

Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2006/07

Francesco Fuso¹
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3, 56127 Pisa

versione 5c - 03.02.07

¹tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

Indice

Nota per i lettori	vi
1 Introduzione	1
1.1 Dimensioni ed unità di misura	2
1.2 Grandezze e prefissi	3
1.3 Precisione e cifre significative	3
2 Moto del punto	5
2.1 Posizione e spostamento	5
2.1.1 Velocità e derivata	7
2.1.2 Spostamento ed integrale	10
2.1.3 Esercizio: approccio complicato al moto rettilineo uniforme	11
2.1.4 Accelerazione e moto uniformemente accelerato	12
2.1.5 Esercizio: approccio complicato al moto uniformemente accelerato	15
2.1.6 Esercizio: caduta di un oggetto	17
2.1.7 Esercizio: cavalli che si rincorrono	18
2.1.8 Esercizio: evitare un tamponamento tra treni	19
2.1.9 Esercizio: una strana legge del moto	19
2.1.10 Esercizio: un moto vario	20
2.2 Sistemi di riferimento e moto in più dimensioni	20
2.2.1 Legge del moto e traiettoria	23
2.2.2 Esercizio: legge oraria e traiettoria	24
2.2.3 Esercizio: il moto parabolico	24
2.2.4 Esercizio: colpire lontano	25
2.3 Vettori	26
2.3.1 Alcune operazioni con i vettori	29
2.3.2 Esercizio: la caccia al tesoro	30
2.3.3 Composizione delle velocità	31
2.4 Moto circolare e circolare uniforme	32
2.4.1 Esercizio: traiettorie fantasiose	35
2.4.2 Esercizio: moto circolare uniformemente accelerato	36
2.4.3 Moto armonico	37
2.4.4 Esercizio: condizioni iniziali in un moto armonico	40

3	Forze, equilibrio, movimento di corpi puntiformi	41
3.1	Massa e densità di massa	41
3.2	Legge di Newton	42
3.2.1	Esercizio: tre forze applicate allo stesso punto materiale	44
3.3	Forza peso	45
3.3.1	Esercizio: lancio di una pietra	45
3.4	Reazione vincolare e terzo principio della dinamica	46
3.4.1	Esercizio: stabilità di un corpo su una guida semicircolare	47
3.4.2	Esercizio: moto su un piano inclinato	49
3.5	Funi inestensibili	50
3.5.1	Esercizio: equilibrio di un corpo legato a due funi	50
3.5.2	Esercizio: le piccole oscillazioni del pendolo	51
3.6	Carrucole senza massa	52
3.6.1	Esercizio: la carrucola mobile	53
3.6.2	Esercizio: piano inclinato, due masse e carrucola fissa	54
3.6.3	Esercizio: due masse ed una carrucola fissa (macchina di Atwood)	55
3.7	Forza centripeta	56
3.7.1	Esercizio: la fionda	57
3.7.2	Esercizio: una circonferenza su un piano verticale	57
3.8	Forza elastica	58
3.8.1	Esercizio: massa, piano inclinato e molla	60
3.8.2	Esercizio: molla con velocità iniziale diversa da zero	61
3.9	Forze d'attrito	62
3.9.1	Attrito statico	62
3.9.2	Esercizio: spingere o tirare	63
3.9.3	Esercizio: piano inclinato con attrito statico	64
3.9.4	Esercizio: l'auto che sbanda in curva	64
3.9.5	Esercizio: un gioco da luna park	65
3.9.6	Attrito dinamico	65
3.9.7	Esercizio: frenata a ruote bloccate	66
3.9.8	Esercizio: piano inclinato con attrito dinamico	67
3.9.9	Attrito dipendente dalla velocità	67
3.9.10	Esercizio: velocità limite di un paracadutista	69
3.10	Forza gravitazionale (e cenni al teorema di Gauss)	69
3.10.1	Esercizio: il peso su un altro pianeta	70
3.10.2	Esercizio: il satellite geostazionario	71
3.10.3	Esercizio: viaggio al centro della Terra	71
3.11	Forza elettrica	72
3.11.1	Campo elettrico	73
3.11.2	Esercizio: l'atomo planetario	74
3.11.3	Esercizio: un sistema di tre cariche elettriche	75
3.11.4	Esercizio: un sistema di due cariche elettriche	76
3.11.5	Esercizio: elettrone in campo elettrico uniforme	77

3.11.6	Esercizio: carica, campo elettrico e forza peso	78
3.11.7	Esercizio: molla e campo elettrico	78
4	Lavoro, energia, potenziale	79
4.1	Prodotto scalare	79
4.2	Lavoro meccanico	80
4.2.1	Esercizio: lavoro sul piano inclinato	81
4.2.2	Esercizio: segno del lavoro in varie situazioni	82
4.2.3	Esercizio: lavoro di una forza non uniforme	82
4.2.4	Esercizio: avanti ed indietro con forza di attrito	83
4.3	Potenza	83
4.3.1	Esercizio: potenza per una forza costante	84
4.4	Lavoro per alcune forze conservative	84
4.4.1	Lavoro della forza peso	84
4.4.2	Esercizio: sollevare pesi	85
4.4.3	Lavoro della forza elastica	85
4.4.4	Esercizio: molla compressa ed estesa	86
4.4.5	Lavoro delle forze elettriche	87
4.4.6	Esercizio: lavoro del campo di due cariche puntiformi	88
4.4.7	Esercizio: lavoro di un campo elettrico uniforme	89
4.5	Energia cinetica: definizione e teorema	90
4.5.1	Esercizio: la frenata a ruote bloccate rivisitata	91
4.5.2	Esercizio: potenza e velocità	91
4.5.3	Esercizio: la frenata a ruote non bloccate	92
4.5.4	Esercizio: velocità e montagne russe	92
4.5.5	Esercizio: un protone sparato contro un altro	93
4.5.6	Esercizio: lavoro complessivo di un sistema complicato	93
4.6	Energia potenziale e bilancio energetico	94
4.6.1	Esercizio: il “cannoncino a molla”	96
4.6.2	Esercizio: il giro della morte	96
4.6.3	Esercizio: piano inclinato con attrito dinamico	97
4.6.4	Esercizio: velocità nella macchina di Atwood	98
4.6.5	Esercizio: velocità della molla	98
4.6.6	Esercizio: massa, piano inclinato e molla	99
4.6.7	Esercizio: energia nel pendolo	100
4.6.8	Esercizio: velocità di fuga di un satellite	100
4.6.9	Esercizio: transizioni elettroniche ed energia di ionizzazione	101
4.6.10	Esercizio: dissipazione di energia nelle oscillazioni smorzate	102
4.7	Energia, forza e gradiente	103
4.7.1	Esercizio: forza da un’energia potenziale	105
4.7.2	Energia potenziale e stabilità	105
4.7.3	Esercizio: stabilità nell’oscillatore armonico	106
4.7.4	Esercizio: un potenziale strano	107

4.8	Potenziale elettrostatico	107
4.8.1	Esercizio: velocità di un protone	109
4.8.2	Esercizio: l'arresto di un elettrone	110
5	Forze impulsive e collisioni	111
5.1	Quantità di moto ed impulso	111
5.1.1	Esercizio: la forza nell'urto di un pallone	112
5.1.2	Conservazione della quantità di moto	113
5.1.3	Esercizio: il rinculo	114
5.1.4	Esercizio: camminare sul carrello	115
5.1.5	Esercizio: un piano inclinato a rotelle	116
5.1.6	Esercizio: la propulsione del razzo	117
5.2	Urti elastici ed anelastici	118
5.2.1	Esercizio: il pallone (ben gonfio) contro la parete	119
5.2.2	Esercizio: pesce grande mangia pesce piccolo	121
5.2.3	Esercizio: il crash test	121
5.2.4	Esercizio: vagoncini agganciati	122
5.2.5	Esercizio: vagoncini e respingente	122
5.2.6	Urti centrali e non centrali	123
5.2.7	Esercizio: urto centrale tra biglie	123
5.2.8	Esercizio: un urto non centrale	124
5.2.9	Esercizio: l'assalto di Zorro	125
5.3	Centro di massa per sistemi discreti	126
5.3.1	Esercizio: spostamento del carrello quando l'omino ci cammina sopra	126
5.3.2	Esercizio: centro di massa nell'urto centrale di due biglie	127
5.4	Frammentazioni	127
5.4.1	Esercizio: il fuoco d'artificio	128
5.4.2	Esercizio: l'automobile di James Bond	128
6	Movimento di corpi estesi	130
6.1	Centro di massa per corpi rigidi	130
6.1.1	Esercizio: centro di massa di un triangolo discreto	133
6.1.2	Esercizio: centro di massa di una sbarretta omogenea o disomogenea	133
6.1.3	Centro di massa e simmetrie	134
6.1.4	Esercizio: centro di massa per alcuni corpi simmetrici	136
6.2	Integrali di volume (e superficie) e simmetrie	137
6.2.1	Esercizio: il volume della sfera	140
6.2.2	Esercizio: sbarretta bis	140
6.2.3	Esercizio: centro di massa e massa di un cilindro disomogeneo . . .	141
6.2.4	Esercizio: distribuzione di massa esponenziale	142
6.2.5	Sistemi materiali discreti con costituenti continui	142
6.2.6	Esercizio: il manubrio da pesista	143
6.2.7	Esercizio: cerchione e piombino	143

6.2.8	Esercizio: cilindro scavato	144
6.2.9	Esercizio: il boomerang	145
6.3	Equazione del moto di traslazione di un corpo rigido	146
6.3.1	Esercizio: una sbarretta che trasla	147
6.3.2	Esercizio: energia cinetica traslazionale	148
6.3.3	Esercizio: il tuffatore	148
6.4	Moto di rotazione di un corpo rigido	149
6.5	Il prodotto vettoriale	150
6.5.1	Esercizio: le componenti del prodotto vettoriale	150
6.5.2	Velocità angolare vettoriale	151
6.5.3	Esercizio: relazioni vettoriali tra versori	151
6.6	Momento di inerzia ed energia cinetica rotazionale	152
6.6.1	Esercizio: momento di inerzia di un rotatore rigido	154
6.6.2	Esercizio: momento di inerzia di una sbarretta omogenea e disomogenea	155
6.6.3	Esercizio: momento di inerzia di un cerchione di bicicletta	156
6.6.4	Esercizio: momento di inerzia di dischi omogenei e non	156
6.6.5	Bilancio energetico e moto rotazionale	156
6.6.6	Esercizio: lavoro per far ruotare un disco	157
6.6.7	Esercizio: la carrucola massiva	157
6.7	Rotolamento puro	159
6.7.1	Esercizio: barattoli su piano inclinato	160
6.8	Momento delle forze	160
6.8.1	Esercizio: la porta	161
6.9	Equazione del moto di rotazione	163
6.9.1	Esercizio: il ponte levatoio	163
6.9.2	Esercizio: ponte levatoio che crolla	165
6.9.3	Esercizio: ponte che non crolla	165
6.9.4	Esercizio: la stadera (una leva!)	166
6.9.5	Esercizio: equilibrio della puleggia “a doppio raggio”	167
6.9.6	Esercizio: la porta bis	169
6.9.7	Esercizio: la porta ter	169
6.9.8	Esercizio: il pendolo “fisico”	169
6.9.9	Esercizio: una sbarretta che ruota (e trasla)	171
6.9.10	Esercizio: la carrucola massiva bis	171
6.9.11	Esercizio: barattoli su piano inclinato bis	172
6.9.12	Esercizio: cerchione con piombino bis	174
6.10	Cenni di statica di corpi “appoggiati” o inchiodati	175
6.10.1	Esercizio: un palo obliquo	176
6.10.2	Esercizio: sedia ed ombrello	177
6.10.3	Esercizio: la scala a pioli	178
6.11	Momento angolare	180
6.11.1	Esercizio: momento angolare in un’orbita circolare	181

6.11.2	Esercizio: la carrucola massiva ter	181
6.11.3	Conservazione del momento angolare	182
6.11.4	Esercizio: il pendolo balistico	182
6.11.5	Esercizio: la danzatrice sui pattini	183
6.11.6	Esercizio: cenni sulla trottola	185

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce da lezioni di fisica generale per diversi corsi di laurea, non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario (ed anche in molti testi per la scuola superiore). Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, con pochi discorsi, senza tabelle e con pochissime figure¹, è soprattutto quello di fornire una sorta di “programma esteso” del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Revisioni:

1. Versione 5, 15.10.06: prima versione completa destinata agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura;
2. Versione 5a, 19.10.06: aggiunte alcune figure, qualche esercizio e commenti minori a proposito di vettori e moto circolare;
3. Versione 5b, 30.10.06: correzioni minori ai paragrafi relativi al moto armonico;
4. Versione 5c, 10.01.07: aggiunti cap. 2–4 e revisione complessiva del testo;

¹A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 6

Movimento di corpi estesi

La meccanica che abbiamo considerato finora ci ha permesso di definire le leggi che regolano il moto di corpi puntiformi o di sistemi materiali che possono essere considerati come punti. Per la geometria un punto non ha dimensioni fisiche, e quindi l'unico moto a cui può essere soggetto è quello di *traslazione*: la posizione del punto percorre una traiettoria che è una curva continua. Tale traiettoria può essere chiusa, ad esempio può formare una circonferenza, ma anche in questo caso la situazione fisica che si sta considerando è quella di un *moto traslatorio* di tipo circolare, e non di una rotazione attorno ad un asse.

La situazione cambia completamente se abbiamo a che fare con corpi *estesi*, in particolare quelli che sono dotati di una forma propria (solidi). Questi sistemi, infatti, non sono approssimabili a punti materiali in modo ovvio e possono avere anche moto di *rotazione* attorno ad un qualche asse. Se immaginiamo di suddividere idealmente il corpo in tanti elementini (di massa, ovvero di volume), è evidente che avremo moto di traslazione (pura) quando tutti i singoli elementini seguono, nel proprio moto, la stessa traiettoria. In altre parole, il moto di traslazione presuppone che, istante per istante, tutti gli elementini si muovano con la stessa velocità (vettoriale). Poiché questa condizione può non verificarsi, come ci suggerisce l'esperienza comune, dovremo munirci degli strumenti che servono per analizzare il moto di rotazione.

In questo capitolo ci occuperemo proprio del moto di un corpo esteso, in particolare di un *corpo rigido*. Il nostro obiettivo sarà raggiunto in due passi: per prima cosa, infatti, metteremo a punto gli strumenti necessari per individuare la posizione del *centro di massa* per un corpo rigido e per mostrare che tale punto si comporta, sotto l'azione di forze esterne, esattamente come un punto materiale animato di moto di traslazione. Poi presenteremo e discuteremo una serie di leggi, modelli e teoremi che servono a descrivere il moto di rotazione del corpo esteso attorno ad un dato asse, con l'obiettivo di scindere lo studio del moto in due problemi, corrispondenti appunto alla traslazione e alla rotazione.

6.1 Centro di massa per corpi rigidi

Un **corpo rigido** è, per definizione, un sistema materiale con la caratteristica che tutti gli elementini in cui esso può essere idealmente suddiviso hanno una distanza reciproca che si

mantiene costante ed inalterata nel corso del processo che si intende studiare. Un esempio semplice di corpo rigido è rappresentato da un insieme di punti materiali collegati tra loro da aste di massa trascurabile; questo insieme costituisce un sistema materiale *discreto* (le masse si trovano in posizioni discrete, cioè separate fra loro, e reciprocamente fissate). Anche se talvolta useremo questo tipo di sistemi, è chiaro che corpi *continui*, in cui la materia, cioè la massa, è distribuita in modo continuo nello spazio, sono di interesse pratico maggiore.

La distribuzione spaziale della massa in questi sistemi è in genere descritta dalla *densità di massa* ρ_m che abbiamo già definito nel par. 3.1 come:

$$\rho_m = \frac{dm}{dV}. \quad (6.1)$$

Ricordiamo che, coerentemente con il significato “matematico” dell’operazione di derivata, la densità di massa è il rapporto tra massa e volume calcolato per volumetti molto molto piccoli, al limite infinitesimi. Se il sistema è disomogeneo, la massa (infinitesima) dm di ogni elementino di volume avrà un certo valore, che non sarà necessariamente uguale per tutti gli elementini, e potrà dipendere dalla *posizione* \vec{r} . Allora l’Eq. 6.1 potrà essere scritta, in modo più preciso, come una funzione della posizione: $\rho_m(\vec{r}) = dm(\vec{r})/dV$;¹ naturalmente per sistemi omogenei ed uniformi di massa m e volume V si avrà semplicemente $\rho_m = m/V$, senza alcuna dipendenza spaziale. Inoltre, per generalità, conviene introdurre anche le densità di massa superficiale e lineare, definite rispettivamente come $\sigma_m(\vec{r}) = dm(\vec{r})/dS$ e $\lambda_m(\vec{r}) = dm(\vec{r})/dl$, dove dS e dl sono elementi infinitesimi di superficie e di lunghezza. Queste densità servono per caratterizzare sistemi rispettivamente bidimensionali e unidimensionali, casi in cui l’impiego della densità (volumica) di massa ρ_m potrebbe creare delle difficoltà pratiche e concettuali per l’impossibilità di individuare elementi di volume.

Molti campioni di materiale solido costituiscono una buona approssimazione di corpi rigidi, almeno finché i processi considerati non sono troppo “violenti”. Per intenderci, un pezzo di metallo è un buon corpo rigido per tante situazioni, ma l’approssimazione non vale più se mettiamo lo stesso pezzo di metallo sotto una trancia, che lo fa a pezzettini. Anche senza arrivare a processi distruttivi, occorre molto spesso tenere conto dell’**elasticità** del materiale, che in questi appunti non trattiamo; sotto l’azione di una forza esterna, l’elasticità può modificare la distanza reciproca fra elementini del corpo. Inoltre è ovvio che la densità di massa dipende dalle condizioni nelle quali essa viene misurata: torneremo in seguito su questo argomento, ma temperatura e pressione possono senz’altro modificare il valore della densità per un dato corpo. In questo capitolo immagineremo di avere a che fare sempre con sistemi per i quali l’approssimazione di corpo rigido è ben verificata e che hanno una densità ben definita.

Avendo richiamato il concetto di densità di massa possiamo utilizzarlo nella definizione di *centro di massa*. Abbiamo già stabilito in par. 5.3 che la posizione del centro di massa

¹Al solito, spesso ometteremo di esprimere la dipendenza dalla posizione per ragioni di chiarezza tipografica.

per un sistema discreto è:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{M}, \quad (6.2)$$

dove la somma è estesa su tutti gli elementi di massa m_i che compongono il sistema, e che si trovano in posizione \vec{r}_i (questi vettori posizione sono spiccati da una certa origine, che è la stessa rispetto alla quale andrà considerato il vettore \vec{r}_{cm}); $M = \sum_i m_i$ è ovviamente la massa totale del sistema.

Nel caso di un corpo rigido continuo l'Eq. 6.2 deve essere adeguata per tenere conto della natura continua del sistema. Questo genere di adeguamento segue le consuete regole della fisica; in sostanza si può immaginare di suddividere idealmente il corpo in tanti elementini, di dimensioni *infinitesime*, ognuno dei quali avrà volume dV e massa dm . Inoltre, dato che la suddivisione ideale in elementini infinitesimi fa sì che il loro numero tenda ad infinito, la sommatoria di Eq. 6.2 diventerà formalmente un integrale. Tenendo conto che, dalla definizione di densità di massa, si può scrivere $dm = \rho_m dV$, avremo:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{massa} \vec{r} dm}{\int_{massa} dm} = \frac{\int_{volume} \vec{r} \rho_m dV}{\int_{volume} \rho_m dV}. \quad (6.3)$$

Soffermiamoci sull'aspetto "concettuale" dell'Eq.6.3, in particolare sulle operazioni di integrazione che vi sono contenute; è evidente che non abbiamo a che fare con gli (ordinari) integrali definiti di funzioni di una singola variabile. Se facciamo riferimento al significato pratico dell'operazione di integrazione secondo quanto abbiamo appena ricordato (una somma su infiniti elementi), allora possiamo facilmente capire che, ad esempio, l'espressione \int_{massa} presuppone di suddividere il nostro sistema in tanti elementini di massa e di sommare su tutti questi elementini il valore che l'integrando che abbiamo indicato, cioè il termine $\vec{r} dm$, assume su ciascuno di essi; tale somma è estesa all'intera massa considerata, motivo per cui abbiamo scritto "massa" come pedice del simbolo di integrale (avremmo potuto scrivere anche "corpo", o qualsiasi altro nome opportuno!). Analoghe considerazioni si possono fare per l'*integrale di volume*, che, in molti casi, può anche essere calcolato per via analitica, come vedremo per problemi con geometrie particolarmente semplici (ad esempio piane, cilindriche, sferiche). Avendo chiarito il significato delle operazioni, è chiaro che potremo scrivere, per esempio:

$$M = \int_{massa} dm = \int_{volume} \rho_m dm; \quad (6.4)$$

infatti sommare tutti gli elementini di massa fra loro equivale a calcolare il valore dell'intera massa considerata.

Notate qui due aspetti importanti. In primo luogo l'integrando di Eq. 6.3 è un vettore, e questo significa che, in generale, l'espressione deve essere intesa "componente per componente". Di conseguenza, quando un sistema giace nello spazio reale dovremo in genere eseguire tre operazioni di integrazione, ovvero risolvere tre integrali, uno per ognuna delle componenti cartesiane di \vec{r}_{cm} (basteranno due componenti se il sistema è bidimensionale, una sola se è unidimensionale). Inoltre l'integrazione nel volume implica di svolgere un integrale "triplo", che coinvolge integrazione nelle tre direzioni dello spazio (due nel caso

di integrali di superficie). Gli strumenti necessari per questo compito possono essere piuttosto complicati a patto che, come già accennato, la geometria del problema non consenta di semplificare l'espressione, riducendola di fatto al calcolo di un integrale "semplice" (di una sola variabile).

6.1.1 Esercizio: centro di massa di un triangolo discreto

Per incominciare con qualche esempio, consideriamo un sistema *discreto* costituito da tre masse puntiformi, m_1, m_2, m_3 , disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato L i cui lati sono costituiti da barrette di massa trascurabile. Dove si trova il centro di massa del sistema nei casi in cui $m_1 = m_2 = m_3 = m$ e $m_1 = m_2 = m/2$ ed $m_3 = 2m$?

Soluzione. Il problema è bidimensionale; possiamo allora porre il triangolo sul piano XY , ad esempio come rappresentato in Fig. 6.1, dove abbiamo scelto l'origine in corrispondenza della massa m_1 . Il centro di massa apparterrà anch'esso al piano XY : infatti, essendo nulla la coordinata Z delle tre masse, sarà nulla anche la coordinata z_{cm} del centro di massa. Il problema si riduce allora a determinare x_{cm} ed y_{cm} nel sistema di riferimento da noi scelto. Cominciamo con l'individuazione delle coordinate in cui si trovano le varie masse; guardando la Fig. 6.1 ed usando un po' di trigonometria è facile scrivere: $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = L, y_2 = 0$; $x_3 = L \cos(\pi/3) = L/2, y_3 = L \sin(\pi/3) = (\sqrt{3}/2)L$. Nel primo caso (masse tutte uguali fra loro), detta $M = 3m$ la massa complessiva del sistema, si ha: $x_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)/M = 0 + L/3 + L/6 = L/2$, e $y_{cm} = (m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3)/M = 0 + 0 + L(\sqrt{3}/6) = L(\sqrt{3}/6)$. Come è facile dimostrare, il punto individuato come centro di massa ha delle proprietà geometriche specifiche: ad esempio, esso si trova all'intersezione delle bisettrici dei tre angoli della figura geometrica (triangolo) in questione. Nel caso in cui le masse siano diverse secondo quanto riportato nel testo, la posizione del centro di massa è: $x_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)/M = 0 + L/6 + L/3 = L/2$, e $y_{cm} = (m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3)/M = 0 + 0 + L(\sqrt{3}/3) = L(\sqrt{3}/3)$. Osservate che la posizione del centro di massa è stata "attratta" dalla massa più grande, m_3 ; questa "attrazione" si è verificata solo lungo l'asse Y , dato che le nuove condizioni non hanno modificato la "simmetria" del sistema lungo la direzione X .

6.1.2 Esercizio: centro di massa di una sbarretta omogenea o disomogenea

Avete una sbarretta dritta così sottile da poter essere approssimata con un segmento. La lunghezza della sbarretta è $L = 30$ cm, e la sua massa è $m = 80$ g. Se la sbarretta è omogenea, a quale distanza da un suo estremo si trova il centro di massa? E se la sbarretta fosse disomogenea, ad esempio con una densità di massa che aumenta *linearmente* con la distanza da un suo estremo, dove verrebbe a trovarsi il centro di massa?

Soluzione. Il problema unidimensionale (la sbarretta è rappresentata da un segmento); per comodità poniamo allora la sbarretta lungo l'asse X di un sistema di riferimento, in modo che un suo estremo coincida con l'origine. Data la natura unidimensionale

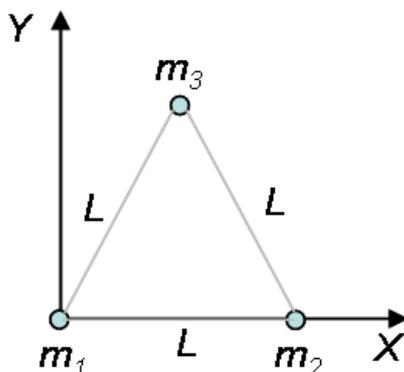


Figura 6.1: Rappresentazione schematica del sistema discreto di masse puntiformi unite a formare un triangolo discusso nel testo; i segmenti grigi sono bacchette rigide di massa trascurabile che tengono assieme il sistema.

del problema, può far comodo servirsi della *densità lineare* di massa $\lambda_m = dm/dl$.² La posizione del centro di massa apparterrà anch'essa all'asse X : si ha infatti: $x_{cm} = (\int_{massa} x dm)/m = (\int_{lunghezza} x \lambda_m dx)/m = (\int_0^L x \lambda_m dx)/m$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo esplicitato gli estremi di integrazione, che coincidono con gli estremi della sbarretta. Individuiamo ora l'espressione di λ_m nei due casi, omogeneo e disomogeneo, proposti nel problema. Nel caso omogeneo la densità deve essere costante e si deve avere semplicemente $\lambda_m = m/L$. Sostituendo nell'integrale si ha: $x_{cm} = (\int_0^L \lambda_m dx)/m = (1/L) \int_0^L x dx = L/2 = 15$ cm: il centro di massa cade quindi nel punto medio del segmento, come potevamo intuire sulla base di quanto discuteremo in seguito a proposito di geometria e simmetria.

Nel caso disomogeneo, invece, la densità non è uniforme ma, secondo il testo, varia *linearmente* con la distanza da un estremo (supponiamo quello che si trova in $x = 0$); una funzione della posizione del tipo $\lambda_m(x) = \lambda_0(x/L)$ rappresenta una densità che varia linearmente con la distanza. Per determinare il valore della costante λ_0 (che ha le dimensioni di una densità lineare di massa, come si può facilmente verificare), è sufficiente ricordare che: $m = \int_{massa} dm = \int_{lunghezza} \lambda_m(x) dx = (\lambda_0/L) \int_0^L x dx = \lambda_0 L/2$, da cui $\lambda_0 = 2m/L$, ovvero $\lambda_m(x) = 2mx/L^2$. Calcoliamo ora la posizione del centro di massa tenendo conto di questa espressione per la densità; avremo: $x_{cm} = (\int_0^L \lambda(x) x dx)/m = (\int_0^L \lambda_0(x/L) x dx)/m = (\int_0^L \lambda_0(x/L) x dx)/m = (\int_0^L (2m/L^2) x^2 dx)/m = 2(L^3/3)/L^2 = (2/3)L = 20$ cm. La posizione del centro di massa viene a trovarsi più vicina all'estremo in cui la densità di massa è maggiore, in accordo con quanto ci si poteva attendere.

6.1.3 Centro di massa e simmetrie

Nella soluzione degli esercizi di par. 6.1.1 e 6.1.2 abbiamo già avuto modo di incontrare argomenti che richiamano la geometria e la simmetria dei sistemi. Ad esempio abbiamo

²Osservate che, in generale, detta ρ_m la densità *volumica* di massa e S la sezione della sbarretta, vale la relazione: $\lambda = \rho_m S$.

visto come per un sistema di forma piana (o lineare) il centro di massa giaccia nel piano (o sulla retta), e come per sistemi “omogenei” il centro di massa possa essere individuato usando argomenti di geometria (l’intersezione delle bisettrici degli angoli al vertice). In questo paragrafo cercheremo di generalizzare queste affermazioni e di chiarire come argomenti di tipo geometrico possano essere impiegati nella descrizione dei corpi rigidi.

Normalmente le situazioni fisiche che considereremo coinvolgeranno corpi dotati di un certo grado di *simmetria*, che definiremo ad esempio come simmetria piana, circolare, cilindrica, sferica, etc.. Il concetto di simmetria a cui facciamo riferimento coincide, almeno in parte, con quello di *invarianza*: senza entrare nei dettagli geometrici, per noi un sistema sarà invariante rispetto a qualche “operazione” quando il risultato di questa operazione non cambia la “situazione fisica” esaminata. Facciamo qualche esempio.

- Se prendiamo in considerazione una sfera e ci “giriamo intorno” (oppure ci muoviamo al suo interno) *mantenendo inalterata la nostra distanza dal centro*, osservando la “situazione fisica” (ad esempio la distribuzione spaziale della massa) non avvertiamo “alcun cambiamento”. Potremo allora parlare di *invarianza per rotazione* lungo le due direzioni angolari (azimutale e zenitale) di un sistema di coordinate sferiche (vedi par. 2.2) centrato nel centro della sfera. Se invece supponiamo di muoverci in direzione radiale, in modo da cambiare la nostra distanza dal centro, allora potremo notare cambiamenti: se rimaniamo all’esterno, vedremo la sfera più piccola o più grande, se ci muoviamo al suo interno ne vedremo il bordo avvicinarsi o allontanarsi. Per descrivere simili situazioni parleremo di **simmetria sferica**; notate a questo proposito che abbiamo implicitamente considerato un sistema *omogeneo rispetto alle rotazioni* angolari, ma non abbiamo fatto alcuna affermazione di omogeneità *rispetto alla direzione radiale*. Infatti, se al posto della sfera avessimo considerato tanti *gusci sferici* concentrici con caratteristiche diverse (ad esempio il colore, o la densità di massa) in funzione del loro raggio, la conclusione delle nostre osservazioni sarebbe stata la stessa, cioè avremmo sempre riscontrato invarianza rotazionale rispetto alle due direzioni angolari.
- Supponiamo ora di avere un *cerchio*, cioè una figura circolare (un disco sottile) poggiata su un piano. Usando argomenti simili, sarà facile determinare che in questo caso vale invarianza per rotazione in *una* direzione angolare, per intenderci quella (tangenziale) del sistema di coordinate polari centrato nel centro del disco; parleremo in questo caso di **simmetria circolare**.
- È semplice rendersi conto che una simile simmetria vale anche per geometrie cilindriche; talvolta useremo il termine **simmetria cilindrica** trattando di cilindri la cui dimensione assiale (l’altezza) è molto superiore alla dimensione trasversa (il diametro della base). In questi casi si può anche avere *invarianza per traslazione lungo la direzione assiale*; infatti, poiché il cilindro che stiamo considerando è molto più alto (o lungo, a seconda se è piantato in direzione verticale o sdraiato) di quanto sia largo, cioè ha un’altezza (o lunghezza) che al limite è *infinita*, se ci muoviamo lungo l’asse non avvertiamo alcuna differenza, dato che non scorgiamo né l’inizio né

la fine del cilindro. Questa simmetria coinvolge quindi sia invarianza rotazionale che traslazionale lungo l'asse, ma, ovviamente, non implica invarianza per traslazione in direzione radiale.

- Consideriamo ora una lastra, cioè un parallelepipedo con dimensioni trasverse molto maggiori dello spessore, al limite *infinite*. Usando lo stesso argomento impiegato per il cilindro, potremo parlare in questo caso di **simmetria piana**, ovvero di invarianza rispetto a spostamenti nelle due direzioni trasverse. Infatti la “larghezza” della lastra è così grande che, se ci muoviamo in direzione trasversa, non avvertiamo alcuna variazione della “situazione fisica” che rappresenta la lastra stessa (non ne scorgiamo i bordi in direzione trasversa).

Anche se non rigorose dal punto di vista formale, queste considerazioni ci torneranno molto utili nell'analisi di diversi problemi (non solo per il corpo rigido!). Ad esempio, come conseguenza immediata, su cui torneremo nel capitolo dedicato ai campi elettrici, potremo affermare che le grandezze fisiche che caratterizzano il sistema considerato sono generalmente invarianti per rotazioni o traslazioni nelle direzioni *geometricamente invarianti*. Inoltre gli argomenti di simmetria sono sicuramente utili anche per determinare in modo immediato alcune proprietà del centro di massa di un sistema materiale, come vedremo ad esempio nell'Es. 6.1.4.

6.1.4 Esercizio: centro di massa per alcuni corpi simmetrici

Avete degli oggetti (solidi e rigidi) dotati di particolari geometrie: un disco, una lastra omogenea di foggia triangolare equilatera ed una di foggia quadrata, una sbarretta di sezione non trascurabile, una sfera ed un cubo omogeneo. Cosa potete affermare immediatamente a proposito della posizione del centro di massa?

Soluzione. Anche se ancora non sappiamo come operare per calcolare gli integrali di volume (o di superficie) coinvolti nella definizione di centro di massa, possiamo ugualmente sforzarci di impiegare argomenti basati sulle simmetrie e sul buon senso. Cominciamo dal disco, che supponiamo presenti una simmetria circolare (cioè la sua densità di massa non dipende dalla posizione angolare). Supponiamo di guardare dal centro del disco verso il suo bordo: a causa della simmetria, comunque ruotiamo il nostro sguardo vedremo sempre la stessa situazione fisica. In particolare, per qualsiasi direzione scelta avremo la stessa situazione guardando in avanti o all'indietro. Dunque, se nel calcolo dell'integrale (di superficie, se il disco è sottile, ma se si trattasse di un disco spesso o di un cilindro le considerazioni da fare sarebbero simili) usiamo un sistema di coordinate centrato nel centro del disco, è chiaro che i “contributi” ottenuti guardando in avanti e quelli ottenuti guardando all'indietro si cancellano a vicenda (il segno con cui compaiono nella somma di infiniti elementi rappresentata dall'integrale dipende dal “verso”). Dal punto di vista concettuale, è come se stessimo scomponendo il cerchio in tante sbarrette di sezione trascurabile e lunghezza pari al diametro del cerchio. Per ognuna di esse il centro di massa si trova al centro, e quindi al centro geometrico si troverà il centro di massa dell'intero disco.

Per il triangolo equilatero, considerando il suo carattere omogeneo, potremo fare riferimento alla situazione descritta nell'Es. 6.1.1. Nel caso presente il sistema non è discreto, ma potremo idealmente considerarlo come costituito da tantissimi triangoli equilateri posti uno dentro l'altro e recanti ai vertici delle masserelle infinitesime. Il risultato dell'operazione di integrazione porterà allora ad individuare il centro di massa nell'intersezione delle bisettrici degli angoli al vertice. Per la lasra quadrata sarà altrettanto semplice concludere che il centro di massa coincide con il centro geometrico, cioè con l'intersezione delle diagonali.

Per la sbarretta (non necessariamente omogenea nella sua direzione assiale!) potremo usare un argomento simile a quello impiegato per il disco, e concludere che il centro di massa deve appartenere all'asse della sbarretta stessa. Infatti questa può essere immaginata come formata da tanti dischi sottili messi uno sopra all'altro, per ognuno dei quali il centro di massa deve trovarsi al centro.

La sfera (supposta a simmetria sferica, cioè con densità che non dipende dalle coordinate angolari) ed il cubo omogeneo sono *sistemi ad alta simmetria*. Ragionando sulla base di quanto già espresso ed usando un po' di buon senso, potrete facilmente concludere che il centro di massa coincide con il centro geometrico delle figure.

6.2 Integrali di volume (e superficie) e simmetrie

Avendo acquisito un po' di dimestichezza con gli argomenti di simmetria, stabiliamo in questo paragrafo come ci si può comportare *praticamente* per il calcolo degli integrali di volume (e superficie) in presenza delle proprietà di simmetria che abbiamo discusso. Gli sforzi che stiamo per fare ci torneranno di grande utilità per la soluzione di molti problemi che incontreremo da qui in avanti anche al di fuori della meccanica.

L'idea guida dei procedimenti che illustreremo consiste nel ricondurre gli integrali a più dimensioni ad integrali "semplici" (di una sola variabile) attraverso l'individuazione di opportuni elementi infinitesimi di volume (o di superficie).

- Cominciamo con il caso di *simmetria piana*. Per sistemi dotati di questo tipo di simmetria potremo immaginare di fare una suddivisione del volume tagliando idealmente il sistema in tante lastre, infinitesimamente sottili. Infatti in un sistema a simmetria piana le uniche variazioni delle grandezze fisiche rilevanti, ad esempio la densità di massa, si possono avere muovendosi nella direzione "dello spessore"; quindi le (infinite) lastre che si ottengono sono omogenee, dato che al loro interno non si riscontrano variazioni (le grandezze dipendono dalla "quota" che rimane praticamente costante all'interno di ogni lastra). Detta S la superficie trasversa del sistema, il volume (infinitesimo) dV associato ad ogni lastra sarà dato dal prodotto della superficie di base per l'altezza, cioè $dV = Sdz$, dove con dz abbiamo espresso lo spessore (infinitesimo) di ogni lastra. Allora, ogni volta che avremo da calcolare integrali di volume su sistemi a simmetria piana potremo impiegare questa espressione per l'elemento di volume, cosa che ci consentirà di ricondurci ad un semplice integrale di una variabile singola (quella che abbiamo indicato con

z).³ Notate con attenzione che questo approccio vale anche per descrivere sistemi a *geometria cilindrica* in cui le grandezze caratteristiche (ad esempio la densità di massa) dipendono *solo* dalla variabile assiale. Esempio tipico è quello di un tondino di sezione circolare di area S , in cui c'è invarianza rispetto alle rotazioni attorno all'asse e *invarianza rispetto a traslazioni in direzione radiale*⁴, mentre le grandezze caratteristiche possono dipendere dalla variabile *assiale* (cioè dalla “quota”, se supponiamo che il cilindro considerato sia piantato in direzione verticale). Anche in questo caso il volume può essere suddiviso in tante “fettine”, cioè dischi (infinitesimi) omogenei al loro interno, e l'elemento di volume assume la stessa espressione trovata per la simmetria piana, cioè $dV = Sdz$. La Fig. 6.2(a) riporta schematicamente le operazioni che abbiamo discusso nel caso di lastra e cilindro.

- Esaminiamo ora un sistema a *simmetria circolare*, cioè un cerchio (figura bidimensionale appoggiata sul piano) in cui, riferendosi ad un sistema di coordinate radiali, le grandezze caratteristiche (ad esempio la densità di massa) non dipendono dalla variabile angolare ma possono dipendere da quella radiale. Essendo la figura piana, in questo caso siamo interessati a valutare l'elemento di superficie (infinitesimo) dS , che compare negli integrali di superficie rilevanti per la soluzione dei problemi. Immaginiamo di scomporre l'intera superficie del cerchio in tante *corone circolari* concentriche tra loro e di raggio variabile tra zero ed il raggio del cerchio considerato ed assumiamo che il loro “spessore” dr sia molto piccolo (infinitesimo); queste corone saranno omogenee al loro interno, dato che il raggio resta approssimativamente costante (lo spessore è così piccolo che il raggio non può variare!). Ci si può facilmente rendere conto che la superficie (infinitesima) associata ad una corona di raggio r generico vale $dS = 2\pi r dr$. Immaginate infatti di “estrarre” dal cerchio una di queste corone, quella di raggio r generico, e di sdraiarla su di un piano dopo averla tagliata (in direzione radiale). Come si vede in Fig. 6.2(b), la figura che otterrete assomiglia ad un trapezio, la cui base inferiore è lunga $2\pi r$, quella superiore è lunga $2\pi(r + dr)$, e lo spessore vale dr . Dato che la differenza tra le lunghezze delle basi ha il valore dr , estremamente piccolo e, al limite, trascurabile, non farete un errore apprezzabile approssimando (*al primo ordine*) l'area del trapezio con quella di un rettangolo, scrivendo $dS = 2\pi r dr$; questa è l'espressione dell'elemento di superficie da impiegare nel caso di simmetria circolare.
- Se immaginiamo di disporre tanti cerchi del tipo appena considerato uno sopra all'altro otterremo una figura solida dotata di *simmetria cilindrica* (Fig. 6.2(c)), cioè un cilindro che poniamo alto (o lungo) h . Il volume dell'intero cilindro potrà essere suddiviso in tanti *gusci cilindrici* coassiali di raggio r (generico), “spessore” dr ed altezza (o lunghezza) h , ognuno dei quali è omogeneo al suo interno ed ha volume

³In buona sostanza, nell'individuare l'elemento infinitesimo di volume è come se avessimo già integrato lungo le direzioni trasverse, in cui le grandezze del sistema sono uniformi. Faremo una simile operazione di integrazione lungo le direzioni di invarianza anche per le altre simmetrie che tratteremo.

⁴Questa condizione non è verificata nel caso di *simmetria cilindrica*: fate attenzione a distinguere bene!

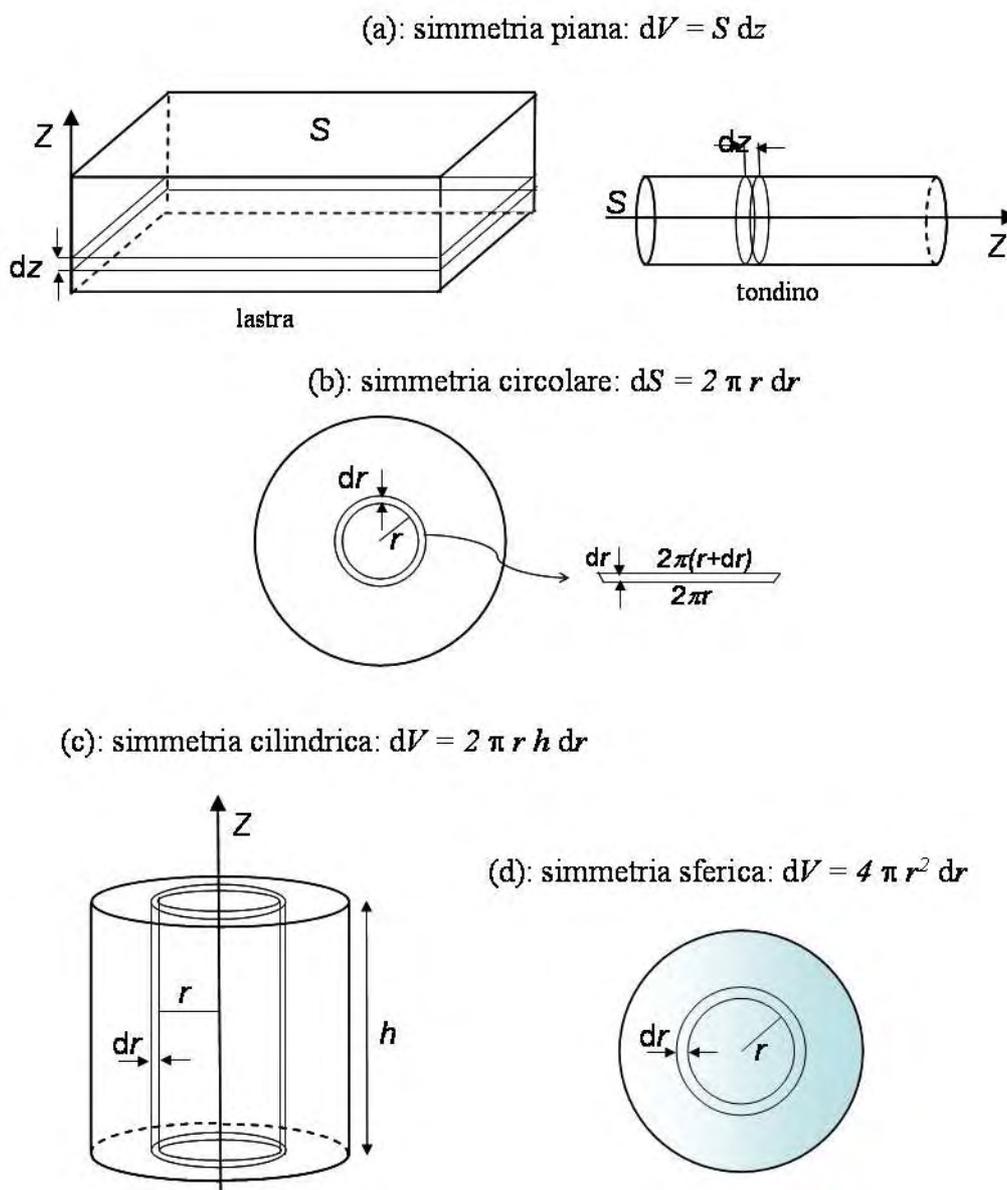


Figura 6.2: Rappresentazione schematica degli elementi di volume (o di superficie) nel caso di simmetrie: piane (a), circolari (b), cilindriche (c), sferiche (d). La simmetria piana è considerata per una lastra e per un tondino, come discusso nel testo; per la simmetria circolare si riporta uno schema dell'elemento di superficie secondo quanto descritto nel testo. Ovviamente le figure non sono in scala.

infinitesimo $dV = 2\pi r h dr$. Questo è l'elemento di volume da usare negli integrali di volume per casi a simmetria cilindrica.

- Da ultimo esaminiamo un problema a *simmetria sferica* (la Fig. 6.2(d) cerca di rappresentare la situazione); usando argomenti simili a quelli discussi in precedenza potremo immaginare di suddividere il volume dell'intera sfera in tanti *gusci sferici* concentrici di raggio r generico e "spessore" dr . Il volume (infinitesimo) di questi gusci sottili si può ricavare notando che esso è dato approssimativamente (*al primo ordine*) dal prodotto della superficie di un guscio sferico di raggio r , che vale $4\pi r^2$, per lo spessore dr . Quindi l'elemento di volume da impiegare per il calcolo di integrali di volume nel caso di simmetria sferica vale $dV = 4\pi r^2 dr$.

Come già accennato, individuare la corretta espressione per l'elemento infinitesimo di volume (o di superficie) è il punto chiave del nostro procedimento, dato che consente di ridurre i casi trattati, che godono di buone proprietà di simmetria⁵, al calcolo di integrali di singola variabile.

6.2.1 Esercizio: il volume della sfera

Tutti sapete (dovete sapere!) che una sfera di raggio R ha volume $V = (4/3)\pi R^3$. Ora che abbiamo stabilito qualcosa sull'integrazione a più dimensioni, e tenendo conto che il volume deve discendere da una qualche operazione di integrale, siamo in grado di trovare questo noto risultato attraverso il calcolo?

Soluzione. Se pensate al significato dell'operazione di integrale, vedrete subito come si possa scrivere, formalmente: $V = \int_{\text{volume}} dV$. Ora, la sfera è certamente un sistema a simmetria sferica, per cui si può porre $dV = 4\pi r^2 dr$; quindi l'integrale diventa $V = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi R^3/3$, come doveva uscire.

6.2.2 Esercizio: sbarretta bis

Riprendiamo il caso esaminato nell'Es. 6.1.2, supponendo stavolta che la sbarretta (di lunghezza L e massa m) considerata abbia una sezione, ad esempio di forma circolare, non trascurabile, la cui area indichiamo con S . Le domande sono le stesse di Es. 6.1.2, cioè vogliamo determinare la posizione del centro di massa nei casi di sbarretta omogenea e con densità che varia linearmente con la distanza da un estremo.

Soluzione. Rispetto all'esercizio precedente stavolta abbiamo da considerare un caso (apparentemente) tridimensionale, dotato, fortunatamente, di un elevato grado di simmetria. Essendo il problema tridimensionale dobbiamo preoccuparci di individuare la posizione del centro di massa nello spazio. La simmetria, però, ci aiuta: infatti se suddividiamo la sbarrettina in tanti dischetti, cioè la tagliamo idealmente a fettine, noteremo che ogni dischetto è omogeneo, e dunque il centro di massa di ognuno dei dischetti deve corrispondere al suo centro geometrico. Di conseguenza il centro di massa della sbarretta appartiene al suo asse. La posizione assiale (che in questa soluzione continuiamo

⁵Imparerete altrove ad esaminare situazioni che non godono di queste proprietà.

ad indicare con la variabile X , per analogia con l'esercizio precedente) dipende dalla distribuzione della massa, che stavolta sarà bene considerare usando la densità *volumetrica* di massa. Nel caso omogeneo potremo subito porre $\rho_m = m/V = m/(LS)$, essendo LS il volume della sbarretta. L'integrale da calcolare per determinare la posizione x_{cm} del centro di massa lungo l'asse è: $x_{cm} = (\int_{massa} x dm)/m = (\int_{sbarretta} \rho_m x dV)/m = (\int_0^L (m/(LS)) x S dx)/m = (1/L)L^2/2 = L/2$, dove abbiamo posto l'origine dell'asse X in corrispondenza ad un estremo della sbarretta ed abbiamo espresso l'elemento di volume come $dV = S dx$ (cioè abbiamo fatto l'integrale sommando su tutte le fettine in cui abbiamo suddiviso la sbarretta). Il centro di massa continua ovviamente a trovarsi a "metà altezza" della sbarretta. Notate che avremmo potuto usare lo stesso procedimento di Es. 6.1.2 ponendo, formalmente, $\lambda_m = \rho_m S$.

Nel caso disomogeneo, seguendo le indicazioni del testo possiamo sicuramente esprimere la densità come: $\rho_m(x) = \rho_0 x/L$. Per il calcolo di ρ_0 notiamo che deve essere: $m = \int_{massa} dm = \int_{sbarretta} \rho_0(x/L) dV = \int_0^L \rho_0(x/L) S dx = \rho_0 SL/2$, da cui $\rho_0 = 2m/(LS)$. La posizione x_{cm} del centro di massa si trova allora risolvendo l'integrale, che scriviamo saltando un po' di passaggi: $x_{cm} = (\rho_0/(mL)) \int_0^L x^2 S dx = (2/3)L$. Anche in questo caso ci poteva formalmente ricondurre alla situazione unidimensionale ponendo $\lambda_m(x) = \rho_m(x)S$.

6.2.3 Esercizio: centro di massa e massa di un cilindro disomogeneo

Un cilindro di raggio $R = 10$ cm ed altezza $h = 1.0$ m è realizzato con un materiale disomogeneo, caratterizzato da una densità di massa che dipende dalla distanza r rispetto all'asse secondo la legge $\rho_m(r) = \rho_0 R/r$, con $\rho_0 = 5.0 \times 10^2$ kg/m³ (in pratica la densità tende a diventare infinita in prossimità dell'asse, e va a diminuire verso la periferia). Dove si trova il suo centro di massa del cilindro? Quanto vale la sua massa m ?

Soluzione. Vediamo di capire cosa si può trovare senza fare calcoli. Intanto, il sistema ha sicuramente simmetria cilindrica, dato che la grandezza che lo caratterizza ($\rho_m(r)$) dipende solo dalla distanza r rispetto all'asse, cioè dalla coordinata radiale in un sistema cilindrico. Essa, quindi, non dipende dalla variabile angolare, né da quella assiale (che qui indicheremo con la variabile z). Le considerazioni di simmetria ci suggeriscono che il centro di massa deve appartenere all'asse del cilindro, perché la disomogeneità non rompe la simmetria cilindrica. Quindi il centro di massa apparterrà all'asse; la sua posizione potrà essere determinata notando che la densità non dipende neppure dalla coordinata assiale; il risultato sarà allora identico a quello della sbarretta omogenea che abbiamo appena trattato, cioè il centro di massa si troverà a metà dell'altezza del cilindro. Il calcolo della massa, invece, richiede di risolvere il seguente integrale: $m = \int_{cilindro} \rho_m(r) dV = \rho_0 R \int_0^R (1/r) 2\pi r h dr = 2\pi \rho_0 R h \int_0^R dr = 2\pi \rho_0 R^2 h = 31$ kg, dove abbiamo usato l'elemento di volume individuato per sistemi a simmetria cilindrica.

6.2.4 Esercizio: distribuzione di massa esponenziale

Una situazione che si riscontra in certi problemi di meccanica quantistica prevede di avere sistemi la cui densità volumica di massa dipende in maniera *esponenziale decrescente* dalla distanza da un punto, che considereremo come l'origine di un sistema di coordinate sferiche. Dai dati del problema si sa che la “distanza di decadimento” della densità vale R_0 . Cosa possiamo affermare a proposito della posizione del centro di massa e della massa m di questo sistema?

Soluzione. Il testo dell'esercizio è volutamente vago, dato che vogliamo capire bene a cosa ci stiamo riferendo. Indichiamo con r la distanza di un punto della distribuzione dall'origine: tale distanza coincide, ovviamente, con la coordinata radiale del riferimento sferico, e la densità di massa può essere espressa come: $\rho_m(r) = \rho_0 \exp(-r/R_0)$, dove ρ_0 è un'opportuno valore costante di densità, che supponiamo noto, corrispondente alla densità al centro (evidentemente $\rho_m(r=0) = \rho_0$). Nell'espressione abbiamo poi inserito il valore R_0 a dividere la distanza r : in questo modo stiamo supponendo che la “distanza di decadimento” sia quella a cui il valore della densità scende a ρ_0/e , dove e è la base dei logaritmi naturali. Il problema ha evidentemente simmetria sferica (la densità non dipende dalle coordinate angolari), e quindi possiamo affermare a colpo sicuro che il centro di massa coincide con il centro della distribuzione. L'espressione della massa si ottiene risolvendo l'integrale: $m = \int_0^\infty \rho_m(r) 4\pi r^2 dr = -R_0^3 \rho_0 \int_0^\infty \xi^2 \exp(-\xi) d\xi$, dove si è supposto di integrare su tutto lo spazio (l'estremo di integrazione tende all'infinito) e si è fatta la sostituzione di variabile $\xi = r/R_0$.⁶

6.2.5 Sistemi materiali discreti con costituenti continui

Nei parr. 5.3 e 6.1 abbiamo fatto cenno a corpi rigidi discreti supponendoli costituiti da masse puntiformi. Nulla ci vieta a questo punto di estendere la nostra trattazione a sistemi discreti i cui costituenti siano corpi rigidi estesi e continui. Tale estensione può risultare molto utile nella descrizione di numerosi casi che richiedono di determinare la posizione del centro di massa di sistemi realistici, come vedremo negli esercizi seguenti.

Ricordiamo che la definizione di centro di massa si basa su un integrale di volume, cioè sulla somma di tantissimi contributi del tipo $\rho_m dV$ ognuno dei quali è infinitesimo. Se abbiamo un sistema discreto fatto di corpi continui collegati tra loro da bacchette di massa trascurabile, quando andremo a calcolare l'integrale su tutto il volume di nostro interesse avremo che laddove la massa (e quindi la densità di massa) è trascurabile i contributi varranno zero. È facile rendersi conto che, alla fine, saremo ricondotti ad una sommatoria formalmente analoga a quella di Eq. 6.2, solo che in questa sommatoria le masse dei vari costituenti saranno le masse dei corpi continui che formano il sistema, e le loro posizioni saranno quelle dei *centri di massa* dei corpi continui che costituiscono il sistema. Avremo

⁶Il calcolo esplicito della massa, che non è il vero obiettivo dell'esercizio, richiede di conoscere questa regola di analisi matematica: per una variabile generica ξ , la primitiva della funzione $\xi^2 \exp(\xi)$, ovvero l'integrale indefinito $\int \xi^2 \exp(\xi) d\xi$, si esprime come, salvo errori!, $\exp(\xi)(\xi^2 - 2\xi + 1)$. Questa regola dovrebbe poter essere dimostrata applicando le regole di “integrazione per parti”.

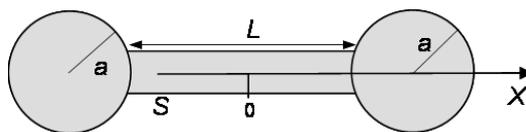


Figura 6.3: Rappresentazione schematica del manubrio da pesista usato nell'esercizio del testo.

cioè:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{cm,i}}{\sum_i m_i}, \quad (6.5)$$

dove la somma è estesa a tutti i costituenti (continui) la cui massa è m_i e la cui posizione del centro di massa è $\vec{r}_{cm,i}$.

6.2.6 Esercizio: il manubrio da pesista

Il manubrio con cui tonificate i vostri bicipiti è costituito da due sfere omogenee identiche di raggio $a = 10$ cm fatte di metallo con densità di massa (uniforme) $\rho_m = 5.0 \times 10^3$ kg/m³ tenute assieme da un'asta, anch'essa omogenea e fatta dello stesso metallo; l'asta può essere approssimata con un cilindro, di lunghezza $L = 20$ cm e sezione di area $S = 5.0$ cm². La Fig. 6.3 riporta una visione schematica dell'attrezzo. Quanto vale la sua massa complessiva M ? Dove si trova il centro di massa?

Soluzione. Il sistema è costituito da elementi omogenei, con densità uniforme. Dunque è immediato calcolare la massa come prodotto del volume per la densità di massa. Si ha $M = 2((4/3)\pi a^3) + SL)\rho_m = 21$ kg (siete dei veri macisti!). Per determinare la posizione del centro di massa notiamo che: il centro di massa delle due sfere si trova al loro centro; il centro di massa dell'asta si trova sul suo asse, al suo punto medio. Se indichiamo con X l'asse dell'asta, che, per geometria, passa anche per i centri delle sfere, e supponiamo che questo asse sia centrato nel punto di mezzo dell'asta, avremo che il centro di massa dell'intero sistema appartiene a questo asse, e che la sua posizione è data da: $x_{cm} = (m_{sfera}x_1 + m_{sfera}x_2)/M$, dove abbiamo indicato con x_1 ed x_2 le posizioni dei centri di massa delle due sfere ed abbiamo sfruttato il fatto che, per la nostra scelta del riferimento, il centro di massa dell'asta si trova in $x = 0$. È facile rendersi conto che $x_2 = -x_1$, per cui il centro di massa del sistema, come ci aspettavamo, si trova in $x_{cm} = 0$, cioè giace nel punto medio dell'asse.

6.2.7 Esercizio: cerchione e piombino

L'“equilibratura” delle ruote che fa il gommista consiste nel porre un piombino, cioè una piccola massa m (che supponiamo puntiforme), in una precisa posizione del cerchione di una ruota. Lo scopo è quello di “compensare” le disuniformità della gomma. In questo esercizio approssimiamo la ruota ad una *circonferenza* di massa M e raggio R (trascuriamo i raggi e lo spessore!), e supponiamo che questa circonferenza porti una distribuzione di massa *omogenea*. Cosa succede alla posizione del centro di massa dell'intero sistema

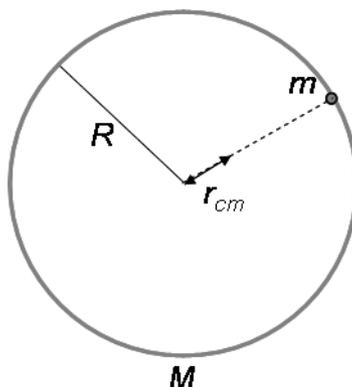


Figura 6.4: Rappresentazione schematica del problema considerato nel testo.

se applichiamo il piombino in un punto della circonferenza? La Fig. 6.4 rappresenta schematicamente il nostro problema.

Soluzione. Essendo omogenea, la circonferenza ha centro di massa nel suo centro geometrico; essendo puntiforme, il piombino ha centro di massa coincidente con la sua stessa posizione. Il centro di massa del sistema complessivo, che ha massa $(M + m)$, si trova sulla congiungente del centro con il piombino, ad una distanza dal centro pari a $r_{cm} = mR/(m + M)$ (vedi Fig. 6.4).

6.2.8 Esercizio: cilindro scavato

Avete un cilindro omogeneo, di raggio $a = 20$ cm, altezza $h = 50$ cm e densità di massa (uniforme) $\rho_m = 2.0 \times 10^3$ kg/m³. Decidete di scavare una cavità all'interno di questo cilindro, asportandone il materiale con una fresa; la cavità realizzata ha forma cilindrica, lunghezza pari a quella del cilindro di partenza, raggio $b = 5.0$ cm ed asse parallelo a quello del cilindro, disassato per una distanza $d = 10$ cm. La Fig. 6.5 rappresenta una vista in sezione del cilindro scavato. Quanto vale sua massa m ? Dove si trova il centro di massa?

Soluzione. Il sistema è omogeneo nelle due parti in cui può essere suddiviso (quella “piena” e quella “vuota”). La massa è data dal prodotto del volume “pieno” per la densità, cioè si ha: $m = (\pi ha^2 - \pi hb^2)\rho_m = \pi h\rho_m(a^2 - b^2) = 1.2 \times 10^2$ kg. Notate che formalmente lo stesso risultato si può ottenere sommando algebricamente la massa del cilindro di partenza, $m_p = \rho_m\pi a^2 h$, alla massa che avrebbe la cavità se fosse riempita di un materiale con densità di massa *negativa*: $m_c = (-\rho_m)\pi hb^2$. Chiaramente un sistema del genere non esiste nella realtà fisica, ma questo approccio ha la sua utilità.

Chiediamoci infatti dove si trova il centro di massa. Per ragioni di simmetria, lungo l'asse esso si troverà a metà altezza del cilindro; sicuramente, però, esso non apparterrà al suo asse, dato che in questo problema *non* c'è invarianza per rotazione. Lavoriamo sul piano che passa per l'asse del cilindro, a metà della sua altezza: su questo piano il sistema equivale, ai fini della risposta, a due masse puntiformi m_p ed m_c (quest'ultima

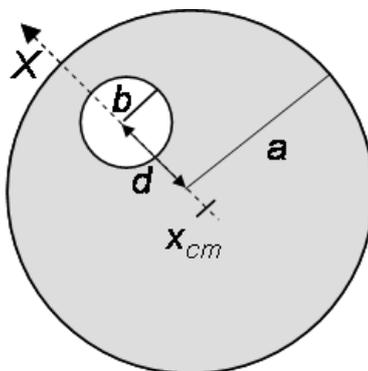


Figura 6.5: Rappresentazione schematica della vista in sezione del cilindro scavato discusso nel testo.

negativa), collocate rispettivamente al “centro” (cioè nel punto di intersezione fra asse del cilindro e piano) e a distanza d dal centro. Usiamo un asse X diretto come la congiungente fra queste due posizioni, centrato nel “centro”; la posizione del centro di massa è allora $x_{cm} = m_c d / m = (-\rho_m \pi h b^2) d / (\rho_m \pi h (a^2 - b^2)) = -db^2 / (a^2 - b^2) = 6.7 \text{ mm}$. Intuitivamente si vede come il centro di massa “si sposti in verso opposto alla cavità”.

6.2.9 Esercizio: il boomerang

Un boomerang può essere schematizzato come costituito dai tre elementi raffigurati in Fig 6.6: due lastre identiche di forma rettangolare, massa $m = 100 \text{ g}$ e dimensioni $L_1 = 30 \text{ cm}$, $L_2 = 5.0 \text{ cm}$, indicate in figura come “1” e “2”, ed una lastra di forma quadrata, massa $M = 50 \text{ g}$ e lato L_2 , indicata in figura come “3”. L’angolo compreso tra le due lastre rettangolari vale $2\theta = 90$ gradi. Lo spessore del materiale è lo stesso per tutti gli elementi e vale $s = 1.0 \text{ cm}$ (stiamo trascurando la lavorazione dell’ala a cui è normalmente sottoposto un boomerang funzionante!); il materiale del boomerang è omogeneo ed uniforme. Dove si trova il centro di massa del sistema, espresso rispetto al riferimento di figura?

Soluzione. Il boomerang è un corpo rigido, come sa chi, per errore, se lo prende in testa; per trovare la posizione del centro di massa vediamo di ragionare usando al meglio tutte le considerazioni su geometria e simmetria che abbiamo introdotto finora. Intanto potremo affermare che, essendo la densità di massa uniforme, la posizione z_{cm} sarà a metà dello spessore delle lastre, come si può facilmente dimostrare. Passiamo ora a determinare le posizioni dei centri di massa dei tre elementi costituenti. Valendoci del fatto che essi sono omogenei, potremo immediatamente localizzare i centri di massa nei “centri geometrici” dei tre elementi (l’intersezione delle diagonali delle figure piane che li rappresentano). A causa della simmetria della distribuzione delle masse, potremo affermare che il centro di massa dell’intero sistema apparterrà al suo “asse mediano”, cioè che $x_{cm} = 0$ (rispetto al riferimento di figura). La posizione y_{cm} si ottiene considerando il sistema come formato da tre masse puntiformi collocate nei centri di massa dei singoli componenti. “Lavorando” di geometria e notando che l’elemento quadrato ha il centro

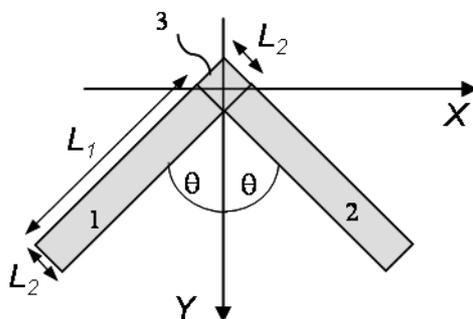


Figura 6.6: Rappresentazione schematica del boomerang descritto nel testo, come visto “dall’alto”; la figura riporta anche il sistema di riferimento impiegato nella soluzione dell’esercizio, che si intende centrato nel centro dell’elemento (quadrato) indicato con “3”.

di massa nell’origine del sistema di figura, si ottiene: $y_{cm} = 2my_{cm,rett}/(2m + M) = (2m/(2m + M))(L_1/2 + L_2/2) \cos \theta = 12 \text{ cm}$. Notate che la posizione del centro di massa *non* appartiene al corpo, cioè non coincide con nessun punto del corpo considerato.

6.3 Equazione del moto di traslazione di un corpo rigido

Il centro di massa gioca un ruolo fondamentale nello studio della dinamica di un corpo rigido. Infatti, come abbiamo già affermato nel par. 5.3 e come dimostreremo ancora tra breve, quando un corpo rigido è sottoposto a delle forze *esterne* il centro di massa *trasla* sotto l’azione di queste forze come se fosse un punto materiale dotato di massa M (la massa totale del corpo). Di conseguenza, i problemi di dinamica del corpo rigido possono essere risolti in due “fasi”, volte a determinare rispettivamente le caratteristiche del moto *traslazionale* e *rotazionale*. Quanto affermato corrisponde a dire che la traslazione del corpo rigido equivale a quella di un punto materiale che ha tutta la massa del corpo e occupa la posizione del centro di massa.

Vediamo di mostrare che questa affermazione, molto importante per i suoi risvolti pratici, è vera nel caso dei corpi rigidi continui, così come abbiamo già dimostrato per i sistemi discreti. Cominciamo con il ricordare che formalmente si ha:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\int_{volume} \frac{d\vec{r}}{dt} \rho_m dV}{\int_{volume} \rho_m dV} \quad (6.6)$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = \frac{\int_{volume} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \rho_m dV}{\int_{volume} \rho_m dV} . \quad (6.7)$$

Consideriamo ora un corpo rigido sottoposto ad una forza \vec{F} ; chiaramente indichiamo con \vec{F} la forza *totale* che agisce sul corpo (la “risultante delle forze), cioè, nel caso in cui

ci siano diverse forze \vec{F}_i che agiscono sul corpo, si ha $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. Suddividiamo idealmente il corpo rigido in elementini. Su ogni elementino agirà una forza *infinitesima* $d\vec{F}$ che, per il principio di Newton applicato ad ogni singolo elementino di massa dm , deve essere $d\vec{F} = \vec{a}dm$, avendo indicato con \vec{a} l'accelerazione del singolo elementino. Si ha allora:

$$\vec{F} = \int_{\text{corpo}} d\vec{F} = \int_{\text{massa}} \vec{a}dm = \left(\int_{\text{massa}} dm \right) \vec{a}_{cm} = M\vec{a}_{cm} . \quad (6.8)$$

La legge che abbiamo appena scritto, che prende spesso il nome di **prima equazione cardinale**, stabilisce in modo completo la dinamica traslazionale di un corpo rigido: ai fini traslazionali il corpo rigido si comporta come un punto materiale la cui posizione è espressa da \vec{r}_{cm} e la cui massa corrisponde alla massa totale M del corpo. È interessante osservare che, se ci sono diverse forze che agiscono sul corpo, per esaminarne la dinamica *traslazionale* non occorre tenere conto di *dove* queste forze sono applicate, cioè nel costruire il diagramma delle forze siete liberi di traslare rigidamente le forze applicate allo stesso corpo in modo che tutte abbiano lo stesso punto di applicazione; vedremo invece che tenere in debito conto il punto di applicazione sarà un elemento determinante per la dinamica rotazionale. Per completezza, notate anche che quando le forze considerate sono di natura gravitazionale (cioè sono forze peso) al centro di massa si può anche dare il nome di **baricentro**.

Infine, è ovvio che l'Eq. 6.8, oltre che per la dinamica, serve anche per stabilire le (eventuali) condizioni di *statica traslazionale* di un corpo rigido. Tenete infatti sempre ben presente che l'equilibrio meccanico di un corpo rigido può richiedere che vengano soddisfatte due distinte condizioni, una relativa al moto traslazionale e l'altra al moto rotazionale, come discuteremo in seguito. Le proprietà del centro di massa ci consentono di affermare che si ha equilibrio traslazionale quando $\vec{a}_{cm} = 0$ (e $\vec{v}_{cm} = 0!$), e l'Eq. 6.8 stabilisce che questo si verifica quando la risultante delle forze applicate al corpo è nulla, esattamente come per l'equilibrio di un corpo puntiforme.

Da ultimo notate che il centro di massa può giocare un ruolo particolare anche quando si vanno a considerare altre caratteristiche dinamiche del sistema. Ad esempio, la quantità di moto di un corpo rigido di massa M il cui centro di massa si muova con velocità \vec{v}_{cm} è semplicemente $\vec{p} = M\vec{v}_{cm}$, mentre l'energia cinetica *associata alla sola traslazione* si scrive $E_{K,trasl} = (M/2)v_{cm}^2$. Queste definizioni valgono non solo nel caso in cui il corpo sia animato da solo moto di traslazione, ma anche in quello ben più generale in cui si ha anche moto di rotazione (attorno ad un asse ben determinato, quello che passa per il centro di massa, come illustreremo in seguito).

6.3.1 Esercizio: una sbarretta che trasla

Supponete di avere una sottile sbarretta *omogenea* di massa M , lunghezza L e sezione (piccola!) di area S che può muoversi senza attrito sul piano orizzontale XY . Agli estremi della sbarretta sono collocate due cariche elettriche puntiformi, di massa trascurabile, e valore q_1 e q_2 . Sul piano agisce un campo elettrico uniforme e costante \vec{E} , diretto lungo la bisettrice del piano XY (cioè ad un angolo $\theta = 45$ gradi rispetto all'asse X) e di ampiezza

E. All'istante iniziale $t_0 = 0$ la sbarretta si trova ferma ed allineata con l'asse X , in modo che un suo estremo si trova nella coordinata $x = 0$, e l'altro nella coordinata $x = L$. Come si scrive la legge oraria del moto (traslazionale) del centro di massa della sbarretta?

Soluzione. Essendo la sbarretta omogenea dal punto di vista della distribuzione di massa, il centro di massa si trova sull'asse della sbarretta stessa al suo punto di mezzo. La posizione iniziale del centro di massa è allora: $x_{cm,0} = L/2$, $y_{cm,0} = 0$ (abbiamo trascurato la sezione della sbarretta). Poiché il moto avviene su un piano orizzontale senza attriti, la forza di gravità non contribuisce alla dinamica essendo sempre equilibrata dalla reazione vincolare. Le uniche forze che agiscono sono quelle di natura elettrica tra campo e cariche. Si ha quindi $\vec{F} = q_1\vec{E} + q_2\vec{E}$, cioè, componente per componente e tenendo conto dell'orientazione del campo elettrico: $F_X = (q_1 + q_2)E_X = (q_1 + q_2)E \cos \theta$ ed $F_Y = (q_1 + q_2)E_Y = (q_1 + q_2)E \sin \theta$. Queste forze sono costanti ed uniformi, per cui il moto di traslazione del centro di massa è uniformemente accelerato nella direzione di \vec{E} . Si ha quindi $x_{cm}(t) = L/2 + (F_X/(2M))t^2$, $y_{cm}(t) = (F_Y/(2M))t^2$, avendo tenuto presenti le condizioni iniziali del moto come specificate nel testo del problema. Notate che, coerentemente con quanto appena scritto, in questo problema abbiamo semplicemente sommato (vettorialmente) fra loro le forze sulla sbarretta, anche se queste agivano su punti diversi.

6.3.2 Esercizio: energia cinetica traslazionale

Supponiamo che il boomerang descritto nell'Es. 6.2.9, che ha massa complessiva $M_{tot} = 2m + M = 250$ g, venga scagliato in modo che il suo centro di massa abbia una velocità $v_{cm} = 2.0$ m/s. Quanto vale l'energia cinetica del sistema $E_{K,trasl}$ relativa (solamente) al suo moto di traslazione?

Soluzione. Poiché la proprietà del centro di massa è quella di descrivere il moto di traslazione di un corpo rigido (nel senso che abbiamo ampiamente chiarito nei paragrafi precedenti), è immediato affermare che l'energia cinetica richiesta è quella di un corpo puntiforme che porta la massa complessiva del sistema ed ha la stessa velocità del centro di massa. Si ha quindi $E_{K,trasl} = (M_{tot}/2)v_{cm}^2 = 0.50$ J.

6.3.3 Esercizio: il tuffatore

Un tuffatore di massa m ed altezza h si butta da un trampolino alto H (con $H \gg h$) in modo tale che il suo centro di massa abbia velocità iniziale diretta orizzontalmente ed avente modulo v_0 . Durante il suo volo, il tuffatore compie un certo numero di capriole, riuscendo comunque a toccare il pelo dell'acqua mentre si trova in posizione perfettamente verticale. All'incirca, a quale distanza (orizzontale) D dalla fine del trampolino il tuffatore raggiunge l'acqua della piscina?

Soluzione. Questo problema è apparentemente complicatissimo, vista la varietà di movimenti che il tuffatore può compiere. Tuttavia possiamo ragionare usando un modello approssimato, e partire dalla constatazione che il moto del centro di massa del tuffatore è un moto di traslazione che avviene con velocità uniforme in direzione orizzontale (sti-

amo trascurando gli attriti) e con accelerazione uniforme verso il basso (è la caduta di un grave). Applicando le nostre conoscenze sul moto di traslazione di un punto materiale, potremo facilmente trovare $D = v_0(2(h + H/2)/g)^{1/2}$, dove abbiamo assunto che il centro di massa del tuffatore si trovi a metà della sua altezza. È chiaro che abbiamo impiegato delle approssimazioni, ma deve comunque risultarvi evidente l'utilità degli strumenti che abbiamo discusso nei paragrafi precedenti, che vi consentono di risolvere (almeno approssimativamente) un problema complesso con metodi molto semplificati.

6.4 Moto di rotazione di un corpo rigido

Un corpo rigido può ruotare attorno ad un qualsiasi asse, per esempio un asse che si sposta nel tempo (una ruota che rotola, un boomerang lanciato per aria, una trottola, etc.) o un asse “dato”, cioè fisso ed assegnato dalla configurazione del sistema, come ad esempio quando un corpo è incernierato, o imperniato, ad un asse (un'asta vincolata a ruotare attorno ad un perno, la puleggia di una carrucola, una porta che si apre e si chiude, etc.). È facile rendersi conto che per i corpi imperniati il moto di rotazione è l'unico possibile: infatti non c'è modo di impartire la stessa velocità (vettoriale) a tutti gli elementi in cui il corpo può essere suddiviso, condizione tipica del moto di traslazione.

Chiaramente le modalità con cui avviene la rotazione dipendono dalla scelta dell'asse, sia questa “libera” o vincolata per l'esistenza di un perno di rotazione. Indicheremo con **polo di rotazione** il punto geometrico di intersezione tra asse attorno a cui avviene la rotazione e un piano del corpo rigido, e vedremo come la dinamica della rotazione, in particolare le grandezze fisiche che la caratterizzano, dipendano dalla scelta del polo. Nel caso di corpi che traslano e ruotano mostreremo come la scelta più conveniente (e logica) consista nel considerare come polo il centro di massa del sistema, in modo da descrivere la dinamica come dovuta agli effetti combinati di una traslazione del centro di massa ed una rotazione *attorno al centro di massa*.

Visto che per il momento non abbiamo sviluppato alcuno strumento utile per studiare il moto di rotazione, è davvero necessario costruire un nuovo insieme di definizioni, leggi, teoremi, principi. Per questo scopo seguiremo un percorso di tipo “pratico”, basato su considerazioni concettualmente analoghe a quelle che abbiamo già introdotto per i punti materiali, disegnando un approccio (formalmente) simile valido però per lo studio delle rotazioni. Riassumiamo brevemente quanto abbiamo fatto finora per il moto di traslazione di un punto. Sostanzialmente abbiamo⁷:

- definito la massa come caratteristica del sistema materiale;
- stabilito l'espressione dell'energia cinetica e le leggi di bilancio che ne fanno uso;
- scritto la legge fondamentale del moto (il principio di Newton);
- definito la quantità di moto e sfruttato principi di conservazione, soprattutto per risolvere situazioni di tipo “impulsivo”.

⁷L'elenco non è in ordine cronologico, ma è funzionale al contenuto di questo capitolo.

Qui nel seguito affronteremo punto per punto questi aspetti, permettendoci qualche divagazione finalizzata alla presentazione di strumenti matematici necessari per i nostri scopi.

6.5 Il prodotto vettoriale

Come primo passo dobbiamo introdurre una nuova operazione tra vettori, il **prodotto vettoriale**. Dati due vettori (generici) \vec{a} e \vec{b} , si definisce il loro prodotto vettoriale (o prodotto vettore) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ come un *vettore* che ha⁸: direzione ortogonale a quella di entrambi i vettori \vec{a} e \vec{b} ; verso determinato attraverso la *regola della mano destra* (vedi dopo); modulo dato dal prodotto $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, essendo θ l'angolo compreso tra le direzioni di \vec{a} e \vec{b} .

La regola della mano destra stabilisce in sostanza che, disponendo pollice, indice e medio della mano destra come se fossero gli assi di un sistema cartesiano (destrorso), allora pollice, indice e medio rappresentano direzione e *verso* dei vettori rispettivamente \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , che quindi formano una terna ortogonale destrorsa.

Si notano subito delle grosse differenze tra prodotto vettoriale e prodotto scalare (che avevamo già definito in par. 4.1): quest'ultimo dà come risultato uno scalare (come dice il nome!) che è massimo quando i vettori da moltiplicare sono mutuamente paralleli. Il prodotto vettoriale dà invece un vettore il cui *modulo* è massimo quando i vettori di partenza sono ortogonali fra loro. Inoltre, ragionando ad esempio sulla regola della mano destra, si può vedere che il prodotto vettoriale non gode di proprietà commutativa, dato che $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (anzi, si tratta di un prodotto anticommutativo).

Spesso, quando sono note le componenti cartesiane dei vettori di partenza, conviene sfruttare una tecnica per il calcolo del vettore prodotto (meglio, delle sue componenti cartesiane) che si basa sullo scrivere una sorta di matrice 3×3 costruita in questo modo: la prima riga riporta i versori degli assi cartesiani (ad esempio $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, ⁹nella seconda si scrivono le componenti del primo vettore da moltiplicare, per intenderci a_X, a_Y, a_Z , e nella terza quelle del secondo vettore da moltiplicare, cioè b_X, b_Y, b_Z . A questo punto il vettore prodotto si trova, componente per componente, usando la stessa tecnica che si sfrutta per calcolare il determinante della matrice, cioè attraverso le cosiddette "matrici ridotte".

6.5.1 Esercizio: le componenti del prodotto vettoriale

Vediamo di applicare questo metodo al calcolo del prodotto vettoriale tra i vettori $\vec{a} = (a_X, a_Y, a_Z)$ e $\vec{b} = (b_X, b_Y, b_Z)$. Che direzione ha il prodotto $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ quando $a_X = a_Z = 0$? E quando $a_X = a_Y = a_Z = a$ e $b_X = b_Y = b_Z = b$?

Soluzione. Se applichiamo il metodo del determinante della matrice (provateci!), troviamo: $c_X = a_Y b_Z - a_Z b_Y$, $c_Y = -a_X b_Z + a_Z b_X$, $c_Z = a_X b_Y - a_Y b_X$. Dunque, nel primo dei due casi proposti si vede subito che $c_Y = 0$, ed infatti il vettore risultato, dovendo

⁸Talvolta il prodotto vettoriale si indica come $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

⁹I versori delle tre direzioni cartesiane si chiamano spesso anche $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

essere ortogonale a entrambi quelli di partenza, ed essendo \vec{a} parallelo all'asse Y , non può avere componenti lungo Y (starà su un piano ortogonale all'asse Y). Nel secondo caso si vede che $c_X = c_Y = c_Z = 0$, ed infatti i due vettori da moltiplicare sono paralleli fra loro e quindi il prodotto vettoriale è nullo.

6.5.2 Velocità angolare vettoriale

Trattando del moto circolare di un punto materiale¹⁰ abbiamo già introdotto le grandezze velocità ed accelerazione angolare, rispettivamente $\omega = d\theta/dt$ e $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$, dove con θ indichiamo la variabile angolare che parametrizza la posizione del punto. Già in quella sede annunciammo che, talvolta, conviene esprimere queste grandezze in *forma vettoriale*. In sostanza, si tratta di attribuire loro una direzione e un verso.

Siamo finalmente in grado di dare le precisazioni richieste. Diremo che, per un moto circolare, la direzione della velocità angolare (intesa come vettore) è *ortogonale* al piano dell'orbita ed il verso è positivo per una rotazione antioraria e negativo per una rotazione oraria (quando l'orbita viene vista "dall'alto"). Questa convenzione sul segno corrisponde ad un'altra formulazione della regola della mano destra: se immaginate di avere una vite e di avvitarla girando nel verso della rotazione del moto, allora il verso positivo è quello in cui la vite avanza (si avvita). Abbiamo così la possibilità di definire il vettore $\vec{\omega}$. Le stesse considerazioni, poi, potranno anche essere applicate per definire il vettore $\vec{\alpha}$, che infatti è formalmente definito come: $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$.

Avendo dato queste definizioni, è possibile dimostrare la seguente relazione che vale tra velocità angolare del punto, $\vec{\omega}$, velocità lineare (*tangenziale*), \vec{v} , e *raggio vettore*, \vec{r} (si tratta del vettore che parte dal centro dell'orbita e raggiunge la posizione istantaneamente occupata dal punto sull'orbita circolare): $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Ricordando che, per un'orbita circolare, raggio vettore e velocità tangenziale sono sempre ortogonali fra loro ed appartengono entrambi al piano dell'orbita, potete provare a verificare che questa espressione è coerente con la scelta dei segni che abbiamo stabilito e con l'espressione data per i moduli, che avevamo già scritto nella forma $v = \omega r$. Analogamente, detta \vec{a} l'accelerazione *tangenziale* (non la centripeta!) del punto, si ha $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$. Entrambe le affermazioni possono essere dedotte a partire dalla relazione tra variabile spostamento angolare del punto, $\Delta\theta$, e corrispondente spostamento lineare ΔS (cioè quello misurato in metri compiuti lungo la circonferenza), che recita, per i moduli: $\Delta S = \Delta\theta r$. Infatti, per trovare le relazioni che legano fra di loro velocità ed accelerazioni angolari e lineari basta operare di derivata rispetto al tempo, e, essendo il raggio dell'orbita r una costante (se il moto è circolare), si ottengono facilmente le espressioni appena scritte.

6.5.3 Esercizio: relazioni vettoriali tra versori

Che relazione esiste tra i versori di un sistema di assi cartesiani, cilindrici, sferici?

¹⁰Ponete attenzione sul fatto che il moto circolare di un corpo puntiforme è fenomeno diverso dalla rotazione di un corpo rigido, che è l'argomento principale di questi paragrafi; infatti il moto circolare di un punto può facilmente essere interpretato come un moto *traslatorio*.

Soluzione. Questo esercizio ha un carattere molto formale, dato che il suo obiettivo è quello di scrivere in modo compatto (e rigoroso) delle considerazioni che sono ben note e di uso comune. Consideriamo i versori di un sistema cartesiano, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, ovvero $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Avendo dato la definizione di prodotto vettoriale, e tenendo conto delle condizioni di ortogonalità tra assi, potremo scrivere: $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$, e anche, ad esempio, $\hat{x} = \hat{y} \times \hat{z}$, $\hat{y} = \hat{z} \times \hat{x}$;¹¹ sarà anche vero che, ad esempio, $\hat{y} = -\hat{x} \times \hat{z}$, oppure $\hat{z} = -\hat{y} \times \hat{x}$, e così via.

Per un sistema polare, usando la convenzione sui segni che abbiamo appena introdotto, sarà facile rendersi conto che si ha $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\theta}$, $\hat{r} = \hat{\theta} \times \hat{z}$ e così via, dove con $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}$ abbiamo indicato i versori delle direzioni rispettivamente radiale, tangenziale, assiale. Se il sistema è sferico avremo ad esempio $\hat{r} = \hat{\theta} \times \hat{\phi}$, dove $\hat{\phi}$ è il versore associato ad una variazione della coordinata angolare ϕ .

6.6 Momento di inerzia ed energia cinetica rotazionale

Scopo di questo paragrafo è quello di trovare la prima delle relazioni (o leggi, principi, teoremi che siano) che servono per esaminare il moto rotazionale. Vogliamo in pratica individuare l'“analogo” *rotazionale* della semplice espressione $E_K = (m/2)v^2$ che definisce l'energia cinetica *traslazionale* di un punto materiale (e che, con le debite considerazioni sul centro di massa, vale anche per l'energia cinetica traslazionale di un corpo rigido). L'espressione che andiamo cercando per l'energia cinetica sarà formalmente simile a quella appena scritta, ma dovrà contenere al posto della velocità (lineare, cioè traslazionale) v la velocità angolare ω che ci aspettiamo appaia al quadrato. Fosse altro che per ragioni dimensionali, il fattore moltiplicativo non potrà più essere la massa m del punto, ma dovremo individuare un'altra grandezza (scalare) caratteristica del corpo rigido e della sua rotazione attorno ad un dato asse.

Indicheremo tale grandezza, che si chiama **momento di inerzia** ed ha le dimensioni di una massa per una lunghezza al quadrato (unità di misura kg m^2), con il simbolo I . Per completezza accenniamo al fatto che, nei corsi di meccanica avanzata, si mostra come la definizione di momento di inerzia che useremo d'ora in poi si applichi a rigore solo a rotazioni che avvengono attorno a determinati assi del corpo (*assi principali*), che sono dotati di particolari proprietà di simmetria. Infatti, in generale il momento di inerzia di un corpo rigido è un *tensore* e nella sua definizione occorre tenere conto in modo opportuno della geometria del corpo che si sta considerando. Non intendiamo impelagarci in complicazioni matematico-geometriche, e quindi in questo capitolo faremo sempre riferimento a situazioni in cui il momento di inerzia può essere considerato come uno scalare. Nei casi di nostro interesse potremo scrivere:

$$E_{K,rot} = \frac{I}{2}\omega^2, \quad (6.9)$$

dove, aggiungendo il pedice *rot*, vogliamo sottolineare che si tratta di un'energia cinetica associata al (solo) moto di rotazione.

¹¹Stiamo operando delle “permutazioni cicliche” ai nomi degli assi X, Y, Z .

Il momento di inerzia di un corpo rigido *discreto* è definito come:

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \quad (6.10)$$

dove m_i è la massa elementare di ognuna delle masse puntiformi che costituiscono il corpo, ed r_i è la distanza tra l'elemento di massa i -esimo ed il *polo di rotazione*. Come esempio, esaminiamo il caso (limite) del punto materiale di massa m in rotazione circolare uniforme su un'orbita di raggio R . In questo caso $I = mR^2$ (la sommatoria ha un solo elemento!), ed $E_{K,rot} = (I/2)\omega^2 = (m/2)(\omega R)^2 = (m/2)v^2$, che è proprio l'energia cinetica del punto, come sapevamo perfettamente calcolare già dalla dinamica del punto. Infatti per questa situazione non c'è alcun bisogno di scomodare nuove definizioni, dato che, di fatto, un punto che si muove su un'orbita circolare compie un moto di traslazione.

Nel caso di un corpo rigido *continuo* dobbiamo "adattare" la definizione di Eq. 6.10 usando un ragionamento analogo a quello sviluppato nel par. 6.1, cioè immaginando di suddividere idealmente il sistema in tanti elementini di massa e scrivendo la sommatoria come un integrale (di massa o di volume):

$$I = \int_{massa} r^2 dm = \int_{volume} r^2 \rho_m dV. \quad (6.11)$$

Il momento di inerzia risulta a tutti gli effetti una *caratteristica del corpo*, indipendente dalla sua dinamica specifica ma dipendente dalla scelta del polo e dalla distribuzione di massa.

Vediamo di dimostrare che la definizione di Eq. 6.11 conduce all'espressione Eq. 6.9. Allo scopo, suddividiamo un corpo rigido in rotazione con velocità angolare ω attorno ad un qualche asse in tanti elementini di massa dm (e volume corrispondente dV , tale che, detta $\rho_m(\vec{r})$ la densità di massa del corpo, si ha $dm(\vec{r}) = \rho_m(\vec{r})dV$). Ognuno di questi elementini può essere considerato come un punto materiale di massa dm che sta compiendo un moto circolare con un certo raggio r *generico* attorno al polo di rotazione. Dunque, ogni elemento contribuisce all'energia cinetica con un termine infinitesimo $dE_K = (1/2)v^2 dm$, con v velocità *lineare* (tangenziale) di ogni elementino. Per l'energia cinetica totale del corpo possiamo scrivere, sempre ricordando il significato dell'operazione di integrazione: $E_K = (1/2) \int_{massa} v^2 dm = (1/2) \int_{volume} v^2 \rho_m dV$. Nel caso di moto circolare che stiamo considerando per ogni elemento di massa si ha $v = \omega r$, con, attenzione!, ω *uniforme* per tutto il corpo. Quindi possiamo scrivere: $E_K = (1/2) \int_{volume} v^2 \rho_m dV = (1/2)\omega^2 \int_{volume} r^2 \rho_m dV$, dove abbiamo sfruttato la costanza di ω rispetto alle variabili di integrazione, che ci consente di "portarla fuori" dal segno di integrale. A questo punto è facile notare che l'integrale ottenuto corrisponde proprio alla definizione di I , come volevamo mostrare. Questo vuol dire che l'energia cinetica del corpo in rotazione può essere correttamente espressa in funzione solo di I e di ω .

Sottolineiamo ancora che l'espressione di I contiene un'evidente dipendenza dalla scelta del polo di rotazione; infatti questa determina il valore che assume la variabile r^2 nell'integrale. In questo ambito vale la pena di citare una conseguenza del cosiddetto *teorema degli assi paralleli*. Supponiamo di conoscere il valore di I_{cm} , cioè del momento di inerzia rispetto ad un asse di rotazione che passa per il centro di massa del corpo rigido.

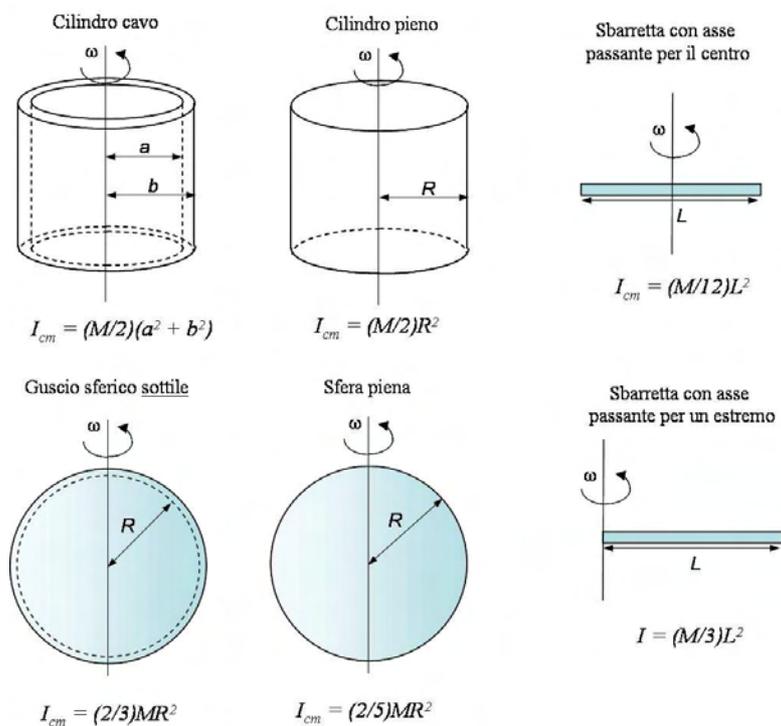


Figura 6.7: Momenti di inerzia calcolati per alcune geometrie solide comuni; tutti i corpi rigidi si intendono *omogenei* e dotati di massa M ; dove appare il pedice “ cm ”, si intende che il momento di inerzia è calcolato rispetto ad un polo coincidente con il centro di massa dei solidi considerati.

Proponiamoci ora di calcolare I rispetto ad un asse parallelo al primo, ma che si trova a distanza D . Usando una dimostrazione un po' complicata, che si trova sui testi di fisica, si ottiene $I = I_{cm} + MD^2$. Questa espressione può essere utile per calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse nel caso in cui se ne conosca il valore rispetto al centro di massa.

Il calcolo del momento di inerzia di un corpo rigido rappresenta in genere un importante elemento nella soluzione dei problemi di dinamica rotazionale; infatti, come vedremo nel seguito, il momento di inerzia ha un ruolo fondamentale non solo per determinare l'energia cinetica, ma anche per stabilire, ad esempio, l'accelerazione angolare, il momento angolare, la legge del moto di rotazione. Alcuni esempi di calcolo di momento di inerzia saranno discussi negli esercizi di questo capitolo. Per sistemi *omogenei* può far comodo fare riferimento alla Fig. 6.7 dove sono riportati i momenti di inerzia per alcune geometrie comuni.

6.6.1 Esercizio: momento di inerzia di un rotatore rigido

Avete due masse m puntiformi collegate da un'asta rigida di lunghezza L e massa trascurabile. Quanto vale il momento di inerzia I_{cm} per una rotazione attorno ad un asse ortog-

onale all'asta e passante per il centro di massa? E quanto vale il momento di inerzia I per una rotazione attorno ad un asse parallelo al precedente ma passante per la posizione di una delle due masse?

Soluzione. Si tratta evidentemente di un semplice corpo rigido *discreto*, fatto di due sole masse puntiformi. Il centro di massa si trova a metà dell'asta, per ragioni di simmetria, e quindi $I_{cm} = m(L/2)^2 + m(L/2)^2 = mL^2/2$. Per quanto riguarda il momento rispetto all'asse passante per una delle due masse, si può applicare il teorema degli assi paralleli, che dà $I = I_{cm} + MD^2 = mL^2/2 + (2m)(L/2)^2 = mL^2$. In alternativa, è facile rendersi conto che, scegliendo la posizione di una delle masse come polo, questa massa non dà contributo al momento di inerzia, che quindi è dato solamente da $I = mL^2$.

6.6.2 Esercizio: momento di inerzia di una sbarretta omogenea e disomogenea

Riprendiamo il sistema dell'Es. 6.2.2, cioè una sbarretta di massa m , lunghezza L e sezione S , e chiediamoci quanto vale il momento di inerzia per rotazioni attorno al centro di massa e attorno ad un asse passante per un estremo (ed ortogonale alla sbarretta). Ovviamente dobbiamo dare la risposta sia nel caso di sbarretta omogenea che disomogenea (con densità di massa che dipende linearmente dalla distanza da un estremo, che supponiamo sia quello per cui passa eventualmente l'asse di rotazione).

Soluzione. Vista la geometria del sistema, possiamo immaginare di fare la sbarretta in tante fettine, cioè calcolare gli integrali di volume richiesti per la determinazione del momento di inerzia usando l'elemento di volume $dV = Sdx$, dove X è la direzione dell'asse della sbarretta. Cominciamo con il momento di inerzia per rotazione attorno ad un estremo: essendo x la distanza dell'elementino dal polo, sarà $I = \int_0^L \rho_m x^2 S dx$. Nel caso di materiale omogeneo, $\rho_m = m/(SL)$, si ha $I = (m/(SL))S \int_0^L x^2 dx = (m/L)(L^3/3) = (m/3)L^2$. Per il caso disomogeneo, dove era $\rho_m = \rho_0 x/L$ con $\rho_0 = 2m/(SL)$, si ha $I = (\rho_0/L) \int_0^L x^3 S dx = (2m/L^2)(L^4/4) = (m/2)L^2$.

Per determinare il momento di inerzia rispetto a rotazioni attorno ad assi passanti per il centro di massa possiamo utilizzare il teorema degli assi paralleli; nel caso omogeneo il centro di massa si trova a metà lunghezza della sbarretta, per cui la distanza tra assi paralleli è $D = L/2$; il teorema permette allora di scrivere $I_{cm} = I - mD^2 = (m/3)L^2 - m(L^2/4) = (m/12)L^2$. Nel caso disomogeneo avevamo trovato nella soluzione dell'Es. 6.2.2 che il centro di massa si trovava a distanza $D = x_{cm} = (2/3)L$ dall'estremo, per cui $I_{cm} = (m/2)L^2 - m(2/3)^2 L^2 = (m/18)L^2$. Per ulteriore conferma possiamo provare a determinare per integrazione diretta il momento di inerzia I_{cm} nel caso omogeneo. Tenendo debitamente conto degli estremi di integrazione, si ha $I_{cm} = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_m x^2 S dx = (m/(SL))S \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = (m/L)((L^3/24) - (-(L^3/24))) = (m/12)L^2$, come si voleva dimostrare. Potete provare da soli a ritrovare il risultato di I_{cm} nel caso disomogeneo.

6.6.3 Esercizio: momento di inerzia di un cerchione di bicicletta

Un sottile cerchione di bicicletta (senza raggi, senza valvola, etc.) può essere modellato come un sottile guscio cilindrico omogeneo. Supponendo che il raggio del cerchione sia R e la sua massa sia M , quanto vale il momento di inerzia rispetto al centro (cioè per una rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano del cerchione e passante per il suo centro)?

Soluzione. Anche questo, grazie alle ipotesi fatte per costruire il modello, è un caso molto semplice da trattare. Infatti, poiché si suppone che il cerchione sia sottile, si ha che tutta la massa si trova alla stessa distanza rispetto al polo di rotazione, distanza che coincide con il raggio R . In pratica è come se, nel calcolare l'integrale di volume della definizione di I , l'integrando fosse diverso da zero solo su una circonferenza. Pertanto si può affermare che $I = MR^2$.

6.6.4 Esercizio: momento di inerzia di dischi omogenei e non

Un disco non è altro che un cilindro, di altezza (o spessore) generalmente piccola rispetto al raggio. Supponiamo di avere due dischi con lo stesso raggio R , massa M e spessore s ; supponiamo che il primo sia omogeneo e che il secondo abbia una densità di massa disuniforme dipendente solo dal raggio r , data dalla legge $\rho_{m,2}(r) = \rho_0 r/R$. Quanto valgono i momenti di inerzia I_{omo} e I_{dis} nei due casi? (Considerate sempre rotazioni attorno all'asse del disco)

Soluzione. Si tratta di sistemi a simmetria circolare (o cilindrica), dunque siamo in grado di determinarne il momento di inerzia attraverso il calcolo dell'integrale da eseguirsi usando le regole di par. 6.2. Per il primo disco, si ha $\rho_{m,1} = \text{costante}$, e quindi: $I_{omo} = \int_0^R \rho_{m,1} (2\pi sr) r^2 dr = \rho_{m,1} 2\pi s R^4 / 4$; ora, notate che la densità di massa, cioè la costante $\rho_{m,1}$ non è un dato del problema, visto che, invece, si conosce la massa M dei dischi. Per il disco omogeneo è immediato scrivere $\rho_{m,1} = M / (\pi R^2 s)$ (la quantità al denominatore è il volume del disco), per cui: $I_{omo} = (M/2)R^2$.

Nel caso disomogeneo si ha: $I_{dis} = \int_0^R \rho_{m,2} (2\pi sr) r^2 dr = \rho_0 2\pi (s/R) \int_0^R r^4 dr = \rho_0 2\pi s R^4 / 5$; anche qui il valore della costante ρ_0 non è un dato del problema, ma va espressa a partire dalla massa. Visto che il disco è disomogeneo, qui sarebbe errato fare come abbiamo fatto prima, cioè dividere tout court massa per volume; occorre invece risolvere l'integrale: $M = \int_{\text{volume}} \rho_{m,2} dV = \rho_0 2\pi (s/R) \int_0^R r^2 dr = \rho_0 2\pi s R^2 / 3$. Sostituendo nell'espressione di prima si ottiene $I_{dis} = (3/5)MR^2$. Confrontando i due risultati si ha $I_{dis} > I_{omo}$; questo è ragionevole, dato che, per come è distribuita la massa del disco disomogeneo, una maggiore quantità di massa si trova a maggiore distanza rispetto all'asse, facendo crescere il valore del momento di inerzia.

6.6.5 Bilancio energetico e moto rotazionale

L'espressione $E_{K,rot} = (I/2)\omega^2$ è un modo particolarmente pratico ed immediato per esprimere l'energia cinetica di un corpo in rotazione. Naturalmente se il corpo è dotato *anche* di un moto di traslazione del centro di massa (e vedremo in seguito alcuni esempi

significativi), allora l'energia totale, E_K conterrà contributi traslazionali e rotazionali che si sommano tra loro, essendo l'energia una *grandezza additiva* (scalare), cioè, ad esempio:

$$E_K = E_{K,rot} + E_{K,trasl} = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{M}{2}v_{cm}^2, \quad (6.12)$$

dove la rotazione è intesa attorno ad un asse passante per il centro di massa. Vedremo in seguito come, in molti casi di interesse, sia possibile scrivere le due velocità (rotazione, cioè angolare, e traslazione, cioè lineare) l'una in funzione dell'altra.

In generale, comunque, è ovvio che tutto quello che abbiamo stabilito nei precedenti capitoli a proposito dei concetti di bilancio energetico e conservazione dell'energia meccanica è ancora perfettamente valido. Detto \mathcal{L} il lavoro fatto da un operatore esterno sul sistema, e ΔU una variazione di energia potenziale (ad esempio gravitazionale, elastica, elettrica, o una somma di queste), avremo sempre $\mathcal{L} = \Delta E_K + \Delta U = \Delta E_{K,rot} + \Delta E_{K,trasl} + \Delta U$. Se il sistema è conservativo, si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U = \Delta E_{K,rot} + \Delta E_{K,trasl} + \Delta U$, cioè si conserva l'*energia meccanica* del sistema. Ci sono casi in cui anche $\Delta U = 0$, e allora $\Delta E_{K,rot} = -\Delta E_{K,trasl}$, cioè l'energia cinetica “si converte” da una “forma” all'altra.

6.6.6 Esercizio: lavoro per far ruotare un disco

Un gioco da luna park è costituito da un disco omogeneo orizzontale di massa $M = 5.0 \times 10^2$ kg e raggio $a = 5.0$ m che viene messo in movimento attorno al suo asse da un motore elettrico. Supponendo trascurabili gli attriti, quanto vale il lavoro \mathcal{L} che il motore deve compiere per mettere il disco in rotazione con un periodo $T = 2.5$ s? Come cambia il risultato se si suppone che, sul bordo del disco, si trovi una massa (puntiforme) $m = 100$ kg?

Soluzione. Per il bilancio energetico deve essere, per i moduli, $\mathcal{L} = E_{K,rot} = (I/2)\omega^2$. Per il disco omogeneo si ha, come abbiamo già avuto modo di dimostrare, $I = (M/2)a^2$; inoltre $\omega = 2\pi/T$, per cui $\mathcal{L} = (M/4)a^2(4\pi^2)/T^2 = \pi^2 M a^2 / T^2 = 4.9 \times 10^5$ J. In presenza della massa sul bordo del disco occorre considerare che essa contribuirà all'energia cinetica, e quindi al lavoro, con un termine $E_{K,massa} = (m/2)v^2 = (m/2)\omega^2 a^2$. In altre parole, in questa situazione il momento di inerzia *complessivo* del sistema può essere scritto come $I = I_{disco} + I_{massa} = (M/2)a^2 + ma^2$ (ed infatti la massa puntiforme si trova sempre a distanza a dal polo di rotazione).

6.6.7 Esercizio: la carrucola massiva

Problemi con pulegge dotate di massa sono molto frequenti e possono in genere essere risolti con gli strumenti presentati in questo capitolo. Qui ci occupiamo di un semplice caso che può essere interpretato attraverso principi di bilancio energetico. Supponiamo allora di avere il sistema di Fig. 6.8: una carrucola fissa è costituita da una puleggia sulla cui gola è avvolta una fune (inestensibile e di massa trascurabile). La puleggia, che in pratica è un disco, è vincolata, attraverso opportune staffe imperniate sul suo asse, ad un solaio rigido. Il ruolo del sistema di staffe è quello di non far cadere in terra la

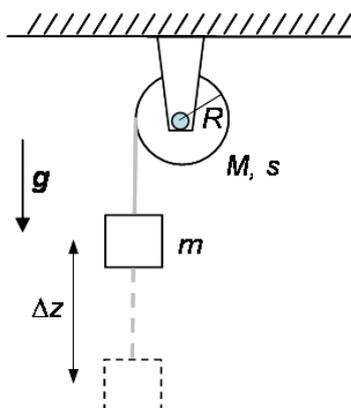


Figura 6.8: Rappresentazione schematica dell'esercizio con carrucola massiva riportato nel testo; gli elementi disegnati con linee tratteggiate si riferiscono alla situazione quando la massa è scesa per un tratto Δz .

puleggia, cioè, in pratica, di produrre e trasmettere delle forze di reazione vincolare che si oppongono alle altre forze (le forze peso) permettendo di avere *equilibrio traslazionale per il moto del centro di massa del disco* che rappresenta la puleggia. Immaginiamo ora che a un capo della fune sia attaccata una massa m (la puleggia si trova su un piano verticale), e che la puleggia sia un disco *omogeneo* di massa M , raggio R e spessore s che può ruotare *senza attrito* attorno al suo asse. Nelle condizioni del problema, la massa tende a scendere verso il basso e la puleggia tende a ruotare (in verso antiorario rispetto alla figura, ma il segno della velocità è qui irrilevante, comparando la velocità al quadrato nella definizione di energia cinetica). Se ad un certo istante la massa viene lasciata libera di muoversi con una velocità iniziale nulla, quanto vale la velocità angolare ω della puleggia quando la massa è scesa di un tratto Δz ? Nella soluzione supponete che la fune non scivoli sulla gola della puleggia.

Soluzione. È un classico esempio di conservazione dell'energia. In sostanza, durante la caduta della massa la fune “si srotola” e questo provoca una rotazione della puleggia. Dunque, l'energia potenziale gravitazionale si converte in energia cinetica, che serve sia per dare velocità (lineare, di traslazione) alla massa m , che per mettere in rotazione la puleggia (la quale rimane sempre in equilibrio traslazionale, cioè non cade!). Cominciamo con lo scrivere le “caratteristiche” della puleggia ai fini del moto rotazionale. In sostanza, trattandosi di un disco omogeneo, essa avrà un momento di inerzia $I = (M/2)R^2$ (il calcolo è stato fatto in Es. 6.6.4). La conservazione dell'energia meccanica permette di scrivere: $0 = \Delta E_K + \Delta U = (I/2)\omega^2 + (m/2)v^2 - mg\Delta z = (M/4)R^2\omega^2 + (m/2)v^2 - mg\Delta z$, dove abbiamo sfruttato le condizioni iniziali del problema (tutto è fermo all'inizio) e abbiamo ricordato come si esprime la variazione di energia potenziale gravitazionale (essa interessa solo la massa, dato che la fune ha massa trascurabile e la puleggia non trasla!).

L'equazione scritta contiene due incognite, ω e v . Un aspetto importante di questo problema è scrivere l'una in funzione dell'altra, obiettivo che può essere raggiunto basandosi solo su questioni di carattere “geometrico”. Infatti se il moto della puleggia è dovuto

allo srotolamento della fune, e se questo avviene senza coinvolgere slittamenti sulla gola della puleggia stessa, vuol dire che c'è un rapporto “uno a uno” tra i punti della fune che, istante per istante, si trovano a contatto con la puleggia e i punti della circonferenza della puleggia stessa. In altre parole, detto Δz lo spostamento verticale della massa e $\Delta\theta$ il corrispondente spostamento angolare della puleggia, che ha raggio R deve essere: $\Delta z = R\Delta\theta$. Lo stesso tipo di relazione esiste anche tra le velocità (e le accelerazioni). Infatti, formalmente, derivando rispetto al tempo entrambi i membri si ottiene: $v = R\omega$; derivando ancora, con ovvio significato dei simboli: $a = R\alpha$. Allora nel nostro problema, sostituendo $v = R\omega$ e rimaneggiando, si ottiene $mg\Delta z = \omega^2 R^2((M/4) + (m/2))$, da cui è facile ricavarsi $\omega = (4mg\Delta z / (R^2(M + 2m)))^{1/2}$ (scegliendo come positivo il verso della rotazione).

6.7 Rotolamento puro

In questo paragrafo esaminiamo con un po' di dettaglio un esempio dei problemi di moto combinato rotazionale e traslazionale che è così importante da essere il protagonista di un intero paragrafo. Si ha moto di **rotolamento puro** quando un corpo rigido ruota (e trasla!) senza strisciare su una superficie. Esempio tipico è quello di una ruota: tutti sapete che il moto di una ruota può avvenire senza coinvolgere strisciamento, o slittamento, sulla superficie, e tutti sapete che le condizioni di rotolamento dipendono dall'attrito tra ruota e strada (se la strada è ghiacciata, allora è difficile evitare lo slittamento!).

Supponiamo allora di avere un cilindro (il nostro modello di ruota, in questo caso) di raggio R e momento di inerzia I , poggiato su una superficie piana. Se si verifica rotolamento puro, allora la generatrice del cilindro che si trova a contatto con la superficie cambia istante per istante ma, istante per istante, essa è *ferma* rispetto alla superficie. Guardiamo ora al moto di traslazione del centro di massa (il centro geometrico) di questo cilindro; come è arcinoto, questo moto c'è, altrimenti la ruota non servirebbe a farci muovere! Se chiamiamo $\Delta\theta$ lo spostamento angolare della ruota e ΔS il corrispondente spostamento del centro di massa, è facile convincersi che deve valere la relazione $\Delta S = R\Delta\theta$. Possiamo per esempio ragionare come nell'Es. 6.6.7, e vedere che c'è rapporto uno a uno tra le generatrici e i punti di contatto sulla superficie, oppure possiamo individuare un punto sulla superficie del cilindro e metterne in relazione lo spostamento angolare con quello lineare, e quest'ultimo con lo spostamento del centro di massa. In ogni caso troviamo formalmente la stessa relazione vista per la carrucola che, derivata, ci dice che la velocità di traslazione del centro di massa, v_{cm} , è proporzionale alla velocità angolare della ruota: $v_{cm} = R\omega$. Questa affermazione, come nel caso precedente, risulta molto utile per la soluzione dei problemi.

Nel seguito di questo capitolo vedremo che relazione c'è tra forze e moto angolare. Qui ci limitiamo a far notare che la nostra osservazione di buon senso quotidiano su slittamento ed attrito suggerisce che la rotazione sia dovuta proprio alla forza di attrito che si crea tra generatrice del cilindro e superficie. Notate che, se c'è rotolamento puro, la generatrice è, istante per istante, ferma rispetto alla superficie, e di conseguenza l'attrito

che è coinvolto nel processo è di tipo *statico*. Allora, non essendoci spostamento, questo attrito *non produce lavoro* e possiamo usare i principi di conservazione energetica. D'altra parte l'invenzione della ruota deve la sua rilevanza proprio a questo aspetto: gli uomini primitivi sapevano che è impossibile evitare l'attrito (e molto difficile renderlo trascurabile) e trovarono il modo per evitare che l'attrito facesse un lavoro dissipativo pur in presenza di spostamento.

6.7.1 Esercizio: barattoli su piano inclinato

Supponete di avere un piano inclinato, di altezza h ed angolo θ rispetto all'orizzontale, ed un barattolo approssimabile come un cilindro di raggio R , momento di inerzia (rispetto all'asse) I e massa M . Il barattolo viene lasciato andare con velocità iniziale nulla dalla sommità del piano inclinato. Quanto vale la velocità che esso ha alla base del piano nel caso in cui questo sia senza attrito (v_{str}) oppure abbia attrito sufficiente a garantire *rotolamento puro* (v_{rot})?

Soluzione. Il caso senza attrito sappiamo risolverlo assai bene usando gli approcci elaborati per il punto materiale: infatti, se non c'è attrito (e il corpo parte da fermo) non può esserci nessun rotolamento, e il corpo è modellabile con un punto materiale di massa M . La conservazione dell'energia meccanica ci dice allora che: $0 = \Delta U + \Delta E_K = -Mgh + (M/2)v_{str}^2$, da cui $v_{str} = (2gh)^{1/2}$. Se supponiamo rotolamento puro, allora, come già chiarito, la conservazione dell'energia meccanica continua a valere, perché l'attrito *non fa lavoro*. Però dovremo in questo caso tenere in debito conto della rotazione, cioè della presenza del termine rotazionale nell'energia cinetica. Scriveremo allora: $0 = \Delta U + \Delta E_{K,trasl} + \Delta E_{K,rot} = -Mgh + (M/2)v_{rot}^2 + (I/2)\omega^2$. In questa espressione è chiaro che v_{rot} è la *velocità del centro di massa* del cilindro che sta ruotando con velocità angolare ω e, poiché il rotolamento è puro, avremo $\omega = v_{rot}/R$. Sostituendo e riarrangiando otteniamo $v_{rot} = (2Mgh/(M + I/R^2))^{1/2}$; questo valore è minore di quello che si ha per il moto senza attrito dato che parte dell'energia potenziale è finita in energia cinetica di rotazione, che prima non c'era.

6.8 Momento delle forze

In questo paragrafo ci chiediamo quale sia la “causa fisica” che provoca un moto di rotazione, cercando di trovare analogie con la descrizione che ci ha permesso di individuare nelle forze la causa fisica del moto di traslazione (dinamica del punto, principio di Newton). Partiamo da qualche considerazione intuitiva: noi abbiamo molto spesso a che fare con moti di rotazione, ad esempio quando dobbiamo aprire una porta. Notate che in questo caso il moto è solo di rotazione, dato che i cardini della porta stessa costituiscono un sistema che *vincola* il moto del sistema ad essere *solo* di rotazione attorno all'asse, *assegnato*, dei cardini stessi. In altre parole, i cardini esercitano delle reazioni vincolari che annullano gli effetti traslazionali di qualsiasi forza applicata (almeno finché non applicate forze eccessive, che possono svellere la porta dai cardini e donarle un moto di traslazione!).

L'evidenza sperimentale quotidiana vi dice che per aprire "efficientemente" una porta dovete applicare una forza "ad una certa distanza" dai cardini, meglio se con "un certo angolo". In altre parole, se spingete sui cardini la porta non si apre, e la porta non si apre neanche se la vostra forza la applicate distante dai cardini, ma con una direzione che punta ai cardini stessi. Questi sono chiari indizi che, quando si tratta di rotazione di corpi rigidi (la porta lo è con ottima approssimazione), conta andare a vedere *dove* si applicano le forze, cioè il *punto di applicazione* del vettore forza, oltre a considerare la sua direzione e verso.

In effetti, la causa fisica del moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un certo asse è il **momento delle forze**, definito come prodotto vettore:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (6.13)$$

dove \vec{r} è un vettore che parte dal *polo di rotazione* (lo abbiamo già definito) e arriva al *punto di applicazione* della forza \vec{F} . Precisiamo subito che, come al solito, se di forze ne abbiamo più di una, allora potremo avere sul corpo rigido un momento risultante, o totale, che è la *somma vettoriale* dei singoli momenti $\vec{\tau}_i$, cioè $\vec{\tau}_{tot} = \Sigma \vec{\tau}_i$. Le dimensioni del momento delle forze sono quelle di una forza per uno spostamento; all'unità di misura non si dà nessun nome particolare, e quindi si usa per il momento delle forze l'unità N m.¹²

Risultando da un prodotto vettoriale, il momento delle forze ha sempre direzione *ortogonale* a quelle della forza e del vettore \vec{r} definito sopra; il suo verso si trova applicando la regola della mano destra. Il suo modulo può essere espresso come: $\tau = rF \sin \theta$, dove θ è l'angolo compreso tra le direzioni di \vec{r} e \vec{F} . Questo modo di esprimere il modulo di $\vec{\tau}$ rende ragione delle nostre osservazioni a proposito dell'apertura della porta: in sostanza, l'operazione è più efficiente quando applichiamo la forza lontano dai cardini (r è più grande) e quando la applichiamo in direzione ortogonale alla congiungente tra cardini e punto di applicazione (θ vale in questo caso 90 gradi e $\sin \theta = 1$).

Dal punto di vista geometrico, come vi potete rendere facilmente osservando lo schizzo di Fig. 6.9, il prodotto $r \sin \theta$ può essere interpretato come la *distanza tra la retta di applicazione della forza e il polo di rotazione*, dove per *retta di applicazione* di una forza intendiamo la retta a cui appartiene il vettore forza considerato. A questa grandezza si dà spesso il nome di **braccio della forza** e allora si può affermare che il modulo del momento è pari al *prodotto di modulo della forza per il suo braccio*.

6.8.1 Esercizio: la porta

Avete una bella porta larga L ed applicate una forza di modulo F in diversi punti e con diverse orientazioni, come mostrato in Fig. 6.10. In particolare nel caso 1 la forza è ortogonale alla faccia della porta ed applicata all'estremo opposto rispetto ai cardini, nel caso 2 la forza è parallela alla faccia della porta ed applicata sempre all'estremo opposto

¹²Osservate che momento delle forze e lavoro hanno le stesse dimensioni, ma non condividono la stessa unità di misura.

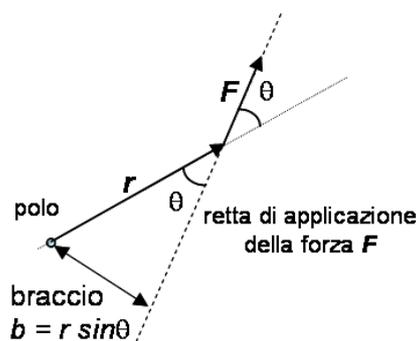


Figura 6.9: Disegno schematico rilevante per la definizione di **braccio** di una forza.

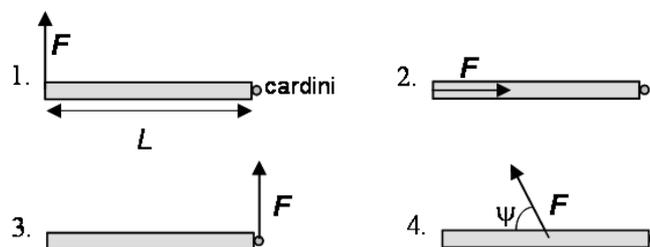


Figura 6.10: Rappresentazione schematica delle situazioni fisiche considerate nell'esercizio con la porta discusso nel testo.

ai cardini, nel caso 3 la forza è ortogonale alla faccia della porta ed applicata sui cardini e nel caso 4 la forza è applicata “in mezzo” e con un angolo ψ rispetto alla faccia della porta. Quanto vale il momento della forza nei vari casi, calcolato rispetto ai cardini? Quanto valgono le forze di reazione che i cardini esercitano sulla porta?

Soluzione. Osserviamo la porta dall'alto: vedremo un segmento di lunghezza L vincolato a ruotare attorno all'asse dei cardini. Applichiamo la definizione di momento. Vedremo che in tutti i casi il momento ha direzione ortogonale al piano della figura, e segno coerente con la regola della mano destra (entrante nel foglio in Fig. 6.10). Calcoliamo il modulo del momento. Nel caso 1, $r = L$ e $\sin \theta = 1$, per cui $\tau_1 = LF$. Nel caso 2, $r = L$, ma $\sin \theta = 0$, per cui $\tau_2 = 0$ (potete facilmente rendervi conto che il *braccio della forza* è nullo, anche se $r \neq 0$!). Nel caso 3, $r = 0$ e $\sin \theta = 1$, per cui ancora $\tau_3 = 0$. Infine nel caso 4 $r = L/2$ e $\sin \theta = \sin \psi$, per cui $\tau_4 = (L/2) \sin \psi < \tau_1$.

Notate che il fatto che $\tau_3 = 0$ ci fa capire che qualsiasi forza applicata ai cardini dà sicuramente momento nullo. In effetti, sui cardini agiranno in tutti e quattro i casi delle forze di reazione vincolare \vec{N} che sicuramente devono esistere per inibire il moto di traslazione della porta. Vettorialmente sarà quindi $0 = \vec{N} + \vec{F}$. Essendo applicate al polo, queste forze *non producono alcun momento*; in altre parole esse garantiscono l'equilibrio *equilibrato traslazionale* della porta ma non giocano alcun ruolo nella dinamica di rotazione.

6.9 Equazione del moto di rotazione

Come suggerisce il semplice esempio della porta, è evidente che *il momento delle forze è la causa fisica del moto di rotazione*. Nella nostra analogia concettuale con il moto del punto materiale, dove la legge del moto è quella di Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, abbiamo trovato la grandezza da mettere al primo membro: possiamo infatti intuitivamente supporre di scrivere il momento delle forze $\vec{\tau}$ al posto della forza \vec{F} . Di sicuro, inoltre, al secondo membro al posto dell'accelerazione \vec{a} , che è lineare e si riferisce al moto di traslazione, potremo usare un'accelerazione angolare (presa come vettore), $\vec{\alpha}$. Infine sappiamo già che le caratteristiche del corpo (l'analogo della massa per il caso traslazionale) possono essere racchiuse nel momento di inerzia I . Allora, sulla base di queste semplici ed intuitive motivazioni, possiamo scrivere l'**equazione del moto rotazionale**, detta anche **seconda equazione cardinale**, come:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}, \quad (6.14)$$

dove si intende che momento delle forze e momento di inerzia devono essere riferiti *allo stesso polo*. In accordo con quanto affermato nel par. 6.6, è bene precisare che l'espressione appena scritta vale a rigore solo per i casi in cui la rotazione avviene attorno ad uno degli *assi principali* del corpo rigido; la notazione corretta prevederebbe l'uso del tensore di inerzia, cosa che qui vogliamo assolutamente evitare!

L'Eq. 6.14 permette in linea di principio di determinare l'accelerazione angolare una volta che siano noti il momento delle forze (ovvero *la risultante* dei momenti delle forze, se ce ne è più di uno) e le caratteristiche del corpo, cioè il suo momento di inerzia. Per esempio, se il momento delle forze (totale) è nullo, allora $\alpha = 0$, cioè siamo in condizioni di *equilibrio rotazionale*, ovvero ci troviamo di fronte a problemi di *statica rotazionale* del corpo rigido. Questi problemi possono essere particolarmente interessanti per corpi rigidi imperniati cioè vincolati a ruotare attorno ad un asse assegnato. Altrimenti questa equazione prende il ruolo che il principio di Newton aveva per il punto materiale, consentendo di derivare (in linea di principio) le *leggi orarie* per lo spostamento e la velocità angolari di un corpo.

A questo punto possiamo concludere che abbiamo sviluppato gli strumenti necessari per analizzare il moto generico di un corpo rigido; infatti nel caso in cui questo non sia vincolato, cioè nel caso di compresenza di moto traslazionale e rotazionale, potremo suddividere la descrizione nella combinazione di una traslazione del centro di massa, regolata dalla *prima* equazione cardinale, e di una rotazione per un asse (la cui posizione cambia nel tempo!) passante attraverso il centro di massa, regolata dalla *seconda* equazione cardinale.

6.9.1 Esercizio: il ponte levatoio

Cominciamo con qualche esempio di statica di corpi imperniati. Consideriamo il ponte levatoio di un castello, e supponiamo di poterlo schematizzare come in Fig. 6.11: una sottile trave omogenea di legno, di lunghezza $L = 4.0$ m e massa $M = 180$ kg, imperniata ad un suo estremo in modo che il suo movimento possa avvenire con attriti trascurabili.

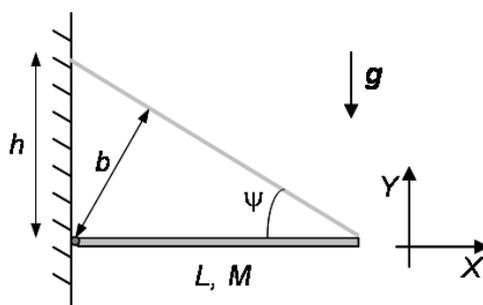


Figura 6.11: Rappresentazione schematica del ponte levatoio discusso nel testo con indicazione del sistema di coordinate cartesiane impiegato nella soluzione.

L'altro estremo della trave è attaccato alla parete (rigida) del castello tramite una fune (inestensibile e di massa trascurabile); il punto di attacco della fune alla parete si trova sulla verticale del perno della trave, ad una distanza $h = 3.0$ m da questo. Il sistema è in equilibrio con la trave in direzione orizzontale: quanto vale, in modulo, la tensione T della fune? Quanto vale la reazione vincolare \vec{N} esercitata dal perno sulla trave?

Soluzione. L'esercizio propone una situazione di equilibrio sia rotazionale (la trave non ruota) che traslazionale (la trave non cade verso il basso, né trasla in alcuna direzione). Per determinare la tensione della fune è sufficiente considerare l'equilibrio rotazionale, cioè imporre che la somma (vettoriale) dei momenti delle forze agenti sulla trave e calcolati rispetto al perno sia nulla. Le forze che hanno un momento non nullo sono: la tensione della fune, applicata all'estremo con un certo angolo, e la forza peso, applicata al centro di massa della trave e diretta verticalmente. È facile verificare che questi due momenti di forze hanno la stessa direzione (ortogonale al piano del foglio) ma verso opposto, dato che tensione della fune e forza peso tenderebbero a far ruotare in versi opposti la trave. Dunque per determinare l'equilibrio basta uguagliare i *moduli* dei due momenti. Per il calcolo occorre osservare che, essendo la trave omogenea, il suo centro di massa si trova a distanza $L/2$ dal perno, e quindi il braccio della forza peso, che è verticale, cioè ortogonale alla trave, è pari semplicemente a $L/2$, cioè il modulo del momento della forza peso vale $MgL/2$. Il braccio della tensione della fune, invece, è $b = L \sin \psi$, con ψ indicato in figura, per cui il momento della tensione si scrive $TL \sin \psi$; semplici considerazioni geometriche ci portano subito a concludere che $\sin \psi = h/(h^2 + L^2)^{1/2}$. Uguagliando i due momenti si ottiene $T = Mg(h^2 + L^2)^{1/2}/(2h) = 2.9 \times 10^3$ N.

Vediamo ora le condizioni di equilibrio traslazionale: le forze che agiscono sulla trave sono la forza peso $M\vec{g}$, la tensione della fune \vec{T} e la forza \vec{N} che il perno esercita sulla trave. Queste forze sono applicate in punti diversi, ma questo è irrilevante in questo contesto. Deve quindi verificarsi: $0 = M\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$. Usando il sistema di riferimento indicato in figura, si ottiene: $N_X = T \cos \psi = TL/(h^2 + L^2)^{1/2} = MgL/(2h) = 1.2 \times 10^3$ N, $N_Y = Mg - T \sin \psi = Mg/2 = 8.8 \times 10^2$ N. Come si vede dal risultato, la reazione del perno ha una direzione che non coincide con alcuno degli assi di riferimento indicati in figura.

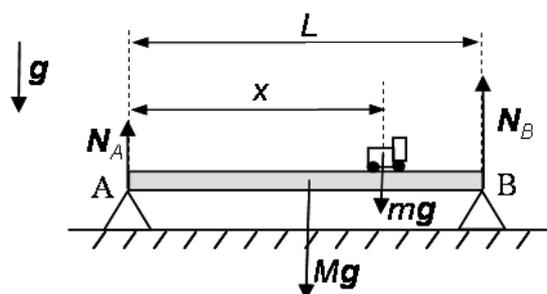


Figura 6.12: Rappresentazione schematica del ponte poggiato su due punti (con camion) discusso nel testo con indicazione delle forze rilevanti per la soluzione dell'esercizio.

6.9.2 Esercizio: ponte levatoio che crolla

Riprendiamo la situazione dell'Es. 6.9.1 e supponiamo stavolta che all'estremità del ponte (quella opposta al perno) si trovi appoggiata una massa puntiforme m . Ad un dato istante la fune si rompe in modo istantaneo e la trave comincia a ruotare e la massa a cadere verso il basso. Quanto vale, *subito dopo* la rottura della fune, l'accelerazione angolare α con cui la trave comincia a ruotare? La massa rimane a contatto con la trave?

Soluzione. La seconda equazione cardinale stabilisce che $\alpha = \tau/I$; se consideriamo il sistema composto da trave e massa, potremo immediatamente scrivere $\tau = Mg(L/2) + mgL$ e $I = (M/3)L^2 + mL^2$, dove abbiamo approssimato la trave con una sbarra omogenea, usato di conseguenza il risultato dell'Es. 6.6.2 e considerato il momento di inerzia della massa come mL^2 (dalla definizione di momento di inerzia!). Pertanto $\alpha = (g/L)((M/2) + m)/((M/3) + m)$ rappresenta l'accelerazione angolare che la trave acquista nell'istante in cui la fune si rompe. A questo istante l'estremità della trave si muoverà con un'accelerazione a diretta verso il basso e di modulo $a = \alpha L = g((M/2) + m)/((M/3) + m)$, dove abbiamo sfruttato la relazione tra grandezze angolari e lineari già incontrata più volte in precedenza. Una rapida ispezione matematica mostra che $a > g$, cioè l'estremo della trave comincia a muoversi con un'accelerazione maggiore di quella di gravità. La massa puntiforme, che invece cade come un grave, cioè con accelerazione pari a g , perderà il contatto con la trave.

6.9.3 Esercizio: ponte che non crolla

Schematizzate un ponte (fisso, non levatoio) come una trave omogenea di massa M e lunghezza L poggiata alle sue estremità su due supporti fissi al suolo, come schematizzato in Fig. 6.12. Per semplificare la trattazione, immaginate che i due punti di appoggio, indicati con "A" e "B" in figura, siano "puntiformi" (potrete vedere nei vostri studi futuri come ci si può comportare in casi più realistici). Quanto valgono, all'equilibrio, i moduli delle reazioni vincolari N_A e N_B esercitati dagli appoggi sulla trave? Come cambia la risposta se si suppone che un camion di massa m (cioè un corpo puntiforme...) si trovi sul ponte a distanza x dall'estremo "A"?

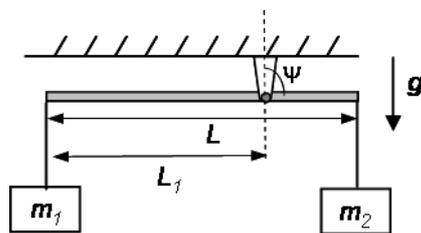


Figura 6.13: Rappresentazione schematica della stadera descritta nel testo.

Soluzione. L'equilibrio deve essere sia traslazionale che rotazionale. Per la traslazione deve essere, per i moduli, $Mg = N_A + N_B$ (ovvero $(M + m)g = N_A + N_B$, nel caso ci sia il camion). Per esaminare la rotazione, non avendo vincoli assegnati, siamo liberi di scegliere il polo in modo opportuno. Potremmo considerare le rotazioni rispetto al centro di massa, ma questo non è strettamente richiesto, dato che stiamo considerando un caso statico (l'equilibrio deve essere tale per qualsiasi scelta del polo!). Allora consideriamo le rotazioni rispetto al punto "A"; per l'equilibrio devono annullarsi i momenti delle forze rispetto a questo punto. Forze che fanno un momento non nullo sono solo la forza peso (applicata al centro di massa della trave, che si trova a distanza $L/2$ dagli estremi dato che la trave è omogenea) e la reazione vincolare al punto "B". Possiamo allora scrivere, per i moduli: $Mg(L/2) = N_B L$, da cui $N_B = Mg/2$ e $N_A = Mg - N_B = Mg/2 = N_B$ (potevamo intuire questo risultato considerando la "simmetria" del problema). In presenza del camion avremo invece $Mg(L/2) + mgx = N_B L$, da cui $N_B = Mg/2 + mgx/L$ e $N_A = (M + m)g - N_B = Mg/2 - mgx/L$.

6.9.4 Esercizio: la stadera (una leva!)

Una stadera, che, come tutti sapete, è un tipo di bilancia per la misura dei pesi, è fatta con una sottile asta omogenea e rigida di lunghezza L e massa trascurabile. Attraverso un giogo fissato ad un solaio rigido, questa asta è impernata (in questo ambito si dice spesso "*infulcrata*") in modo da ruotare con attrito trascurabile su un piano verticale, come rappresentato in Fig. 6.13; il *fulcro* si trova ad una distanza $L_1 = (3/4)L$ rispetto ad uno dei suoi estremi, al quale viene applicata la massa (incognita) m_1 . Si osserva che per ottenere equilibrio occorre porre una massa m_2 all'altro estremo. Che relazione deve esistere tra m_1 ed m_2 ?

Soluzione. Si tratta di un semplicissimo problema che rientra nella casistica delle cosiddette *leve meccaniche*, argomento dei vostri studi passati. L'equilibrio richiesto è ovviamente quello rotazionale, dato che la statica traslazionale del sistema è garantita dalla reazione vincolare esercitata sul fulcro (reazione che "proviene" dal solaio). La rotazione di cui ci occupiamo deve avvenire attorno al fulcro e i momenti delle forze rilevanti per il problema sono quelli dovuti alle due forze peso, $m_1\vec{g}$ ed $m_2\vec{g}$; questi due momenti hanno la stessa direzione ma versi opposti, per cui, detti b_1 e b_2 i bracci delle due forze, deve essere per i moduli: $m_1 b_1 g = m_2 b_2 g$, cioè $m_1/m_2 = b_2/b_1$. I bracci dipendono dalle distanze L_1 e $L_2 = L - L_1$ e dal seno dell'angolo ψ compreso tra asta e direzione

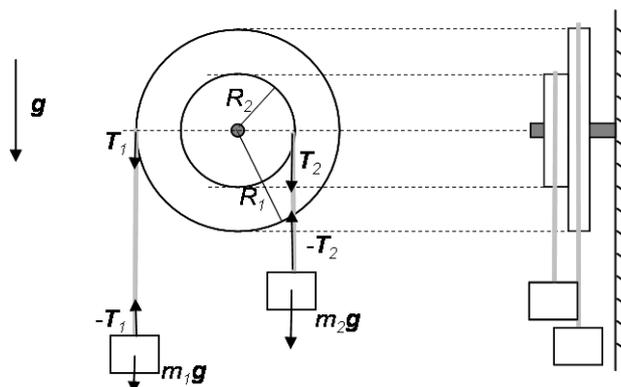


Figura 6.14: Visione “frontale” e “laterale” dell’esercizio della puleggia a doppio raggio descritta nel testo; la situazione rappresentata, incluso il diagramma delle forze rilevanti, si riferisce alle condizioni di equilibrio.

verticale; in generale, infatti, sarà $b_1 = L_1 \sin \psi$ e $b_2 = L_2 \sin \psi$. Notate, però, che la condizione di equilibrio è indipendente dal valore dell’angolo (la stessa espressione $\sin \psi$ compare ai due membri dell’uguaglianza tra moduli dei momenti); infatti nell’uso della stadera si cerca l’equilibrio per $\psi = \pi/2$, cioè per asta in direzione orizzontale. In queste condizioni è immediato dimostrare che $m_1/m_2 = L_2/L_1$.

6.9.5 Esercizio: equilibrio della puleggia “a doppio raggio”

Avete una puleggia “a doppio raggio”, cioè, in pratica, due dischi omogenei di raggio R_1 ed R_2 e massa M_1 ed M_2 incollati l’uno sopra all’altro in modo che gli assi siano coincidenti, come rappresentato schematicamente in Fig. 6.14. L’asse (comune) delle due pulegge è imperniato ad una parete verticale in modo che il sistema possa ruotare con attrito trascurabile. Attorno ai due dischi sono avvolte due funi (inestensibili e di massa trascurabile) che non slittano sulle superfici; le due funi terminano con due masse, m_1 ed m_2 . Che rapporto deve esistere fra le grandezze del problema affinché si abbia equilibrio? Supponete ora che la massa m_1 assuma il doppio del valore necessario per avere equilibrio (in pratica con una magia ne cambiate istantaneamente il peso). Il sistema perde le condizioni di equilibrio e la massa m_1 comincia a scendere verso il basso: quanto valgono, in modulo, le accelerazioni a_1 ed a_2 delle due masse? Quanto vale la velocità v_1 acquistata dalla massa m_1 dopo che questa è scesa verso il basso di un tratto Δ_1 ?

Soluzione. L’equilibrio ricercato riguarda chiaramente la rotazione del sistema dei due dischi; infatti l’equilibrio traslazionale è garantito dal perno, cioè dalle forze di reazione che questo esercita sul sistema dei due dischi. Le uniche forze che hanno momento non nullo rispetto all’asse di rotazione sono le tensioni delle funi \vec{T}_1 e \vec{T}_2 , che, supponendo che le funi non slittino, si intendono applicate ai punti di contatto tra funi e superfici laterali dei dischi. Le direzioni delle tensioni coincidono con quelle delle funi, e pertanto i bracci delle due forze sono pari al raggio dei dischi, cioè si ha: $b_1 = R_1$ e $b_2 = R_2$. Inoltre la geometria del sistema mostra che i versi dei momenti che queste forze generano rispetto

all'asse di rotazione sono opposti fra loro. Pertanto per ottenere equilibrio è sufficiente uguagliare i moduli dei momenti, cioè: $T_1 b_1 = T_2 b_2$, ovvero $T_1 R_1 = T_2 R_2$. Andiamo a considerare le masse appese: se la puleggia è in equilibrio rotazionale, le funi sono ferme (non si "srotolano" nè si "arrotolano" sui dischi), e quindi anche le masse sono ferme, cioè sono in condizioni di equilibrio traslazionale. Di conseguenza deve essere, per i moduli, $T_1 = m_1 g$ e $T_2 = m_2 g$. Sostituendo si trova la seguente relazione: $m_1/m_2 = R_2/R_1$; questa relazione è dello stesso tipo di quella che si trova per alcuni tipi di leve meccaniche, ad esempio la stadera di cui abbiamo discusso nell'Es. 6.9.4.

Esaminiamo ora la dinamica del sistema quando la massa m_1 assume un valore doppio rispetto a quello di equilibrio. Come affermato nel testo, in queste condizioni la massa m_1 si muove verso il basso: la massa m_2 , allora, si sposterà verso l'alto e la puleggia a doppio raggio ruoterà (in verso antiorario se il disegno è quello di figura). Essendo la puleggia massiva, essa avrà un momento di inerzia complessivo che si può determinare *sommando* i momenti di inerzia dei due dischi omogenei (vedi Es. 6.6.4) che la compongono: $I = I_1 + I_2 = (M_1/2)R_1^2 + (M_2/2)R_2^2$. Detta α l'accelerazione angolare della puleggia, la seconda equazione cardinale ci permetterà di scrivere: $\alpha = (T_1 R_1 - T_2 R_2)/I$, dove abbiamo usato un segno negativo per indicare che il momento della tensione \vec{T}_2 provoca una rotazione in verso opposto (orario in figura) rispetto a quella generata da \vec{T}_1 (antiorario in figura). Le masse, invece, si muoveranno di moto traslatorio (in direzione verticale) secondo le due equazioni del moto: $a_1 = g - T_1/m_1$; $a_2 = g - T_2/m_2$, dove la scelta dei segni indica che l'accelerazione positiva è diretta verso il basso (per tutte e due le masse!). Cerchiamo le relazioni (geometriche) che legano le accelerazioni fra loro: se non c'è slittamento delle funi dovrà essere $a_1 = \alpha R_1$ e $a_2 = -\alpha R_2$ (il segno tiene conto delle nostre convenzioni). Usando queste relazioni otteniamo un sistema algebrico di tre equazioni per le incognite α , T_1 e T_2 . Risolvendo per α si ottiene, dopo un po' di manipolazioni algebriche: $\alpha = g(m_1 R_1 - m_2 R_2)/(I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$; di conseguenza: $a_1 = g R_1 (m_1 R_1 - m_2 R_2)/(I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$ e $a_2 = -g R_2 (m_1 R_1 - m_2 R_2)/(I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$, da cui si nota che l'accelerazione non è la stessa per le due masse, ma si ha $a_1/a_2 = -R_1/R_2$. Per definire ulteriormente la risposta possiamo tenere conto della condizione specificata nel testo, cioè che la massa m_1 ha un valore doppio rispetto a quella della situazione di equilibrio. Per l'equilibrio doveva essere $m_{1,eq} = m_2 R_2/R_1$ (risultato confermato anche da una rapida ispezione delle espressioni che abbiamo appena trovato per le accelerazioni, le quali giustamente si annullano per $m_1 = m_{1,eq}$), per cui avremo: $m_1 = 2m_2 R_2/R_1$. Sostituendo questa espressione nei risultati trovati prima si ha: $a_1 = g R_1 (m_2 R_2)/(I + m_2 R_2 (2R_1 + R_2))$; $a_2 = -a_1 R_1/R_2$.

Le accelerazioni trovate non dipendono dal tempo, per cui i moti sono uniformemente accelerati; questa osservazione, unita ad una corretta espressione delle leggi orarie di spostamento e velocità, può essere impiegata per determinare la velocità assunta dalla massa m_1 come richiesto nel testo dell'esercizio. Tuttavia una strada più efficiente per raggiungere lo stesso risultato è offerta dalla conservazione dell'energia meccanica (non ci sono attriti!). Possiamo infatti scrivere, con ovvio significato dei termini: $0 = \Delta E_K + \Delta U_g = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 + (I/2)\omega^2 - m_1 g \Delta_1 - m_2 g \Delta_2$, dove abbiamo espresso con Δ_2 la variazione di quota della massa m_2 . Per la soluzione occorre legare fra loro le velocità, che saranno tra loro nello stesso rapporto delle accelerazioni. Avremo quindi

$v_1 = \omega R_1$ e $v_2 = -\omega R_2$; inoltre simili ragioni di tipo geometrico ci suggeriscono che $\Delta_2 = -\Delta_1 R_2/R_1$ (notate il segno negativo ad indicare che la massa m_2 sale quando la massa m_1 scende). Si ottiene infine $v_1 = R_1(g\Delta_1(m_1 R_1 - m_2 R_2)/(R_1(I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)))^{1/2}$. Impiegando la relazione determinata sopra a partire dal valore della massa $m_{1,eq}$ si ha: $v_1 = (g\Delta_1 m_2 R_1 R_2/(I + m_2 R_2(2R_1 + R_2)))^{1/2}$.

6.9.6 Esercizio: la porta bis

Stessa situazione dell'Es. 6.8.1, caso 1. Sapendo che il momento di inerzia della porta vale I (per rotazioni attorno ad un asse passante per i cardini), quanto vale l'accelerazione angolare α ?

Soluzione. Questo è un caso di corpo vincolato a ruotare attorno ad un asse. Dunque, non c'è moto traslazionale dato che i cardini esercitano sulla porta una forza uguale ed opposta a quella applicata esternamente, permettendo di avere equilibrio. Si trova immediatamente $\alpha = \tau_1/I = LF/I$. Notate che questo è il valore che l'accelerazione ha nell'istante in cui la forza ha modulo F ed è applicata con braccio L rispetto ai cardini. Per intenderci, se immaginate di continuare ad applicare la forza con la stessa direzione e allo stesso punto della porta, l'accelerazione angolare cambia con il tempo, dato che il momento della forza *non* è costante. Infatti, nel corso della rotazione, si ha che l'angolo θ cambia per effetto della rotazione stessa, come vedremo nel prossimo esercizio.

6.9.7 Esercizio: la porta ter

Stavolta la domanda è: sapendo che viene continuamente (anche durante la rotazione) applicata alla porta una forza \vec{F} costante (in senso vettoriale!) all'estremo della porta, cioè a distanza L dai cardini, e che tale forza inizialmente forma un angolo $\psi = \pi/2$ rispetto alla faccia della porta (come nel caso 1 di Es. 6.8.1), cosa si può dire sulla legge oraria del moto di rotazione, cioè sulla funzione del tempo $\psi(t)$ (angolo definito in Fig. 6.10)? Per la soluzione tenete conto che la porta parte da ferma all'istante $t_0 = 0$, quando si ha $\psi_0 = \pi/2$, ed indicate con I il momento di inerzia della porta.

Soluzione. Per rispondere alla domanda dell'esercizio dobbiamo proprio cercare di risolvere l'equazione del moto angolare, cioè di rotazione. L'equazione del moto da risolvere è, secondo quanto stabilisce la seconda equazione cardinale: $\alpha(t) = \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = (FL \sin \psi(t))/I$. Questa equazione differenziale del secondo ordine non la sappiamo risolvere, e quindi, ahinoi!, non sappiamo rispondere alla domanda dell'esercizio. Possiamo però facilmente vedere che l'accelerazione angolare *non* è costante nel tempo, e quindi di sicuro il moto angolare della porta non sarà uniformemente accelerato.

6.9.8 Esercizio: il pendolo "fisico"

Avete una sottile sbarretta omogenea di lunghezza $L = 20$ cm e massa $m = 0.10$ kg, che può ruotare con attrito trascurabile su un piano verticale, essendo imperniata ad un suo estremo, come mostrato schematicamente in Fig 6.15. Detto θ l'angolo compreso tra

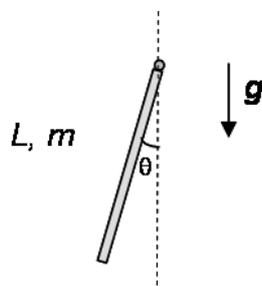


Figura 6.15: Rappresentazione schematica del “pendolo fisico” descritto nel testo.

sbarretta e direzione verticale (misurato come in figura), qual è il valore θ_{eq} all’equilibrio? Come si scrive l’equazione del moto rotazionale $\alpha(t)$, con $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$? Si può cercare di darne la soluzione supponendo che il moto avvenga a “piccoli” valori dell’angolo?

Soluzione. Il sistema considerato, a cui a volte si dà il nome di *pendolo fisico*, può presentare un moto di tipo armonico (oscillatorio). Vediamo il perché di questa affermazione. La posizione di equilibrio corrisponde a condizioni statiche in termini di rotazioni (l’equilibrio traslazionale è, al solito, garantito dalla presenza del vincolo). Quindi all’equilibrio deve essere nullo il momento delle forze esterne calcolato rispetto al perno di rotazione. L’unica forza che può avere un momento non nullo è il peso $m\vec{g}$, applicato al centro di massa della sbarretta; essendo questa omogenea, il centro di massa si troverà a distanza $L/2$ dal perno, e, tenendo conto della geometria del sistema, è facile trovare che il momento delle forze vale, in modulo, $|\vec{\tau}(\theta)| = mg(L/2) \sin \theta$. All’equilibrio deve essere $\tau(\theta_{eq}) = 0$, cioè $\theta_{eq} = 0$ e anche $\theta_{eq} = \pi$: il momento è nullo se la sbarretta è in direzione verticale, puntando verso l’alto o verso il basso.

Le due posizioni di equilibrio non sono equivalenti: come ci suggerisce il buon senso, $\theta_{eq} = 0$ è posizione di equilibrio *stabile*, mentre $\theta_{eq} = \pi$ è *instabile*. Per dimostrarlo scriviamo la funzione energia potenziale (gravitazionale) del sistema per un angolo generico, $U(\theta)$; l’energia potenziale cambia dato che in funzione di θ cambia la quota del centro di massa. Con un po’ di trigonometria, e ponendo $U(\theta = 0) = U_0$, è facile rendersi conto che è $U(\theta) = U_0 + mg(L/2)(1 - \cos \theta)$. Questa funzione assume il suo valore minimo $U = 0$ per $\theta = 0$, e il suo valore massimo $U = mgL$ per $\theta = \pi$. Quindi, coerentemente con la classificazione dell’equilibrio data in par. 4.7.2, $\theta = 0$ è posizione equilibrio stabile, $\theta = \pi$ instabile.

Per scrivere l’equazione del moto rotazionale dobbiamo usare la seconda equazione cardinale, cioè scrivere $\alpha = \tau/I$; cominciamo con il notare che, per la sbarretta omogenea che ruota attorno ad un asse passante per un suo estremo, si ha $I = (m/3)L^2$, come calcolato nell’Es. 6.6.2. Facciamo inoltre un’importante considerazione sul segno del momento delle forze, il cui modulo abbiamo determinato qui sopra: coerentemente con la stabilità della posizione di equilibrio, se θ aumenta il momento delle forze deve tendere a *far diminuire* il valore di θ . Di conseguenza dobbiamo porre un segno negativo davanti al modulo del momento delle forze, ottenendo questa equazione del moto: $\alpha(\theta) = -(mg(L/2) \sin \theta)/I = -(3/2)(g/L) \sin \theta$.

L'equazione che abbiamo ottenuto non è generalmente risolubile facendo uso delle nostre (limitate!) conoscenze di analisi matematica, così come non era risolubile l'equazione del moto dell'Es. 6.9.7. Se però l'ipotesi è che il valore di θ rimanga piccolo durante il moto, cioè per $\theta \ll 1$, possiamo usare l'approccio alle *piccole oscillazioni* elaborato nella soluzione dell'Es. 3.5.2 e concludere che il moto è armonico, con legge oraria $\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, dove $\omega = ((3/2)(g/L))^{1/2}$ e A e ϕ sono costanti da determinare sulla base delle condizioni iniziali del moto (non specificate nel testo di questo esercizio).

6.9.9 Esercizio: una sbarretta che ruota (e trasla)

Riprendiamo la situazione di Es. 6.3.1 (una sbarretta recante cariche elettriche ai suoi estremi, in presenza di campo elettrico omogeneo). Qui la domanda è: com'è fatto il moto complessivo del sistema (tenendo conto anche della rotazione)?

Soluzione. La sbarretta sottoposta alla coppia di forze (elettriche) è un ottimo esempio di corpo libero che compie un moto di traslazione e di rotazione. Infatti il centro di massa della sbarretta trasla (con accelerazione uniforme, come avevamo visto), mentre la circostanza che le due forze che agiscono sul sistema abbiano punti di applicazione diversi fa sì che la sbarretta abbia anche un *moto di rotazione attorno al centro di massa*. Il momento delle forze risultanti sulla sbarretta dipende dal braccio delle forze applicate, e quindi dall'angolo formato tra sbarretta e direzione del campo elettrico. Ad esempio, nell'istante in cui la sbarretta si trova ad essere parallela all'asse X si avrà che l'angolo tra sbarretta e direzione del campo elettrico vale $\theta = \pi/4$, per cui *in questo istante*: $\tau = \tau_1 + \tau_2 = E(L/2) \sin(\pi/4)(q_1 - q_2)$. Fate attenzione al segno meno che abbiamo usato: esso è lì per tenere in debito conto il fatto che le forze elettriche che agiscono sulle due cariche tendono a produrre momenti di verso *opposto* rispetto al centro di massa del sistema (il punto di mezzo della sbarretta); con la nostra scelta abbiamo implicitamente stabilito come "positive" le rotazioni in un certo verso (ma comunque questo aspetto è irrilevante in questo problema). In generale, quindi, il momento delle forze dipende dall'angolo e quindi, implicitamente, dal tempo: $\tau = E(L/2)(q_1 - q_2) \sin \theta$. L'equazione del moto, ricordando che il momento di inerzia della sbarretta per rotazioni attorno al centro di massa vale $I_{cm} = (m/12)L^2$, si scrive: $\alpha = \tau/I = 6(E/L)(q_1 - q_2) \sin \theta$. Anche in questo caso non siamo in grado di darne una soluzione analitica, cioè non sappiamo determinare la legge oraria $\theta(t)$!

6.9.10 Esercizio: la carrucola massiva bis

Stessa situazione dell'Es. 6.6.7 (carrucola massiva su cui è avvolta una massa m). Ora ci chiediamo quanto vale il modulo dell'accelerazione angolare α della puleggia quando la massa m compie la sua discesa.

Soluzione. Dobbiamo prendere in considerazione le cause fisiche che provocano la rotazione della puleggia. Nel nostro modello (fune inestensibile di massa trascurabile che si srotola senza slittare sulla gola della puleggia) è intuitivo che la puleggia è messa in rotazione dalla forza che la fune esercita sulla superficie esterna della puleggia. Tale forza

corrisponderà in modulo alla tensione T della fune, e sarà applicata esattamente nel punto di contatto tra fune e puleggia in direzione ortogonale rispetto al raggio R della puleggia, cioè il braccio di questa forza sarà semplicemente R ed il momento corrispondente sarà RT . Detto I il momento di inerzia, avremo allora $\alpha = TR/I$. Questa equazione, però, non basta per risolvere il problema: infatti il valore di T è incognito.

Rivolgiamoci ora al moto della massa appesa. Tale moto avviene sotto l'effetto di due forze: la tensione della fune, diretta verso l'alto, e la forza peso, che punta in basso. Per la massa m l'equazione del moto (traslazionale, questo corpo può solo avere moto traslazionale per come è fatto il sistema!) si scrive: $a = g - T/m$ (avendo supposto come positiva l'accelerazione diretta verso il basso). Notate che, coerentemente con il modello di fune *inestensibile*, la tensione che essa esercita sulla massa e quella che essa esercita sulla puleggia hanno lo stesso modulo (ma versi opposti). In sostanza, la fune serve a *trasferire la forza da un punto all'altro*, come avevamo già stabilito, ad esempio, nell'Es. 3.6.3. Se mettiamo a sistema le due equazioni del moto, angolare per la puleggia e traslazionale per la massa, vediamo che abbiamo due equazioni e tre incognite (T , α , a). Però, ragionando come nell'Es. 6.6.7, se la corda non slitta possiamo senz'altro affermare che $a = \alpha R$. Questo ci consente di avere una terza equazione che, messa a sistema con le altre due, conduce al risultato: $\alpha = TR/I = m(g - a)R/I = (mgR - m\alpha R^2)/I$, da cui $\alpha = mgR/(I + mR^2)$. Come si vede, l'accelerazione non dipende dal tempo e quindi il moto è uniformemente accelerato. Notate che, se la puleggia avesse massa nulla, allora $a = g$, cioè la caduta sarebbe libera (la puleggia non servirebbe a un bel niente), mentre in generale si ottiene $a < g$, dato che il fatto che la puleggia (massiva) venga messa in rotazione richiede dell'energia, da sottrarsi a quella disponibile per la caduta della massa m . Un'estensione di questo esercizio, che sfrutta lo stesso approccio risolutivo, consiste nel risolvere il problema della "macchina di Atwood (Es. 3.6.3) nel caso di puleggia massiva; in particolare vi potrà risultare interessante notare le differenze con il caso trattato in Es. 3.6.3.

6.9.11 Esercizio: barattoli su piano inclinato bis

Stessa situazione dell'Es. 6.7.1, dove consideravamo il moto di rotolamento puro di un barattolo cilindrico (di massa M , raggio R , momento di inerzia I) lungo un piano inclinato (angolo θ rispetto all'orizzontale). Quanto vale in modulo l'accelerazione a_{cm} del centro di massa del barattolo quando esso si trova sul piano inclinato? Quanto deve valere, al minimo, il coefficiente di attrito μ_{min} che permette il moto di rotolamento puro?

Soluzione. In questo problema torniamo ad occuparci del moto di rotolamento puro considerando le *forze* che vi partecipano. Abbiamo già intuito che le forze che fanno rotolare il barattolo di questo esercizio sono le forze di attrito *statico* tra generatrice del cilindro e superficie del piano inclinato. In effetti tali forze hanno un momento non nullo rispetto al centro di massa del barattolo: infatti le forze di attrito statico, opponendosi al moto "incipiente" della generatrice, sono dirette parallelamente al piano inclinato, e puntano verso l'alto del piano stesso, come mostrato in Fig. 6.16. Usando come polo il centro di massa, che coincide con il centro geometrico del barattolo (l'asse del cilindro), potrete

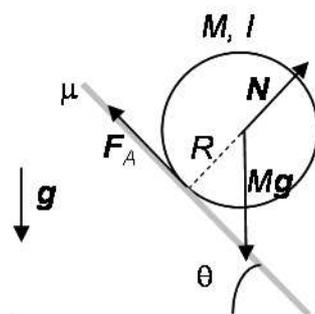


Figura 6.16: Rappresentazione schematica di un barattolo cilindrico che ruota senza strisciare lungo un piano inclinato; nel diagramma delle forze la reazione vincolare del piano \vec{N} è stata disegnata come applicata al centro di massa per esigenze di chiarezza tipografica.

facilmente osservare che, detto F_A il modulo della forza di attrito, si ha, per i moduli, $\tau = RF_A$. Per la seconda equazione cardinale deve allora essere $\tau = I\alpha = RF_A$, cioè $F_A = (I/R)\alpha$. Il fatto che si osservi rotolamento puro significa che, per le condizioni del problema, la forza di attrito ha esattamente questo valore (che dipende da α): sfrutteremo poi questa affermazione per rispondere alla seconda domanda dell'esercizio.

Se ora esaminiamo la dinamica del centro di massa del barattolo possiamo scrivere, per l'accelerazione lungo la direzione del piano inclinato (segno positivo verso il basso): $a_{cm} = g \sin \theta - (F_A/M) = g \sin \theta - (I/(MR))\alpha$, dove abbiamo considerato la componente della forza peso in direzione parallela al piano e abbiamo usato l'espressione di F_A trovata sopra. A questo punto possiamo sfruttare la condizione "geometrica" di rotolamento puro che, come abbiamo già affermato, impone $\alpha = a_{cm}/R$. Sostituendo e risolvendo si ottiene $a_{cm} = g \sin \theta / (1 + I/(MR^2))$: se non ci fosse rotolamento (puro), allora il termine $I/(MR^2)$ non comparirebbe (I sarebbe nullo!), e l'accelerazione varrebbe $g \sin \theta$, cioè sarebbe quella che si trova per il punto materiale che si muove senza attrito sullo stesso piano inclinato. Se invece si considera il rotolamento, allora l'accelerazione è sempre minore rispetto a quella del punto materiale senza attrito; ad esempio, se il barattolo fosse approssimabile con un cilindro pieno, il cui momento di inerzia vale $I = (M/2)R^2$ (vedi Es. 6.6.4), si avrebbe $a = (2/3)g \sin \theta$.

A questo punto possiamo rispondere alla seconda domanda dell'esercizio: deve essere $F_A = (I/R)\alpha = (I/R)a/R = (I/R^2)g \sin \theta / (1 + I/(MR^2))$. D'altra parte la definizione di attrito statico che avevamo dato in par. 3.9.1 recita $F_A \leq \mu N$, dove N rappresenta il modulo della reazione vincolare esercitata dal piano sul barattolo. Per la geometria del piano inclinato, come sappiamo, è $N = Mg \cos \theta$. Confrontando le due espressioni per la (stessa) forza di attrito che stiamo considerando possiamo concludere che si può avere rotolamento puro solo se $\mu \geq \mu_{min} = F_A/N = (I/R^2)g \sin \theta / ((1 + I/(MR^2))Mg \cos \theta)$. Approssimando il barattolo con un cilindro pieno si ottiene, ad esempio, $\mu_{min} = \tan \theta / 3$.

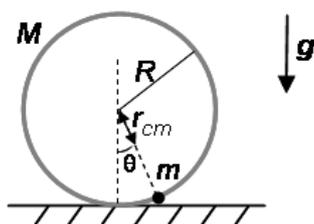


Figura 6.17: Rappresentazione del cerchione con piombino che può rotolare senza strisciare su un piano orizzontale dotato di attrito.

6.9.12 Esercizio: cerchione con piombino bis

Prendiamo il sistema (cerchione di raggio R e massa M con piombino di massa m) descritto in Es. 6.2.7 e poggiamo il cerchione sopra un piano orizzontale in modo che possa rotolarci sopra; supponiamo in particolare che il piano presenti attrito statico sufficiente a permettere moto di *rotolamento puro*. Se il sistema viene lasciato andare da fermo da una configurazione iniziale in cui il raggio \vec{r}_{cm} che punta al centro di massa forma un angolo θ_0 rispetto alla verticale, come rappresentato in Fig. 6.17, che tipo di moto anima il cerchione? Per la soluzione immaginate che la condizione iniziale sia $\theta_0 \ll 1$.

Soluzione. Secondo quanto stabilito nel testo, il moto del sistema è di rotolamento puro, cioè coinvolge traslazione (del centro di massa) e rotazione. Rispetto alla figura, ci aspettiamo che la rotazione (rispetto al centro del cerchione) avvenga in senso orario e la traslazione sia verso destra. Esaminiamo la rotazione usando come polo il *centro del cerchione*: le forze che hanno momento non nullo sono la forza peso $(m + M)\vec{g}$, con braccio $r_{cm} \sin \theta$, e la forza di attrito \vec{F}_A , con braccio R . Dunque l'equazione del moto di rotazione (rispetto ad un polo coincidente con il centro del cerchione) recita $\alpha = (-(m+M)gr_{cm} \sin \theta + F_A R)/I$, dove la scelta dei segni tiene conto delle considerazioni fatte nella soluzione di Es. 6.9.8 e il momento di inerzia, calcolato secondo quanto sappiamo, vale $I = (m + M)R^2$. Il moto di traslazione del *centro di massa* è regolato dall'equazione $a = F_A/(m + M)$; d'altra parte la condizione di rotolamento puro stabilisce $a = \alpha/R$. Unendo le varie equazioni e "lavorando" di algebra otteniamo: $\alpha = -gr_{cm} \sin \theta/(2R^2) = -(g/R)(m/(2(m+M))) \sin \theta$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo inserito la posizione del centro di massa prima ricordata. L'equazione ottenuta assomiglia, a parte il valore dei vari coefficienti, a quella che determina il moto del pendolo di Es. 6.9.8; dunque anche in questo caso potremmo avere delle piccole oscillazioni con pulsazione $\omega = ((g/R)(m/(2(m+M))))^{1/2}$.

Ai più attenti non sarà sfuggito che nella soluzione abbiamo fatto degli imbrogli; infatti abbiamo confuso tra loro a nostro piacimento il centro di massa ed il centro geometrico del cerchione! Il motivo degli imbrogli è nel fatto che, a rigore, il problema comporta rotazioni attorno ad un asse (quello passante per il centro di massa) che non è un asse principale del sistema, cosa che può rendere difficile la soluzione. Tuttavia, data la descrizione del problema, ci aspettiamo che $m \ll M$, e quindi la posizione del centro di massa rimane "vicina" al centro, e la nostra soluzione può essere considerata approssimativamente

valida.

6.10 Cenni di statica di corpi “appoggiati” o inchiodati

Negli esercizi precedenti abbiamo esaminato diversi casi di statica di corpi rigidi che potevano ruotare essendo imperniati su un qualche asse; per simili situazioni è in stato in genere sufficiente esaminare le condizioni di equilibrio rotazionale, essendo quello traslazionale assicurato dalle forze di reazione vincolare esercitate dal perno. D'altra parte, in modo più o meno implicito, nei capitoli precedenti abbiamo affrontato spesso problemi di equilibrio dove corpi rigidi (spesso simili a casse) si trovavano *appoggiati* su piani, in assenza di qualsiasi perno.

A questo punto sappiamo che la statica di un corpo rigido richiede che vengano soddisfatte anche condizioni relative alla rotazione, e quindi è giusto chiedersi cosa succede sotto questo punto di vista quando un corpo rigido di massa m , ad esempio una cassa, è appoggiato su un piano (rigido ed indeformabile). Secondo il nostro modello di reazione vincolare esercitata da un piano orizzontale (par. 3.4) abbiamo una forza $\vec{N} = -m\vec{g}$ che compensa la forza peso, e dunque realizza equilibrio traslazionale. Per esaminare gli aspetti rotazionali dobbiamo chiederci *dove* tale reazione è applicata. Un ragionamento intuitivo ci porta ad immaginare tale forza come *distribuita* sull'intera superficie di contatto; per un caso “ideale” (superfici a contatto tra loro perfettamente piane, assenza di ogni disomogeneità) potremmo supporre una distribuzione uniforme della forza. In ogni caso, a livello di *modello* della situazione fisica considerata potremo lasciarci la libertà di considerare *tutta* la reazione vincolare come un vettore applicato ad un punto *a nostra scelta* tra quelli che *appartengono alla superficie di contatto*. Ad esempio, per una cassa appoggiata su un piano orizzontale, potremmo scegliere come punto di applicazione di \vec{N} il punto di intersezione tra la verticale che passa per il centro di massa del corpo e la superficie di contatto, come mostrato in Fig. 6.18(a) per una cassa omogenea (il centro di massa è al centro geometrico). È facile rendersi conto che in questo modo il braccio della forza di reazione è nullo rispetto al centro di massa, e quindi è nullo il momento generato dalla reazione. Di conseguenza possiamo concludere che, oltre ad avere equilibrio rispetto alla traslazione, abbiamo anche equilibrio rotazionale. In effetti sappiamo tutti che una cassa appoggiata su un piano orizzontale non si mette a rotolare spontaneamente!

Consideriamo però un corpo rigido “a forma di Torre di Pisa”, come in Fig. 6.18(b); dal punto di vista traslazionale possiamo continuare a supporre equilibrio, dato che alla superficie di contatto continuerà ad esercitarsi una reazione che annulla gli effetti della forza peso. Consideriamo però l'aspetto rotazionale, scegliendo come polo di rotazione il punto indicato con “P” in figura (è un punto che si trova al bordo della superficie di contatto). La forza peso, applicata per definizione al centro di massa, produce un momento non nullo rispetto a questo polo, come si può facilmente verificare notando che il braccio non è nullo. Per bilanciare questo momento occorre supporre che la reazione vincolare sia applicata al punto di intersezione tra verticale passante per il centro di massa

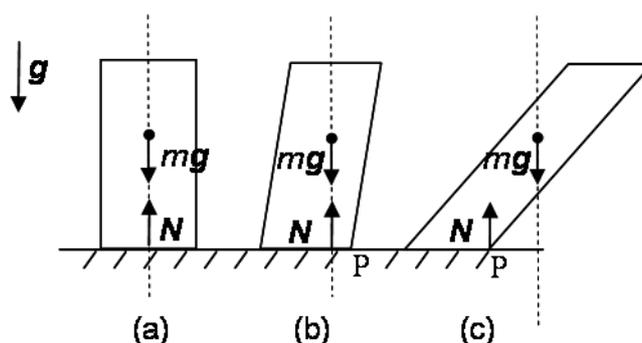


Figura 6.18: Tre corpi appoggiati su un piano orizzontale, con indicazione della posizione del centro di massa (pallino) e delle forze rilevanti; nei casi (a) e (b) la verticale passante per il centro di massa cade all'interno della superficie di contatto, nel caso (c) cade al di fuori, e non ci può essere equilibrio rotazionale rispetto al punto “P”.

(che abbiamo indicato con un pallino in figura) e la superficie di contatto. Non sempre questo è possibile: infatti nella situazione di Fig. 6.18(c) la verticale passante per il centro di massa cade *al di fuori* della superficie di contatto, e non c'è alcun modo di bilanciare il momento della forza peso. Di conseguenza il corpo non può avere equilibrio rotazionale, e dunque si “rovescerà” ruotando attorno ad un asse passante per il punto “P” (in verso orario, secondo la figura). Semplici ragionamenti ci portano a considerare che, in termini più generali, un corpo poggiato su un piano orizzontale è in equilibrio rotazionale se *la verticale passante per il centro di massa cade all'interno del perimetro che delimita la superficie di contatto del corpo*.

Poiché, come ci mostra l'esperienza quotidiana, esistono numerose situazioni in cui corpi del genere (“con asse obliquo”) restano in piedi, devono esistere metodi che permettono di superare il problema. Parecchi di questi metodi potrete studiarli nel prosieguo della vostra carriera; per il momento, limitiamoci a considerare, anche con alcuni semplici esercizi, il ruolo che hanno le fondamenta degli edifici, quello giocato da “chiodi” e staffe di vario genere o dalle forze di attrito statico.

6.10.1 Esercizio: un palo obliquo

Dovete realizzare una struttura in cui un palo omogeneo di massa $M = 2.0 \times 10^2$ kg, sezione quadrata di lato $a = 50$ cm ed altezza $h = 5.0$ m deve essere fissato al suolo in modo da formare un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto alla verticale. Per garantire la stabilità piantate un chiodo nel suolo nel punto indicato in Fig. 6.19, che rappresenta uno schema della situazione considerata e mostra anche la forma con cui è stato tagliato il palo (la sezione laterale è un parallelogramma). Quanto vale la forza F che il chiodo esercita sul palo nel punto di contatto?

Soluzione. Il palo deve evidentemente trovarsi in condizioni statiche: l'equilibrio traslazionale è assicurato dalla reazione vincolare esercitata dal piano, che, secondo i nostri modelli, possiamo immaginare applicata in un punto qualsiasi del piano di contatto. Per

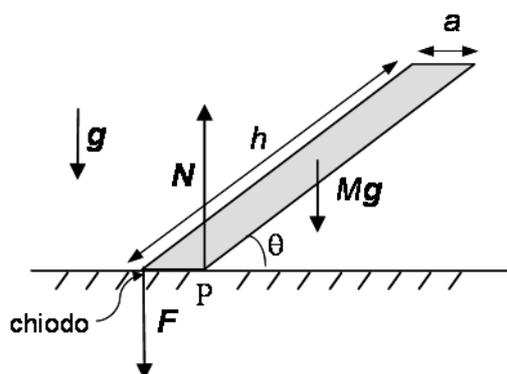


Figura 6.19: Rappresentazione dell’esercizio riguardante un palo fissato al suolo (orizzontale) mediante un chiodo; la figura, che non è in scala, mostra anche le forze rilevanti per la soluzione.

l’equilibrio rotazionale dobbiamo considerare il momento della forza peso, applicata al centro di massa, rispetto ad un polo di rotazione. Scegliamo come polo il punto indicato con “P” in figura; essendo il polo omogeneo e tenendo conto della geometria del sistema, il braccio della forza peso rispetto a “P” risulta pari a $b = (h/2) \cos \theta - a/2$, e quindi il momento risulta, in modulo, $\tau = Mg((h/2) \cos \theta - a/2)$. Il suo verso è tale da tendere a far ruotare in senso orario (secondo la figura) il palo. Questo momento può essere bilanciato dal momento della forza \vec{F} esercitata dal chiodo sul punto di contatto con il palo. Supponendo che tale forza sia verticale, il suo momento rispetto a “P” risulta in modulo $\tau_F = Fa$, di verso tale da indurre una rotazione in senso antiorario (rispetto alla figura). Per l’equilibrio deve allora essere $\tau_F = \tau$, cioè $F = Mg((h/(2a)) \cos \theta - 1/2) \simeq Mg((h/(2a)) \cos \theta) = 6.9 \times 10^3 \text{ N}$.

Appreziate il fatto che la soluzione è stata ottenuta introducendo un certo numero di approssimazioni: ad esempio abbiamo supposto che la forza del chiodo e la reazione vincolare agissero in un solo punto e fossero verticali. Inoltre non abbiamo specificato come il chiodo possa rimanere infisso nel suolo; più in generale questo aspetto richiama i problemi connessi con corpi rigidi conficcati in un sistema “parzialmente” rigido, come possiamo immaginare sia il terreno. Questi problemi, che ad esempio sono rilevanti per trattare la statica degli edifici muniti di fondamenta, richiedono per la loro soluzione approcci generalmente più complicati rispetto a quelli che abbiamo presentato in questo capitolo, approcci che studiano forze applicate in modo distribuito e che potrete esaminare in corsi futuri.

6.10.2 Esercizio: sedia ed ombrello

Avete una sedia di massa M poggiata al suolo attraverso le sue quattro zampe ed agganciate al suo schienale un ombrello di massa m : si osserva che, al di sopra di un certo valore di m , il sistema si ribalta. Come si può esprimere il valore minimo m_{min} per il quale si ha ribaltamento? Per impostare la soluzione dovreste usare un certo approssimazioni, alcune

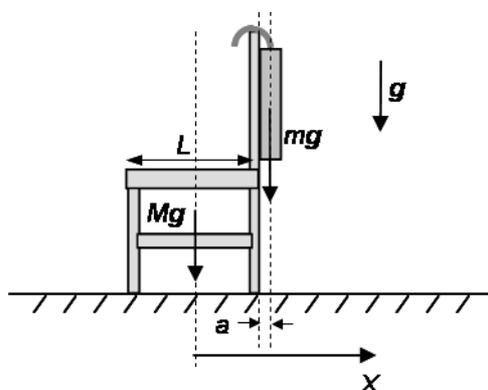


Figura 6.20: Rappresentazione schematica dell’ombrello agganciato alla sedia discusso nel testo.

delle quali possono essere comprese meglio osservando la Fig. 6.20: la posizione del centro di massa della sedia appartiene all’asse che passa per il centro geometrico della seduta (che è un quadrato di lato L); le zampe sono molto sottili, e partono dai vertici della seduta; lo schienale è perfettamente verticale; l’ombrello può essere approssimato come un cilindro omogeneo di raggio a (in pratica per determinare la posizione del centro di massa dell’ombrello potete trascurare la massa distribuita nel manico); una volta agganciato allo schienale, l’ombrello assume una posizione perfettamente verticale ed è a contatto dello schienale.

Soluzione. L’equilibrio rotazionale è possibile solo finché il centro di massa dell’intero sistema si trova in una posizione tale che la verticale che vi passa cade al suolo all’interno del perimetro delimitato dalle zampe della sedia. Esaminiamo la posizione x_{cm} del centro di massa complessivo rispetto all’asse X indicato in figura, centrato sulla posizione orizzontale del centro di massa della sola sedia; considerando il sistema come costituito da due elementi discreti (sedia ed ombrello) secondo quanto discusso in par. 6.2.5, e tenendo conto della posizione orizzontale del centro di massa dell’ombrello (che si trova ad una distanza $a/2$ dalla zampa esterna della sedia) possiamo scrivere: $x_{cm} = m(L/2 + a)/(m + M)$. La condizione di ribaltamento si ha per $x_{cm} \geq L/2$, per cui, con un po’ di manipolazioni algebriche: $m_{min} = ML/(2a)$.

6.10.3 Esercizio: la scala a pioli

In numerose situazioni pratiche si incontrano corpi che si trovano in equilibrio mantenendosi con l’asse in direzione obliqua rispetto all’orizzontale e in assenza di vincoli o perni. Un esempio illuminante è quello di una scala a pioli appoggiata ai suoi estremi ad una parete e al pavimento. Supponiamo di avere una scala che, come mostrato in Fig. 6.21, può essere approssimata con una trave omogenea di massa M e lunghezza L che è appoggiata ad una parete verticale rigida, che per semplicità supponiamo liscia (con attrito trascurabile), e a un pavimento scabro, che presenta un coefficiente di attrito (statico)

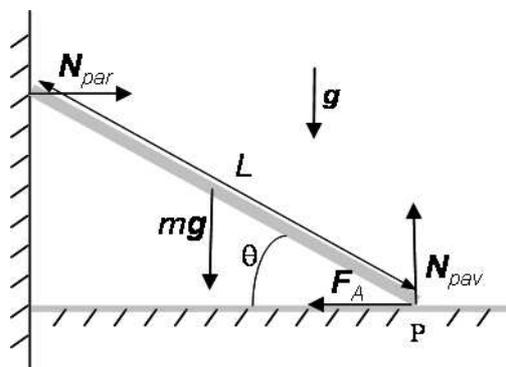


Figura 6.21: Rappresentazione schematica di una scala appoggiata ad una parete con indicazione delle forze rilevanti per la soluzione dell'esercizio proposto nel testo.

μ . Quanto vale, al minimo, l'angolo θ_{min} che la scala può formare rispetto all'orizzontale mantenendosi in equilibrio?

Soluzione. Tutti sappiamo che una scala poggiata ad una parete rimane ferma solo se l'angolo che forma rispetto all'orizzontale è maggiore di un certo valore. L'equilibrio del sistema è infatti realizzato attraverso la forza di attrito, che nel nostro esempio si esercita tra pavimento ed estremità della scala, o trave. Esaminiamo il problema cominciando con l'elenco delle forze che agiscono sulla trave: avremo la forza peso $m\vec{g}$, di direzione verticale ed applicata al centro di massa (che, a causa dell'omogeneità della trave, si trova a metà della sua lunghezza), le reazioni vincolari \vec{N}_{pav} e \vec{N}_{par} esercitate sulla trave da pavimento e parete, e quindi rispettivamente verticali ed orizzontale, e la forza di attrito \vec{F}_A tra pavimento ed estremità della trave. All'equilibrio, quando tutto è fermo, l'attrito è di tipo statico; esaminando direzione e verso del moto incipiente della trave, possiamo facilmente dedurre che \vec{F}_A è orizzontale ed è orientata verso sinistra (in figura), cioè ha stessa direzione e verso opposto rispetto a \vec{N}_{par} . Essendo il problema bidimensionale, per l'equilibrio traslazionale dobbiamo considerare separatamente le direzioni orizzontale e verticale: in direzione orizzontale, dovremo avere, per i moduli, $N_{par} = F_A$; in direzione verticale dovrà invece essere $mg = N_{pav}$. Passiamo ora all'equilibrio rotazionale: non essendoci perni o vincoli abbiamo libertà nella scelta del polo, che, per comodità, prendiamo in corrispondenza del punto di contatto tra trave e pavimento (il punto “P” di figura). Le forze che hanno un momento non nullo rispetto a questo polo sono la forza peso, con braccio $(L/2) \cos \theta$, e la reazione esercitata dalla parete, con braccio $L \sin \theta$ (fate attenzione al calcolo dei bracci!). Per i moduli all'equilibrio dovrà essere $mg(L/2) \cos \theta = N_{par}L \sin \theta$. Mettendo insieme le varie affermazioni troviamo facilmente: $F_A = N_{par} = (mg/2) \cos \theta / \sin \theta$; d'altra parte per l'attrito statico tra pavimento e trave sappiamo che $F_A \leq \mu N_{pav} = \mu mg$, cioè $(mg/2) \cos \theta / \sin \theta \leq \mu mg$. Quindi si ha equilibrio quando $\tan \theta \geq 1/(2\mu)$, cioè $\theta_{min} = \arctan(1/(2\mu))$. Ricordatelo quando dovete arrampicarvi su una scala appoggiata ad una parete, e tenete presente che potete sempre chiedere ad un vostro amico di appoggiare un piede alla scala spingendo in direzione orizzontale in modo da “aiutare” la forza di attrito.

6.11 Momento angolare

L'ultimo tassello del nostro percorso ideale costruito per analogia con il caso del punto di materiale prevede di individuare una grandezza che abbia, in qualche modo, un ruolo simile a quello della quantità di moto. Ricordate che la quantità di moto di una massa m in moto a velocità \vec{v} è una grandezza vettoriale, che si scrive $\vec{p} = m\vec{v}$.

La grandezza vettoriale che ora definiamo si chiama **momento angolare**, si indica con il simbolo \vec{L} e, per un punto materiale che ha quantità di moto \vec{p} , è definita come:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}), \quad (6.15)$$

dove \vec{r} è un vettore spiccato dal polo (cioè un certo punto dello spazio, che in questo ambito possiamo immaginare come generico) verso il punto di applicazione del vettore \vec{p} . Facciamo alcune osservazioni. In primo luogo, apprezzate che in questa definizione, come già in quella di momento delle forze, compare l'“operazione” $\vec{r} \times$. Poi notate che anche questa definizione porta ad una quantità che dipende dalla scelta del polo considerato. Le dimensioni di \vec{L} sono ovviamente quelle di una quantità di moto per una distanza, che corrispondono, come potete facilmente verificare, a quelle di un'energia per un tempo. L'unità di misura conveniente sarà allora J s. Talvolta ci si riferisce a questa grandezza con il nome di *azione*.

Cerchiamo ora una buona definizione di momento angolare per un corpo rigido usando un approccio simile a quello che in par. 6.6 ci ha permesso di introdurre il momento di inerzia. Consideriamo allora un corpo rigido in rotazione attorno ad un certo asse e suddividiamolo idealmente, come al solito, in tanti elementini infinitesimi. Ognuno di questi elementini, dotato di massa dm , darà un contributo infinitesimo alla quantità di moto del corpo, $d\vec{p} = \vec{v}dm$, e di conseguenza al momento angolare rispetto all'asse, $d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}dm$, con \vec{r} distanza dell'elementino considerato rispetto al polo, cioè l'asse di rotazione. Ora possiamo ricordare che $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ e notare che, per le proprietà del prodotto vettoriale (verifichetelo!), si ha $\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}r^2$. Allora potremo scrivere $d\vec{L} = \vec{\omega}r^2dm$; per determinare il momento angolare complessivo occorrerà integrare sull'intero corpo, tenendo conto che la velocità angolare è la stessa per tutti gli elementini e può quindi essere “portata fuori” dal segno di integrale. Si vede facilmente che l'integrale che rimane da calcolare è proprio quello che dà origine al momento di inerzia I . Si ottiene pertanto:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (6.16)$$

relazione che mostra che il momento angolare ha direzione e verso coincidenti con quelli della velocità angolare, e che torna utile quando si deve calcolare \vec{L} per un corpo rigido in rotazione.

Fate attenzione al fatto che, come potrete scoprire in corsi più avanzati, l'Eq. 6.16 scritta nella forma vettoriale *non è sempre valida*, ma ha senso solo quando si considerano rotazioni rispetto ad un *asse principale* del corpo rigido. Tuttavia, dato che ci limitiamo a considerare rotazioni di questo tipo in tutto il capitolo, prendiamo per buona l'espressione che abbiamo scritto, che, fra l'altro, presenta una notevole somiglianza (formale) con la

definizione di quantità di moto: potete infatti vedere che, se invece della quantità di moto di un sistema vogliamo esprimerne il momento angolare, dobbiamo semplicemente ricordarci di sostituire alla massa il momento di inerzia e alla velocità “lineare” (di traslazione) la velocità angolare.

6.11.1 Esercizio: momento angolare in un’orbita circolare

Abbiamo scritto che l’Eq. 6.15 funziona nel caso di un corpo puntiforme in moto. Supponiamo allora di avere una massa m che percorre un’orbita circolare di raggio R con velocità uniforme e costante v (diretta tangenzialmente, come è ovvio!). Quanto vale il momento angolare \vec{L} ?

Soluzione. Limitiamoci ad applicare la definizione: tenendo conto che il polo coincide naturalmente con il centro dell’orbita, e quindi \vec{r} è un vettore disposto come il raggio che punta sul corpo, e che la velocità è tangenziale, avremo che il momento angolare ha la direzione dell’asse di rotazione (cioè è ortogonale al piano dell’orbita, con un verso che dipende dal verso di percorrenza dell’orbita stessa) e modulo $L = mvR = m\omega R^2$, con ω velocità angolare.

Il “modello planetario” di un atomo di idrogeno, in voga oltre un secolo fa, prevede proprio che l’elettrone ruoti in un’orbita circolare (molto piccola) attorno al protone. Come probabilmente già sapete, questo modello è affetto da problemi concettuali insanabili, dato che la perdita di energia (per “irraggiamento”) da parte dell’elettrone in moto lo condurrebbe rapidamente a fermarsi e collassare sul protone; di conseguenza, la materia sarebbe tutta fortemente instabile. Niels Bohr nel secolo scorso stabilì che, nelle particolari condizioni che devono essere rispettate da un elettrone in moto (le condizioni della “meccanica quantistica”), il modello planetario può ancora andare bene per alcune applicazioni, purché il momento angolare dell’orbita sia un multiplo intero di una costante universale, detta costante di Planck (simbolo h , valore $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s). Deve cioè essere: $L = mvR = m\omega R^2 = nh$, con n intero. Tenendo conto che il raggio dell’orbita del livello fondamentale ($n = 1$) per l’idrogeno è proprio il cosiddetto “raggio di Bohr”, $R = a_0 = 5.0 \times 10^{-11}$ m, e che per l’elettrone $m = 9.0 \times 10^{-31}$ kg, provate a stimare quanto deve valere ω ; il valore ottenuto vi stupirà (l’ordine di grandezza dovrebbe essere $\sim 10^{15}$ rad/s).

6.11.2 Esercizio: la carrucola massiva ter

Riprendiamo la situazione dell’Es. 6.6.7, in cui una avevamo una carrucola massiva (raggio R e massa M) messa in rotazione dallo srotolamento di una fune che terminava con una massa m . Quanto vale il momento angolare della carrucola quando la massa si è abbassata per un tratto Δz ?

Soluzione. Avevamo osservato nella soluzione dell’Es. 6.6.7 che, in seguito alla discesa della massa, la puleggia acquistava una velocità angolare $\omega = (4mg\Delta z / (R^2(M + 2m)))^{1/2}$. Il momento angolare si ottiene dalla definizione; la direzione coincide con quella dell’asse di rotazione, il verso dipende dal verso della rotazione ed il modulo, tenendo conto

che era $I = (M/2)R^2$, vale $L = I\omega = (M/2)R^2(4mg\Delta z/(R^2(M + 2m)))^{1/2}$. Osservate che all'inizio, quando tutto è fermo, il momento angolare è nullo: dunque la grandezza *non si conserva* durante il moto, in conseguenza del fatto che il sistema non è isolato rispetto ai momenti delle forze, come chiariremo nel par. 6.11.3.

6.11.3 Conservazione del momento angolare

Ricordate bene che, quando introducemmo la quantità di moto per lo studio della dinamica del punto, trovammo anche una relazione che “generalizzava” l'equazione del moto: $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Anche derivare rispetto al tempo il momento angolare porta ad una relazione interessante; infatti, poiché \vec{r} rimane costante, si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}, \quad (6.17)$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto della definizione di momento delle forze e, al solito, stiamo considerando rotazioni attorno ad un *asse principale* del sistema. Dunque, il momento delle forze che agiscono su un sistema è causa della variazione temporale del momento angolare, così come forze applicate su un sistema erano causa della variazione della quantità di moto.

Proseguendo nei nostri ragionamenti fatti per il punto materiale in par. 5.1.2, avevamo trovato un'utilissima conseguenza della definizione di quantità di moto: in un *sistema isolato*, su cui non agiscono forze esterne (ovvero gli effetti delle forze esterne sono trascurabili nella durata temporale del processo), le forze interne si annullano a coppie, e quindi la quantità di moto \vec{p} (si intende *totale* per il sistema) si conserva. Un analogo ragionamento si può adottare qui per la rotazione di un corpo rigido. Infatti il principio di azione e reazione ci garantisce che anche *i momenti delle forze interne* sono complessivamente nulli.

Dunque, per un *sistema isolato rispetto ai momenti delle forze il momento angolare (complessivo) si conserva*. State attenti al fatto che può verificarsi che un sistema sia isolato rispetto ai momenti (cioè i momenti delle forze esterne sono nulli) ma non rispetto alle forze (cioè esistono forze esterne). Inoltre nel caso in cui si abbia a che fare con processi impulsivi (ad esempio nelle collisioni) ricordate sempre di considerare gli effetti che momenti di forze esterne hanno, o non hanno, nel corso del processo, cioè per la breve durata dell'urto. Come per la conservazione della quantità di moto, anche qui è possibile che ci siano situazioni in cui il sistema non è isolato per la presenza di forze esterne di momento non nullo, ma che tali forze, non avendo carattere impulsivo, possano indurre effetti trascurabili sul momento angolare del sistema.

6.11.4 Esercizio: il pendolo balistico

Avete una sbarretta omogenea lunga D e di massa M incernierata *senza attriti* ad un suo estremo e libera pertanto di muoversi su un piano verticale, come schematizzato in Fig. 6.22. Un proiettile di massa m colpisce l'estremità libera della sbarretta arrivandoci

con una velocità orizzontale, di modulo v . In seguito all'urto il proiettile rimane conficcato nella sbarretta, che comincia a ruotare fino a raggiungere una posizione dove forma un angolo θ_{max} rispetto alla verticale. Quanto vale θ_{max} ?

Soluzione. Sistemi di questo genere sono spesso usati in esperimenti di balistica, da cui la denominazione riportata nel titolo. Nell'urto si originano delle forze *interne*, che quindi hanno momento delle forze nullo rispetto al polo, da scegliersi nel perno di rotazione. Osservate che l'eventuale momento delle forze peso si può senz'altro trascurare dato il carattere non impulsivo della gravità. Dunque il sistema è isolato e si conserva il momento angolare \vec{L}_{tot} totale del sistema rispetto al polo. Prima dell'urto la sbarretta è ferma, e dunque il suo momento angolare è nullo. Il momento angolare del proiettile prima dell'urto si ottiene invece dalla definizione di Eq. 6.15, e vale: $\vec{L}_{in,pro} = \vec{r} \times (m\vec{v})$. Ora notiamo che \vec{v} ed \vec{r} giacciono sullo stesso piano e sono ortogonali fra loro all'istante dell'impatto; inoltre il modulo di \vec{r} è pari alla distanza tra perno e posizione del proiettile subito prima dell'impatto, cioè vale $r = D$, per cui, per i moduli: $L_{in} = L_{in,pro} = mvD$. Subito dopo l'urto il momento angolare, che deve rimanere inalterato, è dovuto alla rotazione del sistema proiettile + sbarretta. Detto ω il modulo della velocità angolare con cui questo sistema inizia a ruotare, si ha, per i moduli: $L_{fin} = L_{fin,sba} + L_{fin,pro} = (I_{sba} + I_{pro})\omega$. Il momento di inerzia della sbarretta lo abbiamo già calcolato più volte, e vale $I_{sba} = (M/3)D^2$. Quello del proiettile possiamo determinarlo applicando la definizione di momento di inerzia alla singola massa m che si trova a distanza D dal polo, ottenendo $I_{pro} = mD^2$. Dunque, dalla conservazione del momento angolare si trova, con un po' di algebra: $\omega = mv/(D((M/3) + m))$.

A questo punto il sistema sbarretta e proiettile conficcato prosegue la sua rotazione in un moto in cui, a causa dell'assenza di attrito, si conserva l'energia meccanica. In pratica il sistema si arresta quando tutta l'energia cinetica acquistata nell'impatto è stata "convertita" in energia potenziale. Tenendo conto che, quando la sbarretta forma l'angolo θ_{max} rispetto alla verticale, il centro di massa del sistema ha aumentato la sua quota di una quantità $D(1 - \cos \theta_{max})$, si può scrivere: $(M+m)gD(1 - \cos \theta_{max}) = (I_{pro} + I_{sba})\omega^2/2$, da cui può essere ricavato il valore di θ_{max} .

Trattandosi di un processo collisionale, sicuramente a qualcuno potrebbe venire in mente di risolverlo con la conservazione della quantità di moto. Questo approccio diventerebbe però più complicato: infatti la quantità di moto dell'intero sistema non si conserva, dato che il perno che vincola la sbarretta può trasferire su questa delle forze di reazione vincolare di carattere impulsivo. In effetti, dato che la sbarretta non si mette a traslare dopo l'urto e che il proiettile, una volta conficcato nella sbarretta, si sposta anche in direzione verticale, è facile intuire che \vec{p} non si conserva.

6.11.5 Esercizio: la danzatrice sui pattini

Le danzatrici su pattini eseguono spesso delle "piroette": esse girano su se stesse e poi, ad esempio allargando le braccia o stendendole lungo il corpo, modificano la velocità di rotazione. Supponendo trascurabile ogni forma di attrito, ed immaginando che il processo di allargare o stendere le braccia sia dovuto unicamente a forze esercitate dalla danzatrice

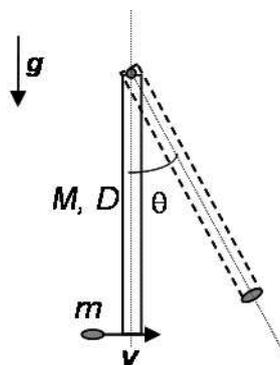


Figura 6.22: Rappresentazione schematica dell'esercizio sul pendolo balistico discusso nel testo; in tratteggio è riportata la configurazione del sistema quando la sbarretta si trova alla sua quota massima.

(forze *interne* al sistema), questo fenomeno può essere facilmente interpretato come un effetto della conservazione del momento angolare. Abbiamo dunque un cilindro omogeneo di raggio R , altezza h , massa M (pessima approssimazione per una danzatrice...) che ruota attorno al suo asse con velocità angolare di modulo ω_1 . Ad un tratto, per effetto di forze interne, una parte m della massa del cilindro cambia configurazione, e viene a trovarsi ad una distanza D dall'asse del cilindro (è come se la danzatrice avesse allargato le braccia; per semplificare supponiamo trascurabile la massa del braccio e immaginiamo che $m/2$ sia una massa puntiforme collocata su ognuna delle mani - come vedete modellare la povera danzatrice è sempre più difficile!). Quanto vale la velocità angolare ω_2 in questa nuova configurazione geometrica?

Soluzione. Dato che ci aspettiamo che si conservi il momento angolare, deve essere $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, dove I_1 e I_2 sono i momenti di inerzia nelle due configurazioni. I_1 è quello di un cilindro che ruota attorno al suo asse: $I_1 = (M/2)R^2$ (lo abbiamo già calcolato). Nel nostro modello, quando il braccio viene allargato il momento di inerzia diventa in pratica quello di un cilindro di massa $M - m$ (supponiamo che il raggio resti lo stesso) e di una massa m che si trova a distanza D dall'asse. Quindi, ricordando che il momento di inerzia di un sistema composto è dato dalla somma dei vari contributi, potremo scrivere: $I_2 = (M - m)/2R^2 + mD^2$. È evidente che, generalmente, $I_2 > I_1$; pertanto la velocità angolare nella nuova configurazione sarà $\omega_2 = (I_1/I_2)\omega_1 < \omega_1$.

Per rimanere nell'ambito dei fenomeni della vita di tutti i giorni la cui rilevanza può essere interpretata considerando la conservazione del momento angolare, potremmo citarne alcuni che hanno a che fare con il rotolamento delle ruote. Se avete mai provato a tenere in rotazione una ruota di bicicletta prendendola con le mani per il suo asse, vi sarete sicuramente resi conto che "è difficile" modificare la direzione dell'asse di rotazione: occorre faticare parecchio, e comunque avvertite un momento torcente che tende a ripristinare le condizioni iniziali. Questo è dovuto al fatto che la ruota possiede un certo momento angolare \vec{L} che tende a conservarsi inalterato anche come direzione; dunque la ruota "reagisce" ad ogni tentativo di modificare la direzione dell'asse. Un fenomeno del genere

è anche alla base dell'effetto "autoraddrizzante" delle ruote in biciclette e motociclette e, assieme all'abbattimento degli attriti di strisciamento, è di sicuro un buon motivo per ritenere fondamentale l'invenzione della ruota. In questo ambito potrete anche apprezzare il fatto che è preferibile avere ruote in cui la massa è concentrata sulla periferia esterna (cerchione e gomma): infatti, a parità di massa, una ruota con raggi o razze leggeri possiede un momento di inerzia maggiore, consentendo di sfruttare al meglio gli effetti di autoraddrizzamento. Illustreremo un po' meglio questi dettagli nell'Es. 6.11.6.

6.11.6 Esercizio: cenni sulla trottola

La trottola è un bellissimo giochino fisico in cui il momento angolare ha un ruolo fondamentale. La soluzione completa del problema è al di fuori della portata di questi appunti (nella trottola gli assi di rotazione complessiva non sono *assi principali*), però possiamo sicuramente dare un'occhiata ai principali meccanismi che rendono così peculiare il moto della trottola. Consideriamo allora un corpo (a forma di trottola!) di massa m e momento di inerzia I che sta ruotando con velocità angolare ω (molto grande) attorno al suo asse. Se supponiamo che l'asse sia inclinato rispetto alla verticale per un angolo θ , come rappresentato in Fig. 6.23, cosa possiamo affermare sulla conservazione del momento angolare \vec{L} ?

Soluzione. Supponiamo che la trottola sia omogenea: il suo centro di massa si troverà per simmetria in qualche punto che appartiene all'asse geometrico. Esaminiamo i momenti delle forze rispetto al polo costituito dal punto di contatto della trottola con il pavimento, indicato con "P" in figura: l'unica forza che ha momento non nullo è il peso, applicato al centro di massa e diretto verticalmente. Detto \vec{r} il vettore che congiunge il punto "P" con il centro di massa, il momento della forza peso sarà $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g}$; questo *vettore* ha modulo $|\vec{\tau}| = mgr \sin \theta$, direzione ortogonale al piano su cui giacciono \vec{r} e $m\vec{g}$, cioè ortogonale al piano della figura, e verso in accordo con la regola della mano destra (entra nel foglio, in figura). A causa della presenza di $\vec{\tau}$, il momento angolare \vec{L} *non* si conserva: la legge che ne regola la variazione sarà quella di Eq. 6.17, cioè esso varierà (vettorialmente) in direzione di $\vec{\tau}$. Se tenete presente il significato dell'operazione di derivata, ricordando che essa coinvolge una differenza (vettoriale), potrete facilmente concludere che il momento angolare tenderà a variare muovendosi nella stessa direzione di $\vec{\tau}$. D'altra parte se la velocità di rotazione è molto alta, come indicato nel testo, la direzione di \vec{L} coincide praticamente con la direzione di $\vec{\omega}$, cioè giace sull'asse della trottola. Allora il momento della forza peso, tendendo a modificare la direzione di \vec{L} , farà modificare la direzione dell'asse della trottola, il quale compirà il noto e caratteristico moto che corrisponde alla descrizione di un cono (*moto di precessione*).

Osservate con attenzione che abbiamo sicuramente introdotto alcune approssimazioni: infatti, se teniamo in conto il moto di precessione, è chiaro che la rotazione complessiva della trottola non avviene più *solamente* rispetto al suo asse geometrico. Siamo quindi in una classica situazione in cui l'asse non è un *asse principale* del sistema. Se però assumiamo che la rotazione attorno all'asse geometrico sia molto veloce, e immaginiamo, come si verifica in realtà, che la precessione sia molto più lenta, cioè avvenga con velocità

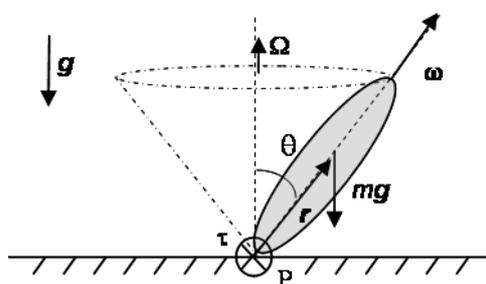


Figura 6.23: Visione schematica di una trottola che ruota attorno al suo asse geometrico con velocità angolare $\vec{\omega}$ mentre compie un moto di *precessione* (rappresentato dal cono tratteggiato) con velocità angolare $\vec{\Omega}$.

angolare $\Omega \ll \omega$, allora potremo concludere che la nostra descrizione è ragionevolmente valida.