delle traiettorie che si ottengono nei tre casi.

2.4.2 Esercizio: moto circolare uniformemente accelerato

Un punto percorre una traiettoria circolare di raggio R noto; si sa che all'istante $t = 0$ il punto passa per la posizione $\theta_0 = -\pi/2$ essendo dotato di una velocità angolare ω_0 nota. Si sa inoltre che esso è dotato di un'accelerazione angolare *costante ed uniforme* α

nota (supponiamo $\alpha > 0$). Usando un sistema di riferimento cartesiano XY centrato nel centro della circonferenza che rappresenta la traiettoria, come si scrivono le componenti $a_x(t)$ ed $a_y(t)$ dell'accelerazione ("complessiva") del punto?

Soluzione. Cominciamo con il notare che la velocità angolare del punto è funzione del tempo secondo la legge $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Il moto è uniformemente accelerato per quanto riguarda la variabile angolare, cioè la funzione del tempo $\theta(t)$ si scrive: $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 + (\alpha/2)t^2$, come tipico per i moti uniformemente accelerati. La posizione del punto nel riferimento cartesiano si esprime, in funzione del tempo, come $x(t) = R\cos(\theta(t)) = R\sin(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2)$ e $y(t) = R\sin(\theta(t)) = -R\cos(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2)$, dove abbiamo usato il dato $\theta_0 = -\pi/2$ e le note relazioni trigonometriche tra angoli complementari.

Poiché il punto percorre una traiettoria circolare, esso sarà dotato di un'accelerazione *centripeta* di modulo (dipendente dal tempo t) $a_{centr}(t) = \omega^2(t)R = (\omega_0+\alpha t)^2 R$ e di un'accelerazione *tangenziale* (cioè diretta lungo la traiettoria circolare) di modulo (costante) $a_{tang} = \alpha R$. L'accelerazione "complessiva" del punto è evidentemente data dalla sovrapposizione (somma vettoriale) delle componenti centripeta e tangenziale dell'accelerazione. Conviene quindi proiettare le accelerazioni centripeta e tangenziale sugli assi del sistema cartesiano (cioè trovarne le componenti rispetto a questo sistema) e poi farne la somma algebrica. Ricordando quanto detto per le direzioni ed usando un po' di trigonometria, si ha $a_{centr,x}(t) = -\omega^2(t)x(t) = -(\omega_0 + \alpha t)^2 R\sin(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2)$ e $a_{centr,y}(t) = -\omega^2(t)y(t) = (\omega_0 + \alpha t)^2 R\cos(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2)$. Le componenti dell'accelerazione tangenziale si ottengono invece notando che essa ha la stessa direzione della velocità, ovvero, in questo caso: $a_{tang,x}(t) = \alpha R\cos(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2)$ e $a_{tang,y}(t) = \alpha R\sin(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2)$. Alla fine, quindi, si ha: $a_x(t) = -(\omega_0 + \alpha t)^2 R\sin(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2) + \alpha R\cos(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2)$ e $a_y(t) = (\omega_0 + \alpha t)^2 R\cos(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2) + \alpha R\sin(\omega_0 t + (\alpha/2)t^2)$.

2.4.3 Moto armonico

Esaminiamo ora un'ulteriore interessante "conseguenza" della legge del moto circolare uniforme. Tale moto può essere ovviamente interpretato come una rotazione attorno all'origine e con velocità angolare ω costante del vettore $\vec{R}$ (cioè interpretiamo come vettore il raggio che congiunge la posizione occupata istantaneamente dal punto). Chiamando $x(t), y(t)$ le componenti (dipendenti dal tempo) di $\vec{R}$ lungo due direzioni ortogonali, e tenendo conto che l'angolo θ varia con il tempo secondo la legge $\theta = \omega t$ (si suppone $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$), si ha: $x(t) = R\cos(\omega t)$ e $y(t) = R\sin(\omega t)$.

Esaminiamo, ad esempio, la legge oraria del moto $x(t)$ (le affermazioni che faremo valgono anche per $y(t)$, a meno di uno *sfasamento* di $\pi/2$, quello che c'è fra funzioni coseno e seno). La funzione è evidentemente periodica, ed il periodo è proprio $T = 2\pi/\omega$ (in questo ambito, ad ω si dà il nome di **pulsazione**). Tale moto, che si chiama **moto armonico**, rappresenta, come chiariremo meglio in seguito, un'*oscillazione* di ampiezza R attorno al punto $x = 0$.

Consideriamo il vettore velocità $\vec{v}$ del punto che si sta muovendo di moto circolare uniforme; ricordiamo che, essendo la velocità, per definizione, sempre tangente punto per punto alla traiettoria, essa cambia continuamente la sua direzione, mantenendo inalterato il modulo, che vale sempre ωR. Pensate ora di traslare rigidamente i (tanti) vettori $\vec{v}$ che rappresentano la velocità istante per istante in modo che la loro origine coincida con l'origine del sistema di riferimento (questa operazione non altera né il modulo, né la direzione, né il verso dei vettori, e d'altra parte il punto di applicazione del vettore velocità non ha significato fisico). Vi potrete rendere conto facilmente che $\vec{v}$ *ruota* con la stessa velocità angolare di $\vec{R}$, trovandosi sempre sfasato ("anticipato") di $\pi/2$ rispetto ad $\vec{R}$. Ad esempio, all'istante $t = 0$ $\vec{R}$ è diretto lungo l'asse X, mentre $\vec{v}$ è diretto lungo l'asse Y, dopo un quarto di giro, cioè dopo un intervallo di tempo pari ad un quarto di periodo, $\vec{R}$ è diretto lungo Y, e $\vec{v}$ è diretto verso la direzione negativa dell'asse X, e così via. Se vogliamo esprimere il vettore $\vec{v}$ in *coordinate polari*, risulta chiaro che le sue componenti saranno $(\omega R, \theta(t) + \pi/2) = (\omega R, \omega t + \pi/2)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che si tratta di moto circolare uniforme. Se vogliamo invece esprimere la velocità in un sistema *cartesiano*, possiamo usare la trigonometria, che ci suggerisce che la componente lungo X del vettore $\vec{v}$ vale $v_x(t) = |\vec{v}| \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega R \sin(\omega t)$.

Per quanto riguarda la componente a_x dell'accelerazione, poi, la derivazione è ancora più semplice. Infatti, nel moto circolare uniforme $\vec{a}$ è *centripeta*, e quindi ha sempre la stessa direzione di $\vec{R}$ ma verso opposto. In altre parole, $\vec{a}$ ruota con velocità angolare ω costante mantenendosi sempre sfasato di un angolo π rispetto ad $\vec{R}$; in coordinate polari, si ha $\vec{a} = (\omega^2 R, \theta(t) + \pi) = (\omega^2 R, \omega t + \pi)$. Per la componente cartesiana X si può scrivere: $a_x(t) = |\vec{a}| \cos(\omega t + \pi) = -\omega^2 R \cos(\omega t)$, dove abbiamo usato il modulo dell'accelerazione centripeta $|\vec{a}| = \omega^2 R$.

L'obiettivo di determinare v_x ed a_x per il moto armonico si può conseguire anche in modo "formale". "Lavorando" di derivate[43] sulla funzione del tempo $x(t) = R \cos(\omega t)$, si ottengono, per la velocità e l'accelerazione, le seguenti leggi orarie:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega R \sin(\omega t) \tag{2.32}$$

$$a_x(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 R \cos(\omega t) = -\omega^2 x(t) \ , \tag{2.33}$$

naturalmente analoghe a quelle già ottenute operando in modo grafico.

Possiamo ulteriormente generalizzare le leggi per un moto armonico che avviene lungo l'asse X con pulsazione ω in modo da permetterci di esprimere qualsiasi condizione iniziale, usando le seguenti forme (per posizione, velocità, accelerazione):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \Phi) \tag{2.34}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \Phi) \tag{2.35}$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \Phi) = -\omega^2 x(t) \ , \tag{2.36}$$

[43]In generale, si ha $\frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$ e $\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$ Il risultato riportato nel testo si raggiunge applicando anche le regole relative alla derivazione di "funzioni di funzioni", per cui, se $f(\xi)$ è funzione di ξ "attraverso" la funzione generica $g(\xi)$, cioè è una $f(g(\xi))$, allora $\frac{df(g(\xi))}{d\xi} = \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{dg}$. Come al solito, il ragionamento che stiamo conducendo può essere considerato come una sorta di dimostrazione di queste regoline tecniche.

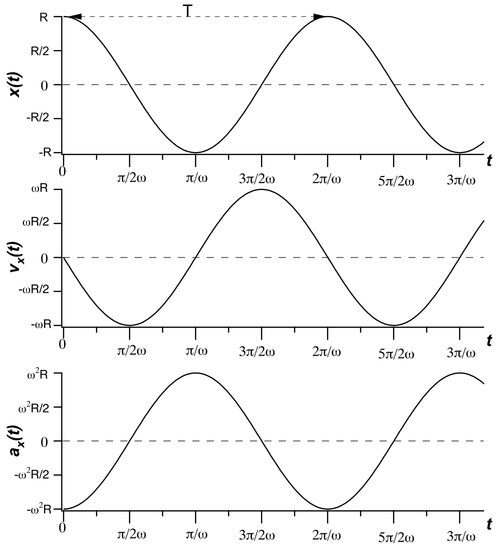

Figura 2.10: Andamento temporale delle funzioni $x(t), v_x(t), a_x(t)$ che rappresentano un moto armonico di pulsazione ω ed "ampiezza" R; il tempo sull'asse delle ascisse è riportato in unità di $T/4 = \pi/(2\omega)$, mentre la distanza rappresentata con la doppia freccia tratteggiata è il periodo T del moto considerato.

dove A (*ampiezza dell'oscillazione*) e Φ (*fase* costante del moto) sono dei parametri costanti (opportunamente dimensionati) che tengono conto delle "condizioni iniziali" del moto analizzato. In un prossimo esercizio vedremo come essi possano essere determinati sulla base degli specifici problemi considerati.

Al di là dei procedimenti matematici necessari per ottenere questo risultato, esso è in buon accordo con quello che ci aspettiamo qualitativamente per un moto oscillatorio. Per la nostra scelta delle condizioni iniziali, che stabiliscono che all'istante iniziale $t_0 = 0$ il punto occupa la posizione $x(0) = R$, cioè $\Phi = 0$ nelle equazioni appena scritte, ci aspettiamo che la velocità iniziale sia nulla (infatti il punto "sta per tornare indietro") e l'accelerazione sia rivolta verso il segno negativo dell'asse X (infatti la velocità "sta per cambiare segno"). Quando il punto passa per la posizione centrale $x = 0$, ci aspettiamo che la sua velocità sia massima (in valore assoluto, il verso essendo quello negativo dell'asse X) e l'accelerazione sia zero. Infine, quando il punto raggiunge la posizione $x = -R$ ci aspettiamo che si ripeta la situazione iniziale, però con un segno nell'accelerazione che è opposto a quello di prima, dato che ora il punto deve tendere a tornare verso il segno positivo dell'asse X. Se descrivete l'andamento delle funzioni coseno e seno con il tempo, cioè se ne disegnate il grafico, come in Fig. 2.4.3, potete facilmente verificare che queste osservazioni qualitative sono effettivamente confermate dagli andamenti funzionali delle $v(t)$ e $a(t)$ di Eq. 2.34 ponendo, coerentemente con le nostre condizioni iniziali, $\Phi = 0$.

Per concludere, facciamo un'importante osservazione. Ricordando che, per un moto che avviene lungo l'asse X, si ha $a(t) = d^2x(t)/dt^2$, possiamo infatti affermare che la funzione $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$ è una buona soluzione dell'equazione differenziale (del secondo ordine):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \; ; \qquad (2.37)$$

i *due* parametri (costanti e opportunamente dimensionati) A e Φ dipenderanno ovviamente dalle condizioni iniziali del problema specifico considerato. Che la funzione data sia effettivamente soluzione dell'equazione differenziale Eq. 2.37 è evidente se ripercorrete il ragionamento che ci ha condotto a scrivere velocità ed accelerazione per il moto armonico. In alternativa, potete anche usare le regole di derivazione delle funzioni seno e coseno che abbiamo dimostrato prima e rendervi conto che l'uguaglianza tra i due membri di Eq. 2.37 è valida per $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$, cosa che garantisce "matematicamente" che la soluzione proposta è giusta.

In questo ambito, è utile osservare che la funzione

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + x_P \; , \qquad (2.38)$$

con x_P termine *costante* opportunamente dimensionato, ha la stessa derivata seconda rispetto al tempo della funzione $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$: infatti la derivata della costante x_P è nulla. Questa osservazione ci tornerà utile nel prossimo capitolo quando, esaminando l'equazione del moto di un sistema elastico, daremo un significato fisico alla *soluzione particolare* x_P.

Infine, vale la pena di sottolineare che quanto abbiamo affermato si riferisce ad una classe di equazioni differenziali del secondo ordine che hanno delle caratteristiche ben precise: infatti al secondo membro di Eq. 2.37 compare un termine, ω^2, che è *sempre positivo* ed uguale al quadrato della pulsazione del moto armonico che rappresenta la soluzione dell'equazione differenziale stessa. In altre parole, se vi trovaste di fronte ad un'equazione differenziale del tipo $d^2x(t)/dt^2 = Kx(t)$, con K costante opportunamente dimensionata, potreste affermare che la soluzione è del tipo oscillatore armonico solo se $K < 0$.

2.4.4 Esercizio: condizioni iniziali in un moto armonico

Sapete che un punto si muove sull'asse X di un sistema di riferimento con un moto periodico di periodo $T = 6.3$ s. Nelle condizioni del moto che state indagando, si ha che la velocità assume il suo valore massimo $v_m = 2.0$ m/s all'istante $t = 0$ (ovviamente tale condizione si ripete periodicamente nel tempo, questo è solo uno degli infiniti istanti in cui la velocità ha il valore v_m). Come si scrive la legge oraria del moto $x(t)$? Quanto vale l'accelerazione $\tilde{a}$ all'istante $t = 0$?

Soluzione. Come specificato nell'Eq. 2.34, ci aspettiamo che la legge oraria abbia la forma $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$, con A, ω, Φ da determinare sulla base dei dati del problema. Possiamo subito stabilire che $\omega = 2\pi/T = 1.0$ rad/s. Inoltre la legge del moto che abbiamo scritto dà luogo ad una *funzione* velocità $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \Phi)$. Il dato del problema ci suggerisce che $v(t = 0) = -\omega A\sin\Phi$ ha il suo valore massimo; notando che questa funzione ha il suo massimo laddove la funzione seno ha il suo minimo (a causa del segno negativo!), cioè quando il suo argomento vale $(3/2)\pi$, [44] si può concludere che $\Phi = (3/2)\pi$ ed $A = v_m/(-\omega \sin((3/2)\pi)) = v_m/\omega = 2.0$ m. Allora si ha $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) = -A\sin(\omega t)$, con ω, A appena determinati. La *funzione* accelerazione è $a(t) = -\omega^2 x(t)$ e, all'istante $t = 0$, si avrà $\tilde{a} = -\omega^2 A\cos((3/2)\pi) = 0$ m/s^2 (come ci si poteva aspettare notando che, all'istante considerato, la velocità ha il suo valore massimo).

[44] A rigore, per la periodicità delle funzioni trigonometriche, si dovrebbe scrivere $(3/2)\pi + 2n\pi$, con n intero; si intende che qui, come anche altrove, ci limitiamo ad $n = 0$.