

Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2005/06
Onde elettromagnetiche e cenni di ottica

Francesco Fuso¹
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 4a - 06.06.06

¹tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

Indice

1	Onde elettromagnetiche e cenni di ottica	1
1.1	Concetto di onda	1
1.2	Equazione per le onde elettromagnetiche	2
1.2.1	Onde piane propaganti, monocromatiche, polarizzate linearmente	6
1.2.2	Relazione tra campo elettrico e magnetico	9
1.2.3	Esercizio: radio libera	10
1.2.4	Esercizio: antenna a spira	10
1.2.5	Onde stazionarie	12
1.2.6	Esercizio: campo magnetico dell'onda stazionaria	14
1.3	Vettore di Poynting e trasporto di energia	15
1.3.1	Esercizio: campo elettrico di un laser	17
1.3.2	Esercizio: potenza media trasportata da un'onda stazionaria	17
1.4	Luce ed ottica	18
1.4.1	Fotoni	19
1.4.2	Esercizio: fotoni "rossi"	20
1.4.3	Riflessione da superfici metalliche	20
1.4.4	Esercizio: cariche e correnti sulla superficie di uno specchio metallico	23
1.4.5	Riflessione ad incidenza arbitraria	24
1.4.6	Esercizio: lo specchio sferico concavo	24
1.5	Formazione di immagini da specchi sferici	26
1.5.1	Ingrandimento e legge del fuoco	28
1.5.2	Esercizio: il proiettore di un'automobile	29
1.6	Onde in materiali dielettrici (trasparenti)	30
1.6.1	Legge di Snell	32
1.6.2	Esercizio: traslazione di un raggio luminoso	34
1.6.3	Lenti di materiale trasparente	35
1.6.4	Esercizio: una lente di ingrandimento	37

Capitolo 1

Onde elettromagnetiche e cenni di ottica

Uno degli aspetti più significativi dei campi elettrici e magnetici è il carattere “a distanza” dell’interazione che essi rendono possibile. Accanto a questo aspetto, ce ne è un altro, forse ancora più importante, che riguarda la possibilità per questi campi di *propagarsi*. Questo significa che, usando i campi elettromagnetici, dell’energia (o, se preferite, dell’“informazione”) può essere propagata a distanza nello spazio, ovvero muoversi da una sorgente ad un ricevitore¹. Lo studio dei fenomeni collegati alla propagazione dei campi riguarda le **onde elettromagnetiche**, che sono un particolare tipo di perturbazione, dipendente dal tempo e dallo spazio, che può essere studiata nei suoi aspetti fondamentali usando le tecniche che verranno discusse in questo capitolo. Oltre che in tanti altri fenomeni, le onde elettromagnetiche sono alla base dell’**ottica**, che riguarda la propagazione di onde elettromagnetiche “luminose”. Al termine di questo capitolo accenneremo ad alcune delle leggi fondamentali dell’ottica.

1.1 Concetto di onda

Il concetto di **onda** è molto generale in fisica, e si può applicare ad una grande varietà di fenomeni. Un esempio noto a tutti sono le onde acustiche, quelle che permettono al suono di propagarsi. Abbiamo premesso che le onde costituiscono una perturbazione, dipendente dal tempo e dalla posizione, di una data grandezza fisica. Nel caso acustico (considerando propagazione in aria², ad essere perturbata è proprio la pressione locale

¹Nel caso delle onde elettromagnetiche, si può avere propagazione anche in assenza di un mezzo materiale, cioè i campi elettromagnetici si propagano anche nel vuoto. Questa loro particolarità fu ampio oggetto di studio nell’800, quando dette luogo ad ampi dibattiti sull’esistenza, o meno, del cosiddetto “etere”. Fra i tanti successi delle equazioni di Maxwell c’è anche il fatto che esse sono compatibili con la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

²A differenza delle onde elettromagnetiche, quelle acustiche richiedono un “mezzo” che ne sostenga la propagazione, ad esempio l’aria (ma anche un materiale solido, come sapevano gli Indiani quando poggiavano il loro orecchio sui binari delle ferrovie del West).

dell'aria, ovvero la sua densità. In sostanza, un "generatore di suoni" (ad esempio la corda di una chitarra) crea in una certa posizione dello spazio una data perturbazione e questa si propaga, impiegando un certo tempo (e in genere modificando alcune caratteristiche, ad esempio perché viene "attenuata"), fino ad un "ricevitore" (l'orecchio, o un microfono). Nel caso del suono, è ovvio che la propagazione coinvolge delle "onde di pressione", cioè uno spostamento di materia (le molecole dell'aria); quindi la direzione di propagazione coincide con la direzione della perturbazione stessa e l'onda si dice **longitudinale**.

Infine, notiamo un altro aspetto interessante di questo esempio acustico: la corda della chitarra, che abbiamo posto come generatore di suoni, subisce delle "oscillazioni", ovvero la posizione di ogni suo punto cambia nel tempo secondo una legge prefissata, che, in determinate condizioni (ad esempio, assenza di smorzamenti), possiamo supporre periodica. Questa oscillazione è anch'essa descrivibile in termini di onde, ma le onde della chitarra hanno chiaramente caratteristiche diverse rispetto a quelle del suono. Infatti il suono è un'onda propagante, cioè **progressiva**, mentre la corda "non si propaga", dato che i suoi estremi sono fissi (ai capicorda della chitarra), e infatti la descrizione dei fenomeni in cui essa è coinvolta si basa su **onde stazionarie**. Vale la pena di precisare che *non tutte le onde sono periodiche*: ad esempio, se l'onda acustica fosse generata picchiando un pugno su un tavolo (e il rumore si sente e si propaga!), è chiaro che sarebbe difficile attribuirle un carattere periodico, e l'onda avrebbe piuttosto una natura *impulsiva*. Tuttavia, anche in considerazione del ruolo che giocano nell'ottica, in questo capitolo considereremo prevalentemente onde rappresentate da oscillazioni periodiche (con l'ulteriore specifica che queste oscillazioni avvengano ad una sola frequenza, come vedremo nel seguito).

1.2 Equazione per le onde elettromagnetiche

La perturbazione coinvolta nelle onde elettromagnetiche riguarda i valori del campo elettrico e del campo magnetico. Quindi ad "essere perturbati" sono i valori delle grandezze *vettoriali* campo elettrico e magnetico. In altre parole, determinare l'andamento *temporale e spaziale* di \vec{E} e \vec{B} , cioè scrivere delle **funzioni d'onda** (vettoriali), rappresenta il nostro obiettivo, che ci limiteremo a perseguire in casi piuttosto semplici.

Come abbiamo avuto modo di notare nei precedenti capitoli, in situazioni non statiche (e qui stiamo parlando di grandezze periodiche, e quindi sicuramente non stazionarie) campo elettrico e campo magnetico sono fortemente "collegati" tra loro. In effetti, come vedremo meglio nel seguito, stabilire la funzione d'onda di uno dei due campi, ad esempio \vec{E} , è sufficiente per determinare anche l'altra, ad esempio \vec{B} . Dal punto di vista matematico, tali funzioni d'onda devono essere soluzione di opportune **equazioni d'onda**; a loro volta, queste equazioni, dato che descrivono dei campi elettrici e magnetici, devono essere "compatibili" con le equazioni di Maxwell, ovvero deve essere possibile costruire le equazioni d'onda a partire da quelle di Maxwell. In questo ambito conviene usare le equazioni in forma *locale*, cioè:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}, \quad (1.4)$$

dove il significato dei vari termini vi è chiaro, essendo stato discusso nei capitoli precedenti.

Poniamo ora una serie di condizioni che sono necessarie per costruire le equazioni d'onda (cioè semplificarne l'espressione) e per descrivere le condizioni fisiche a cui siamo effettivamente interessati.

1. Poniamoci “nel vuoto”, cioè in una regione di spazio in cui *cariche e correnti* sono nulle. Infatti vogliamo studiare la propagazione delle onde, non la loro produzione nella sorgente³ né la loro rivelazione da parte del ricevitore⁴. Questa assunzione ci permette di semplificare notevolmente le Eqq. 1.1, dato che potremo porre $\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$.
2. Limitiamoci a considerare delle onde che si propagano lungo una data direzione, ad esempio la direzione dell'asse Z di un dato sistema di riferimento cartesiano. Non avendo ancora chiarito cos'è che si “propaga” con un'onda elettromagnetica, questa affermazione può suonarvi un po' oscura⁵. Però di fatto essa ci consente di dire che i campi elettrico e magnetico dell'onda, avendo fissato un istante di osservazione, cioè scattando un'istantanea della situazione fisica, variano *solo muovendosi lungo la direzione di propagazione*, cioè, nel nostro caso, lungo l'asse Z . Come potete facilmente verificare ricordando il significato degli operatori div e rot , che contengono delle derivate rispetto alla posizione, questa assunzione consente notevoli semplificazioni ai primi membri delle equazioni di Maxwell.
3. Come corollario della assunzione precedente, notate che ci stiamo di fatto restringendo a considerare delle **onde piane**, cioè onde in cui i campi elettrico e magnetico, misurati ad un dato istante, hanno valore *uniforme* su dei piani⁶. Assumiamo inoltre che le *direzioni* dei vettori \vec{E} e \vec{B} appartengono a delle rette che giacciono su

³Questo obiettivo richiederebbe un'analisi molto più complessa, nella quale non potremmo prescindere dalla considerazione che la velocità della luce, la massima a cui si può immaginare di propagare informazione, ha un valore finito. Vi basti ricordare che la generazione di onde elettromagnetiche implica la presenza di cariche elettriche in moto *non stazionario*, cioè dotate di accelerazione non nulla. Notate che questa situazione si verifica tipicamente in casi di moto oscillatorio!

⁴In realtà in uno degli esercizi che seguono vedremo un semplicissimo modello di rivelatore, o “antenna”.

⁵Potete però subito intuire che non tutte le onde hanno questa caratteristica. Ad esempio, le onde elettromagnetiche emesse dal sole, ovvero la *radiazione luminosa* che esso produce, non hanno una direzione particolare di propagazione, dato che esse vanno in modo isotropo in tutte le direzioni. Alle onde di questo tipo si dà il nome di **onde sferiche**.

⁶Vedremo poi che esistono infiniti di questi piani, che si chiamano **fronti d'onda**.

questi piani. Questo significa che consideriamo onde con **polarizzazione lineare**, cioè tali che la *direzione* dei campi non varia né con la posizione né con il tempo⁷.

4. Supponiamo ora che il campo elettrico sia diretto lungo l'asse X .⁸ Ragioniamo ora su quale possa essere la direzione di \vec{B} . Il primo membro della seconda delle Eqq. 1.1, tenendo conto che \vec{E} è diretto lungo X e dipende solo dalla coordinata z , secondo quanto abbiamo stabilito, rappresenta un vettore le cui componenti X e Z sono nulle, come potete facilmente vedere esplicitando il prodotto vettoriale che costituisce l'operatore rot. Quindi $\frac{d\vec{B}}{dt}$ deve essere diretto lungo Y ; dato che la direzione dei campi rimane costante, come abbiamo affermato, questo implica che \vec{B} sia diretto lungo l'asse Y . Dunque in un'onda elettromagnetica si ha che *le direzioni del campo elettrico, di quello magnetico e la direzione di propagazione sono mutuamente ortogonali fra loro*, e formano una terna cartesiana destrorsa⁹.
5. Infine, come già anticipato, limitiamoci a considerare l'equazione d'onda per il campo elettrico. Infatti, come ci suggerisce la "struttura formale" delle equazioni di Maxwell, e come vedremo meglio in seguito, l'equazione d'onda per il campo magnetico ha una forma molto simile a quella per il campo elettrico. In altre parole, avendo determinato la funzione d'onda per \vec{E} (e sapendo che si tratta di un'onda piana propagante) saremo in grado di stabilire anche la funzione d'onda di \vec{B} .

Avendo stabilito questo insieme di assunzioni e considerazioni, non è difficile dimostrare che, operando con un po' di algebra¹⁰, il sistema di equazioni differenziali *accoppiate* descritto da Eq. 1.1 si riduce alla seguente equazione differenziale al secondo ordine per il campo elettrico¹¹:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E}{dt^2}, \quad (1.5)$$

dove abbiamo ommesso il pedice X al campo elettrico E , perché già sappiamo che esso ha *solo* componenti lungo questa direzione. L'analoga equazione d'onda per il campo magnetico ha un'espressione che ha esattamente la stessa forma:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 B}{dt^2}, \quad (1.6)$$

dove si è ommesso il pedice Y al campo magnetico B per le stesse ragioni di sopra.

⁷Attenzione: direzione non significa verso, e inoltre la direzione di \vec{E} e \vec{B} *non coincidono affatto!*

⁸Ovviamente possiamo fare tranquillamente questa scelta, dato che la direzione X del nostro sistema di riferimento è ortogonale alla direzione Z , che abbiamo assunto essere quella di propagazione. Dunque la direzione X appartiene al fronte d'onda piano dell'onda. In altre parole, questa assunzione non implica di restringersi a casi particolari!

⁹Vuol dire che, se ad esempio l'onda si propagasse lungo l'asse X e il campo elettrico avesse direzione Y , allora il campo magnetico avrebbe direzione Z ; provate a giocare con le tre dita della mano destra per vedere quale sarebbe la direzione di \vec{B} se \vec{E} fosse lungo Z !

¹⁰I dettagli li possiamo risparmiare, ma si tratta davvero di pochi passaggi algebrici e semplificazioni.

¹¹Notate che questa equazione non è accoppiata, dato che al primo e al secondo membro compare solo il campo elettrico, e non quello magnetico.

Da un rapido controllo dimensionale, potete facilmente rendervi conto che la grandezza $\mu_0\epsilon_0$ ha le dimensioni dell'inverso di un quadrato di velocità; questa velocità, a cui si dà il nome di **velocità di fase** dell'onda, indica proprio, nel semplice caso che stiamo considerando, la velocità con cui si muove la perturbazione, cioè la velocità di propagazione dell'onda. Ora, tutti sapete che tra i postulati della relatività ristretta c'è quello che una qualsiasi velocità, e quindi in particolare questa di cui stiamo trattando, ha un massimo valore possibile, la velocità della luce $c \approx 3.0 \times 10^8$ m/s. Un secolo fa Einstein stabilì che le onde elettromagnetiche che si propagano *nel vuoto* viaggiano proprio alla velocità della luce¹², per cui si ha:

$$\frac{1}{\mu_0\epsilon_0} = c^2. \quad (1.7)$$

Notate che di questa velocità sappiamo anche la direzione, che è quella di propagazione, che qui abbiamo assunto essere Z ; quindi, volendo, è possibile esprimere vettorialmente la velocità di fase¹³.

Troviamo ora una soluzione per l'Eq. 1.5; è immediato verificare che la funzione

$$E(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi), \quad (1.8)$$

con E_0 valore costante (**ampiezza** dell'onda), k, ω, ϕ da determinare. Se infatti introduciamo questa funzione nell'Eq. 1.5, facendo un po' di derivate troviamo che l'uguaglianza tra primo membro è soddisfatta se

$$\frac{\omega}{k} = c; \quad (1.9)$$

quindi la funzione espressa in Eq. 1.8, assieme alla relazione di Eq. 1.9, costituisce la *funzione d'onda* per il campo elettrico nel caso di *onda piana polarizzata linearmente*. Inutile dire che la soluzione per il campo magnetico (Eq. 1.6) è formalmente simile:

$$B(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t + \phi). \quad (1.10)$$

Il valore della **fase** costante ϕ che compare nelle funzioni si determina conoscendo le condizioni iniziali (o condizioni al contorno) del particolare problema che si sta esaminando, come vedremo negli esercizi nel seguito. Si vede in ogni caso che campo elettrico e magnetico hanno la stessa dipendenza spazio-temporale (la stessa funzione coseno), cioè, come si dice, *oscillano in fase* tra loro.

Vale la pena di dare ora un po' di nomenclatura: come già affermato, E_0 e B_0 si dicono *ampiezze* dei campi elettrici e magnetici¹⁴, ω è la **pulsazione** dell'onda, legata come di consueto alla frequenza ν attraverso la relazione $\nu = \omega/(2\pi)$,¹⁵ mentre a k si dà il nome di *numero d'onda* o, meglio, **vettore d'onda**. In effetti è possibile costruire un *vettore \vec{k}* assumendo come sua direzione quella di propagazione dell'onda. Notate come la dimensione di questa grandezza sia *l'inverso di una lunghezza*.

¹²Così si chiarisce anche il significato del termine: la luce è un'onda elettromagnetica!

¹³Se ricordate cosa abbiamo stabilito per i valori della costante dielettrica e della permeabilità magnetica nei mezzi materiali, potete facilmente rendervi conto che, per onde che si propagano *dentro un materiale*, si ha sempre $v = (\mu_0\mu_R\epsilon_0\epsilon_R)^{-1/2} \leq c$.

¹⁴Ricordate che si tratta di grandezze vettoriali, e di cui abbiamo già stabilito le direzioni; vedete che, comparando delle funzioni coseno, il "segno" (e quindi il *verso*) dei campi può cambiare continuamente!

¹⁵Osservate come in tutto questo capitolo tratteremo di **onde monocromatiche**, fatte cioè di oscil-

1.2.1 Onde piane propaganti, monocromatiche, polarizzate linearmente

Esaminiamo ora il “significato fisico” delle funzioni d’onda che abbiamo scritto. Supponiamo a questo scopo di avere un ricevitore, cioè un sistema in grado di misurare il campo elettrico (e/o quello magnetico) generato dall’onda in funzione della posizione e del tempo¹⁶. Consideriamo prima una situazione in cui decidiamo di fissare la *posizione* del ricevitore, cioè di assegnare una terna di coordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ di un dato sistema di riferimento cartesiano in cui supponiamo di condurre la nostra misura. Notiamo subito che la funzione d’onda del nostro esempio, l’Eq. 1.8, non presenta alcuna dipendenza dai valori di x, y . Infatti, coerentemente con la scelta di avere un’*onda piana* che si propaga in direzione dell’asse Z , il luogo geometrico dei punti in cui si misura un campo uniforme (ad un dato istante) è costituito da piani ortogonali all’asse Z (ovvero paralleli ad XY); la geometria ci insegna che questi piani sono individuati dalla coordinata z , che in questo caso abbiamo posto pari a \bar{z} .¹⁷ Il nostro ricevitore leggerà in funzione del tempo un campo elettrico di ampiezza oscillante periodicamente secondo la legge $E(\bar{z}, t) = E_0 \cos((k\bar{z} + \phi) - \omega t)$, dove, con un uso accorto delle parentesi, abbiamo messo in evidenza che l’unica dipendenza è quella dal tempo t . L’andamento che otteniamo è quindi *periodico*: se grafichiamo l’ampiezza del campo in funzione del tempo, come in Fig. 1.2.1(a), otteniamo infatti un andamento di tipo coseno, con un valore all’istante $t = 0$ che dipende dal valore di $(k\bar{z} + \phi)$. Se esaminiamo l’andamento della funzione, possiamo facilmente concludere che lo stesso valore del campo si misura ad istanti che distano fra loro di una quantità pari al **periodo** T dell’onda, che vale ovviamente $T = 2\pi/\omega = 1/\nu$. Quindi possiamo definire il periodo come la distanza temporale tra due istanti *consecutivi* in cui l’ampiezza del campo elettrico assume lo stesso valore, ad esempio il valore massimo.

Immaginiamo ora, invece, di avere a disposizione diversi ricevitori e di collocarli nello spazio in posizioni z diverse¹⁸; se i ricevitori a nostra disposizione sono tantissimi, possiamo ragionevolmente supporre di poter seguire in questo modo l’andamento del campo elettrico in funzione di z (nel nostro esempio, la coordinata lungo l’asse di

lazioni che avvengono ad *una sola* frequenza. In funzione del tipo di sorgente che si impiega, possono esistere onde che sono sovrapposizione di *componenti* spettrali di diversa frequenza, anzi, per ragioni di carattere fondamentale ben interpretate dalla meccanica quantistica, in natura *non esistono onde puramente monocromatiche*. Tuttavia assumeremo che esse esistano dato che l’approccio monocromatico è molto più semplice ed accessibile.

¹⁶Avremo modo di sottolineare come questo obiettivo possa essere abbastanza difficile da raggiungere a causa della natura rapidamente oscillante dei campi elettromagnetici.

¹⁷Notate che le onde piane di cui stiamo trattando “riempiono” tutto lo spazio; questa è chiaramente un’approssimazione, utile per semplificare il problema, dato che in genere qualsiasi onda elettromagnetica ha una sua *estensione trasversa* finita. Altrettanto evidente è che le nostre onde hanno anche un’“estensione temporale” *emphinfinita*, cioè il campo, ovvero la sua sorgente, è stato “acceso” ad un istante infinitamente precedente rispetto a $t = 0$ e rimane in funzione fino ad istanti infinitamente posteriori a $t = 0$. Naturalmente anche questa è un’utile approssimazione, abbastanza ragionevole in molti casi, e che, tra l’altro, è essenziale per poter considerare *monocromatica* la nostra onda.

¹⁸A causa del carattere *piano* dell’onda, le posizioni “trasverse” dei ricevitori (le loro coordinate x, y) sono irrilevanti.

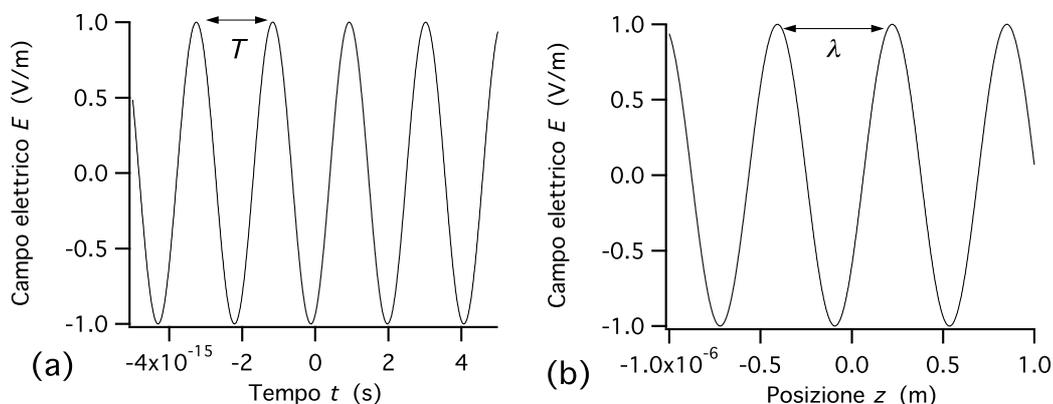


Figura 1.1: Grafico del valore del campo elettrico in funzione del tempo t per una posizione fissata \bar{z} in un'onda piana monocromatica propagante (a); grafico del valore del campo elettrico in funzione della posizione z ad un istante fissato \bar{t} in un'onda piana monocromatica propagante (b). Per calcolare i grafici sono stati usati i seguenti valori numerici, ragionevoli nel caso di radiazione luminosa visibile (notate gli ordini di grandezza!): $kappa = 1.0 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 3.0 \times 10^{15} \text{ rad/s}$, $E_0 = 1.0 \text{ V/m}$; si è supposto inoltre che $\bar{z} = 2.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ (in (a)), $\bar{t} = 1.0 \times 10^{-15} \text{ s}$ (in (b)) e $\phi = \pi/4$ (in tutti e due i grafici). Nelle figure sono indicati periodo T e lunghezza d'onda λ definiti come nel testo.

propagazione dell'onda). Supponiamo quindi di misurare il campo con i nostri ricevitori ad un dato istante \bar{t} , cioè di “scattare un'istantanea” del campo in diverse posizioni dello spazio. Secondo l'Eq. 1.8, il campo elettrico dipenderà da z attraverso la legge: $E(z, \bar{t}) = E_0 \cos(kz - (\omega\bar{t} - \phi))$; anche in questo caso otteniamo una funzione di tipo coseno, il cui valore a $z = 0$ dipende da $(\omega\bar{t} - \phi)$, come rappresentato in Fig. 1.2.1(b). Al “periodo” (inteso in senso spaziale) di questa funzione si dà il nome di **lunghezza d'onda** λ , che quindi rappresenta la distanza (misurata lungo l'asse Z) tra punti in cui il campo ha lo stesso valore. Ricordando la definizione di *fronte d'onda*, cioè del luogo geometrico formato da punti in cui, ad un dato istante, il campo ha uno stesso valore, possiamo concludere che la lunghezza d'onda rappresenta la distanza tra due fronti d'onda (piani) consecutivi con lo stesso valore del campo. Nel grafico che abbiamo idealmente costruito, la lunghezza d'onda è la distanza tra due punti (consecutivi) in cui l'ampiezza del campo ha un dato valore, ad esempio quello massimo. Si ottiene facilmente la relazione $\lambda = 2\pi/k$.

Dunque, nelle onde che stiamo considerando il ruolo di tempo e spazio è in qualche modo “intercambiabile”; infatti, la caratteristica peculiare delle onde (piane) propaganti è, dal punto di vista matematico, che coordinate spaziali e temporali compaiono “assieme” nell'argomento di una funzione periodica (di tipo coseno o seno¹⁹). La conseguenza fisica

¹⁹Ricordate sempre che è possibile passare da un coseno ad un seno, o viceversa, aggiungendo o togliendo termini di fase (costanti) multipli interi di $\pi/4$; nelle nostre funzioni d'onda questo può essere facilmente ottenuto attraverso un'opportuna scelta del termine ϕ .

di questo legame tra spazio e tempo è proprio la *propagazione*. Supponiamo infatti di scattare due “istantanee” al campo elettrico, la prima all’istante \bar{t} , come abbiamo già fatto, e la seconda dopo aver atteso un intervallo di tempo Δt , cioè all’istante $\bar{t} + \Delta t$ (supponiamo $\Delta t > 0$). Le due misure che otteniamo sono rappresentate in Fig. 1.2.1: in sostanza abbiamo due funzioni di tipo coseno, della stessa ampiezza ma traslate l’una rispetto all’altra di una quantità che vale proprio Δt . Individuiamo un “punto” del grafico misurato a \bar{t} , per esempio un punto di massimo come in figura, e chiamiamo z_{max} il valore della sua ascissa. Poiché il massimo della funzione coseno si ha quando l’argomento è nullo (ovvero vale $2n\pi$, con n intero, ma qui supponiamo di considerare il punto con $n = 0$), il valore di z_{max} deve soddisfare la relazione $(kz_{max} - (\omega\bar{t} - \phi)) = 0$, cioè $z_{max} = (\omega\bar{t} - \phi)/k$. Dopo l’intervallo Δt lo stesso punto di massimo avrà un’ascissa z'_{max} tale che $(kz'_{max} - (\omega(\bar{t} + \Delta t) - \phi)) = 0$, ovvero $z'_{max} = (\omega(\bar{t} + \Delta t) - \phi)/k$. Risulta quindi che $\Delta z = z'_{max} - z_{max} = (\omega/k)\Delta t$.

Quello che abbiamo trovato è quindi che il punto di massimo si è spostato nell’intervallo Δt come se si fosse mosso di moto *rettilineo uniforme*, con una velocità $v = \omega/k$ che, nel nostro esempio, è evidentemente diretta nel verso positivo dell’asse Z . Questa velocità è proprio la *velocità di fase* definita nel paragrafo precedente; quindi, per onde che si propagano *nel vuoto*, deve essere $c = \omega/k$; combinata con le relazioni, già riportate, $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi\nu$, questa uguaglianza fornisce il seguente, utile, legame tra lunghezza d’onda e frequenza di un’onda: $\lambda = c/\nu$, ovvero tanto maggiore è la frequenza ν , tanto minore è la lunghezza d’onda λ .

Poiché possiamo ripetere il ragionamento appena svolto per una qualsiasi scelta del valore del campo elettrico²⁰ (cioè per qualsiasi scelta della coordinata z), possiamo concludere che il carattere propagante di un’onda (piana e monocromatica) significa che *i fronti d’onda “si muovono” a velocità costante ed uniforme $v = \omega/k$* (vale $v = c$, velocità della luce, se l’onda si propaga nel vuoto). Questo concetto si riassume spesso nella definizione di **progressiva** per un’onda i cui fronti d’onda “progrediscono” nel verso positivo di una direzione (l’onda sarebbe *regressiva* per $k < 0$, cioè per $v < 0$). Per generalizzare questo risultato ad onde che si propagano in una direzione qualsiasi dello spazio, possiamo prendere l’espressione *vettoriale* del vettore d’onda \vec{k} , la cui direzione coincide con quella di propagazione; dunque, detto \vec{r} un vettore che indica una posizione qualsiasi nello spazio (rispetto ad un dato sistema di riferimento), potremo scrivere la funzione d’onda del campo elettrico come $E(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$ e quella del campo magnetico corrispondente come $B(\vec{r}, t) = B_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$ e dire che fronti d’onda si muovono nella direzione e verso di \vec{k} con velocità costante ed uniforme di modulo $v = \omega/|k|$. È quindi ovvio che, nell’esempio considerato finora (onda che si propaga nel verso positivo dell’asse Z), abbiamo preso $\vec{k} = k\hat{z}$; infatti le regole del prodotto scalare ci dicono che in questo caso è $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$.

²⁰Vi sarà chiaro che tutto quanto abbiamo stabilito per il campo elettrico avremmo potuto trasferirlo pari pari al campo magnetico, ottenendo identici risultati!

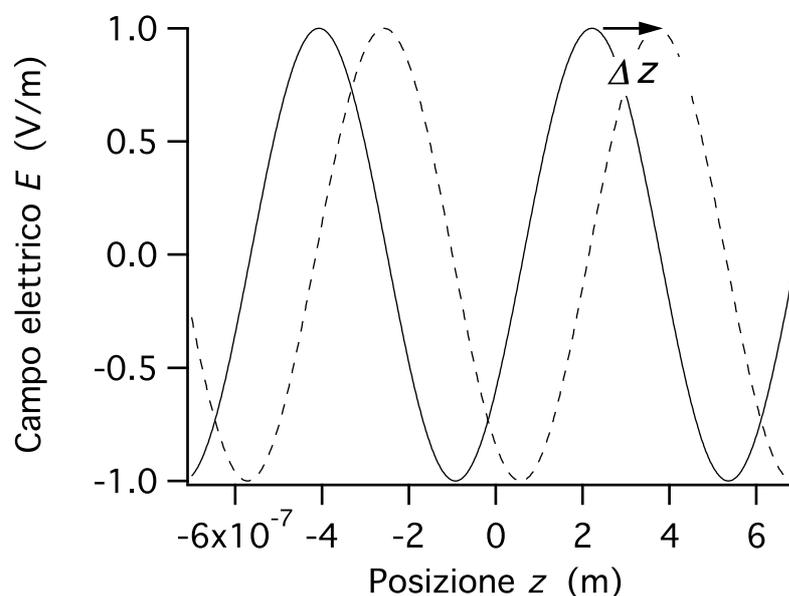


Figura 1.2: Rappresentazione del carattere propagante di un'onda piana progressiva che si “muove” nel verso positivo dell'asse Z . I parametri usati per il calcolo sono gli stessi di Fig. 1.2.1, e la dipendenza del campo elettrico dalla posizione è mostrata all'istante $\bar{t} = 1.0 \times 10^{-15}$ s (linea continua) e all'istante $\bar{t} + \Delta t$, con $\Delta t = 5.0 \times 10^{-16}$ s.

1.2.2 Relazione tra campo elettrico e magnetico

Abbiamo già ripetutamente affermato che, nelle onde di cui ci occupiamo, campo elettrico e magnetico sono legati fra loro in modo che è sufficiente esprimere la funzione $\vec{E}(\vec{r}, t)$ per poter stabilire la funzione $\vec{B}(\vec{r}, t)$. In effetti abbiamo già visto come la dipendenza funzionale sia rappresentabile con la stessa funzione coseno (e con lo stesso argomento). Resta da stabilire il legame tra le ampiezze E_0 e B_0 .

Questo può essere facilmente ottenuto riprendendo una delle equazioni di Maxwell che contengono il rotore, ad esempio $\text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$;²¹ tenendo conto della relazione di mutua ortogonalità tra le direzioni di \vec{E} , \vec{B} e \vec{k} (quella di propagazione), e ricordando le regole del prodotto vettoriale, si ha, come già visto, $\frac{dE}{dz} = -\frac{dB}{dt}$. Inserendo in questa relazione l'espressione delle funzioni d'onda per $E(z, t)$ e $B(z, t)$ e calcolando le derivate (occhio ai segni!), si ottiene che deve essere verificato il seguente legame tra le ampiezze E_0 e B_0 :

$$\frac{dE}{dz} = kE_0 \cos(kz - \omega t + \phi) = -\frac{dB}{dt} = \omega B_0 \cos(kz - \omega t + \phi), \quad (1.11)$$

ovvero $B_0 = (k/\omega)E_0 = E_0/v = E_0/c$ (l'ultima uguaglianza vale per propagazione nel vuoto).

²¹Qui ed altrove abbiamo ommesso di indicare la dipendenza funzionale dei campi con posizione e tempo per non appesantire la notazione.

Ricordando che, per onde *polarizzate linearmente*, le direzioni di \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} formano una terna destrorsa (con il significato già stabilito prima) e tenendo conto della regola della mano destra per il prodotto vettoriale, possiamo costruire una relazione “compatta” tra i campi elettrici e magnetici, che vale in qualsiasi istante e qualsiasi posizione (per le onde qui considerate): $\vec{B} = (\vec{k} \times \vec{E})/\omega$.

1.2.3 Esercizio: radio libera

Come recita il display della vostra autoradio (come diceva un tempo la “scala parlante” di un apparecchio radio), le “radio libere” trasmettono onde elettromagnetiche di frequenza attorno a 100 MHz. Allora, supponiamo che la nostra stazione abbia proprio una frequenza $\nu = 100$ Mhz, emetta onde monromatiche piane che si propagano lungo l’asse Z di un sistema di riferimento, e che l’ampiezza del campo elettrico dell’onda, misurata nel punto $z = 0$, assuma il suo valore massimo $E_{max} = 60$ V/m nell’istante $t = 0$.²² Quanto vale la lunghezza d’onda λ ? Come si scrive la funzione d’onda $B(z, t)$ per il campo magnetico?

Soluzione. Supponiamo propagazione nel vuoto, che rappresenta un’ottima approssimazione anche per la propagazione nell’aria che si ha generalmente con onde di questo tipo. Dalle relazioni sopra scritte, troviamo $\lambda = c/\nu = 3.0$ m. L’ampiezza massima del campo magnetico vale $B_0 = E_{max}/c = 6.0 \times 10^{-7}$ T (le unità di misura sono tutte “coerenti fra loro”); quindi la funzione d’onda del campo magnetico si scrive $B(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t + \phi)$, con B_0 appena determinato, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi c/\nu = 2.9$ m⁻¹. e $\phi = 0$, come si vede notando che la funzione coseno deve avere un suo massimo per $t = 0$ e $z = 0$ secondo quanto suggerito nel testo.

1.2.4 Esercizio: antenna a spira

Abbiamo un’onda nel vuoto il cui campo elettrico è diretto lungo l’asse Z (occhio!) ed è rappresentato dalla funzione $E_0 \sin(kx - \omega t)$, con E_0 ed ω noti. Sul piano XZ si trova una spira fatta con un filo elettrico di dimensioni e resistenza trascurabili. La spira ha forma quadrata di lato L (noto), ed uno dei suoi vertici si trova nell’origine, come indicato in Fig. 1.2.4. Come si scrive la forza elettromotrice $\varepsilon(t)$ che si instaura sulla spira?

Soluzione. Questo esercizio può sembrare un po’ spiazzante, ma è invece molto semplice e significativo. Vediamo infatti che un’onda elettromagnetica è associata ad un campo magnetico oscillante, dunque variabile nel tempo. La legge di Faraday (o, se preferite, l’equazione di Maxwell) stabilisce che questo campo magnetico può generare una forza elettromotrice su una spira, a patto che questa sia attraversata dalle linee di campo magnetico. Cominciamo con lo scrivere il campo magnetico di questa onda usando i dati del testo. Notate che in questo caso la propagazione avviene lungo l’asse X (supponiamo nel verso positivo), e non lungo Z come negli esempi che abbiamo considerato. Inoltre sappiamo che il campo elettrico è diretto lungo l’asse Z (e non X come negli esempi); quindi, usando la regola della mano destra, il campo magnetico viene ad avere

²²Ovviamente, lo stesso valore massimo si registra anche in infiniti altri istanti separati da $t = 0$ per un numero intero di periodi.

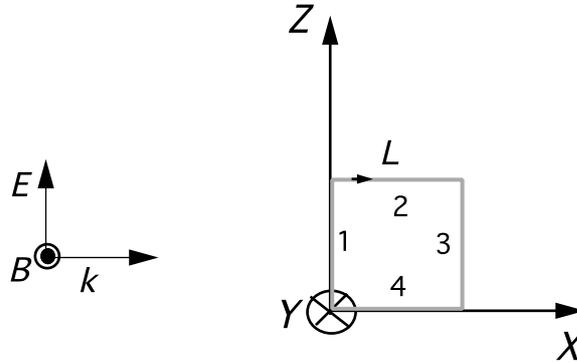


Figura 1.3: Rappresentazione schematica della configurazione geometrica per l'esercizio della spira citato nel testo.

ancora la direzione dell'asse Y , ma *verso negativo*. Solo così, infatti, la terna individuata dalle direzioni di campo elettrico, magnetico e propagazione (nell'ordine!) ha carattere destrorso, cioè è individuata da pollice, indice, medio (nell'ordine!) della mano destra. Inoltre, conoscendo la pulsazione ω , possiamo determinare il modulo del vettore d'onda, $k = \omega/c$, mentre l'ampiezza del campo magnetico sarà $B_0 = E_0/c$. Avremo quindi $\vec{B}(x, t) = -(E_0/c) \sin(kx - \omega t) \hat{y}$, dove \hat{y} indica il versore dell'asse Y ed il segno negativo è stato messo per indicare il verso *negativo* del campo magnetico²³. Osservate poi che questa funzione d'onda è descritta da una funzione seno, e non coseno come negli esempi del testo. Questo non deve porvi alcun problema, dato che, come già affermato, si può tranquillamente passare da coseno a seno supponendo sfasamenti costanti; in altre parole, se preferite potete anche usare una funzione coseno, con l'avvertenza di usare un termine di fase costante $\phi = \pi/4$.

Ora, la spira è posta sul piano XZ , ortogonale rispetto all'asse Y , e pertanto essa è attraversata dal campo magnetico, che quindi può produrvi un flusso non nullo $\Phi(\vec{B})$. Secondo la legge di Faraday, la variazione temporale di questo flusso, cambiata di segno, è proprio pari alla forza elettromotrice. In effetti la strada della legge di Faraday potrebbe essere presa per trovare la soluzione, ma a patto di risolvere un problema tecnico non semplicissimo. Infatti all'interno della spira ci sono posizioni in cui varia la coordinata x , e quindi il valore del campo magnetico. Nel calcolare l'integrale (di superficie) che determina il flusso dovremmo tenere in debito conto questa dipendenza, complicandoci assai la vita dal punto di vista matematico. Conviene invece seguire una strada più diretta, basata sulla definizione di forza elettromotrice. Ricordiamo infatti che, per definizione,

²³Chiaramente il verso oscilla continuamente tra negativo e positivo; il segno meno significa che il campo magnetico è orientato nel verso negativo dell'asse Y negli istanti in cui il campo elettrico è orientato nel verso positivo dell'asse Z .

è $\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, dove il simbolo indica una *circuitazione* (e opportune regole stabiliscono delle convenzioni sui segni, a cui qui non diamo importanza dato che siamo interessati fondamentalmente a trovare il valore assoluto della forza elettromotrice). In effetti in questo problema conosciamo il valore che il campo elettrico ha in tutti i punti dello spazio e in qualsiasi istante di tempo, dato che conosciamo la funzione d'onda del campo stesso.

La circuitazione, fatta sulla spira quadrata, dà luogo alla somma di quattro integrali di linea da eseguire sui quattro lati del quadrato tenendo conto del verso di circuitazione (supponiamo di prendere quello indicato in Fig. 1.2.4). Sui lati 2 e 4 di figura gli integrali sono nulli, dato che essi sono paralleli all'asse X mentre il campo è diretto lungo Z (e quindi il prodotto scalare che compare nella circuitazione fa zero). I lati 1 e 3, invece, sono paralleli al campo; notiamo che questi lati intercettano l'asse X nei punti rispettivamente $x = 0$ ed $x = L$. Quindi muovendosi su questi lati il valore del campo elettrico resta uniforme, e dunque il campo elettrico “esce dall'integrale”; si riduce allora a moltiplicare il valore del campo, calcolato alla posizione x dei lati, per la lunghezza dei segmenti che rappresentano i lati della spira. Si ottiene: $\varepsilon_1 = E(x = 0, t)L$ e $\varepsilon_3 = -E(x = L, t)L$, dove il segno negativo tiene conto del verso della circuitazione; quindi, sommando i due contributi ed esplicitando la funzione d'onda, si ottiene: $\varepsilon = E_0L(\sin(-\omega t) - \sin(kL - \omega t))$. Come era lecito aspettarsi, la forza elettromotrice è funzione periodica del tempo. Vediamo quanto vale il valore massimo ε_{max} che essa può assumere. A questo scopo, ricordiamo che $k = 2\pi/\lambda$ e calcoliamo il vettore d'onda per due casi speciali: $L = \lambda/2$ ed $L = \lambda$. Nel primo caso $kL = \pi$, per cui, ricordando che $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, si ha $\varepsilon = 2E_0L \sin(\omega t)$, da cui $\varepsilon_{max} = 2E_0L$ (valore che si ottiene per $\omega t = -n\pi$, con n intero). Nel secondo caso, invece, $kL = 2\pi$, per cui $\varepsilon = E_0L(\sin(-\omega t) - \sin(-\omega t)) = 0$, cioè la forza elettromotrice è sempre identicamente nulla! Notate che queste affermazioni valgono anche per lunghezze L multiple (intere) di $\lambda/2$ e di λ rispettivamente, e che il loro significato è ovvio osservando che la circuitazione sulla spira impone di “fare la differenza” tra il valore del campo nel punto $x = 0$ e nel punto $x = L$; qui, se L è un multiplo di metà lunghezza d'onda, il campo è sempre invertito rispetto al punto $x = 0$, altrimenti è sempre identico, da cui il risultato.

Come commento finale a questo esercizio, notate che la spira rappresenta, di fatto, un modo per “catturare” il campo elettrico oscillante dell'onda, rendendolo disponibile come “segnale elettrico” per ulteriori manipolazioni, conversioni, etc.. In altre parole, la spira costituisce un esempio, il più semplice possibile, di **antenna** per un ricevitore di onde elettromagnetiche.

1.2.5 Onde stazionarie

Le onde elettromagnetiche propaganti di cui abbiamo trattato finora sono, di fatto, dei campi elettrici e magnetici che variano nel tempo e nello spazio secondo una determinata legge. In quanto campi (vettoriali), è lecito attendersi che, nel caso in cui in una data regione di spazio ci sia più di una onda, si possa applicare il *principio di sovrapposizione*, cioè determinare il campo complessivo, ovvero l'onda “complessiva”, sommando (vettorialmente) i campi di partenza. Questa considerazione dà luogo ad una varietà di

conseguenze, legate a fenomeni di grande interesse pratico (ad esempio, l'interferenza tra onde, i "battimenti", etc.). Qui ci limitiamo a considerare una situazione specifica, che ci permetterà di determinare la forma matematica di onde che *non si propaano*.

Consideriamo allora due onde piane, monocromatiche, *linearmente polarizzate lungo la stessa direzione*, identiche fra loro ma che si propagano in versi opposti della stessa direzione; a queste onde, che chiameremo $E_1(z, t), E_2(z, t)$, si dà spesso il nome di **contropropaganti**. Per chiarire, supponiamo che la direzione di polarizzazione (quella dei vettori $\vec{E}_1(z, t), \vec{E}_2(z, t)$, sia quella dell'asse X , e che la propagazione avvenga lungo l'asse Z . Per semplificare, poniamo pari a zero il termine di fase costante. cioè $\phi = 0$. Detti k ed ω vettore d'onda e pulsazione delle due onde (sono le stesse per le due onde), ed $E_{0,1}, E_{0,2}$ le loro ampiezze, per il momento arbitrarie, potremo avere, ad esempio: $E_1(z, t) = E_{0,1} \cos(kz - \omega t)$, $E_2(z, t) = E_{0,2} \cos(-kz - \omega t) = E_{0,2} \cos(kz + \omega t)$. Osservate come le due onde abbiano una dipendenza funzionale simile, ma non identica: infatti il segno negativo di fronte al termine kz nella seconda onda sta proprio ad indicare che quest'onda si propaga nel verso *negativo* dell'asse Z (supponendo $k > 0$), e l'ultima uguaglianza è resa possibile dalle note regole di trigonometria per cui $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Poiché i campi delle due onde sono diretti entrambi nella stessa direzione, la X , secondo quanto supposto, e quelle che abbiamo scritto sono in realtà le *componenti* dei campi lungo questa direzione, la somma vettoriale significa che l'onda "complessiva" $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t)$ sarà diretta ancora lungo X e la sua funzione d'onda sarà: $E(z, t) = E_{0,1} \cos(kz - \omega t) + E_{0,2} \cos(kz + \omega t)$. Facciamo ora l'ulteriore assunzione che $E_{0,2} = -E_{0,1}$; si ottiene allora: $E(z, t) = E_{0,1}(\cos(kz - \omega t) - \cos(kz + \omega t))$. La trigonometria ci suggerisce che, in generale, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$, per cui, riarrangiando e raggruppando i vari termini, possiamo scrivere: $E(z, t) = 2E_{0,1} \sin(kz) \sin(\omega t)$.

Questa funzione esprime un'onda che ha caratteristiche ben diverse rispetto a quelle delle onde che abbiamo incontrato finora. Se confrontiamo l'espressione appena ottenuta con, ad esempio, l'Eq. 1.8, possiamo facilmente renderci conto che in entrambe le situazioni abbiamo una dipendenza da tempo (t) e posizione (z), ma qui queste variabili compaiono come argomenti di due distinte funzioni trigonometriche²⁴. Proviamo a ripetere le osservazioni fatte per le onde progressive; ad esempio, scegliamo una data posizione, \bar{t}_1 , e grafichiamo l'andamento del campo in funzione della posizione z . La Fig 1.2.5 mostra questo grafico, che, ha ovviamente, l'andamento di un seno. Se ripetiamo la procedura per un istante diverso, \bar{t}_2 , quello che osserviamo è una "modulazione" dell'ampiezza del campo, dovuta alla presenza della funzione $\sin(\omega t)$ a moltiplicare la funzione $\sin(kz)$; addirittura, ci sono istanti (quelli in cui $\omega t = n\pi$, con n intero) in cui il valore del campo elettrico si annulla identicamente in tutti i punti. In ogni caso, non troviamo mai il comportamento "progressivo" (o "regressivo") delle onde propaganti: qui al passare del tempo i fronti d'onda *non si muovono* affatto, a differenza di quanto avevamo osservato in Fig. 1.2.1. Ad esempio, se consideriamo i punti nello spazio in cui la funzione intercetta l'asse delle ascisse (questi punti si chiamano **nodi** dell'onda), vediamo che essi "non si spostano mai", così come i punti di massimo (chiamati **ventri**). Un'onda di questo tipo

²⁴Con una scelta diversa di $E_{0,2}$ avremmo potuto ottenere funzioni coseno invece che seno: provateci!

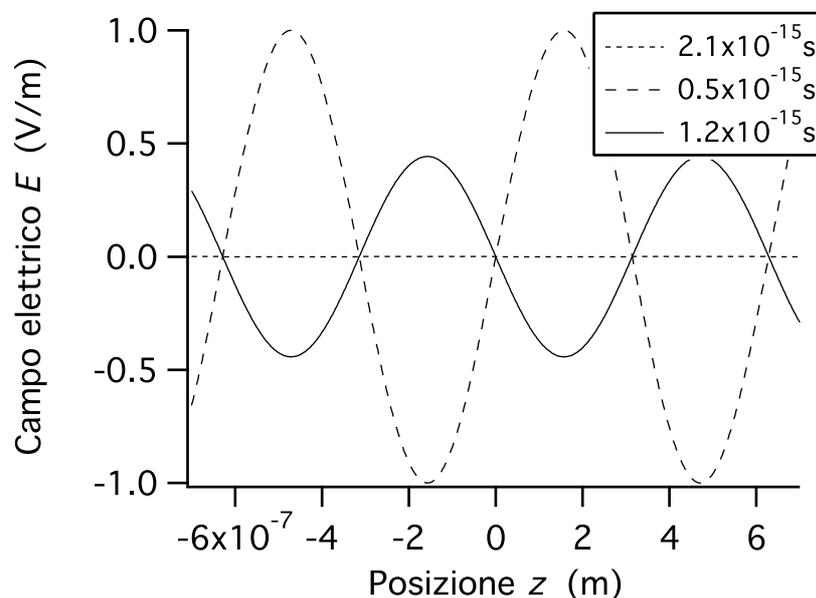


Figura 1.4: Campo elettrico dell'onda stazionaria derivata nel testo in funzione della posizione z . I parametri usati per il calcolo sono gli stessi di Fig. 1.2.1; le tracce si riferiscono a diversi istanti di tempo, cioè a diversi istanti *overlined* come indicato nella legenda.

si dice **onda stazionaria**, proprio ad indicare la circostanza che non c'è propagazione, ovvero spostamento, di alcun genere. L'approccio che abbiamo seguito ci mostra inoltre che un'onda stazionaria può (sempre) essere pensata come sovrapposizione di due onde progressive contropropaganti²⁵, cosa che ci tornerà utile nel seguito di questo capitolo.

1.2.6 Esercizio: campo magnetico dell'onda stazionaria

Ovviamente anche per il calcolo del campo magnetico di un'onda stazionaria si deve applicare il principio di sovrapposizione e ragionare come per il campo elettrico. Come vedremo, però, ci sono degli aspetti interessanti. Calcoliamo allora il valore del campo magnetico dell'onda stazionaria $E(z, t) = 2E_{0,1} \sin(kz) \sin(\omega t)$ che abbiamo appena costruito: qual è l'espressione di $\vec{B}(z, t)$?

Soluzione. Scriviamo il campo magnetico per le due onde contropropaganti; ricordando la relazione tra le ampiezze dei campi elettrico e magnetico nelle onde progressive, avremo, *in modulo*, $|B_{0,1}| = |E_{0,1}|/c$ e $|B_{0,2}| = |E_{0,2}|/c = |E_{0,1}|/c = |B_{0,1}|$. Pensiamo ora ai segni. Sicuramente i campi magnetici delle due onde hanno direzione Y , dato che devono essere mutuamente ortogonali alla direzione del campo elettrico e a quella di propagazione. Però, usando la regola della mano destra, possiamo stabilire

²⁵Se l'ampiezza delle due onde non fosse uguale in modulo, ne risulterebbe una composizione tra un'onda stazionaria ed una propagante.

che i *versi* sono differenti nei due casi. Infatti, per l'onda 1, che si “muove” nel verso positivo dell'asse Z , il verso del campo magnetico è concorde a quello del campo elettrico, mentre per l'onda 2, che si “muove” nel verso negativo di Z , il verso del campo magnetico è discorde rispetto a quello del campo elettrico. Ricordando che, per ipotesi, era $E_{0,2} = -E_{0,1}$, abbiamo che: $B_1(z, t) = B_{0,1} \cos(kz - \omega t) = (E_{0,1}/c) \cos(kz - \omega t)$, e $B_2(z, t) = B_{0,2} \cos(kz + \omega t) = -(E_{0,2}/c) \cos(kz + \omega t) = (E_{0,1}/c) \cos(kz + \omega t) = B_{0,1} \cos(kz + \omega t)$. Facendo la sovrapposizione ed applicando le regole di trigonometria, si ottiene: $B(z, t) = 2B_{0,1} \cos(kz) \cos(\omega t) = 2(E_{0,1}/c) \cos(kz) \cos(\omega t)$. Quindi anche il campo magnetico dà luogo, ovviamente, ad un'onda stazionaria, ma la dipendenza è diversa che nel caso del campo elettrico (funzioni coseno invece che seno). In altre parole, il campo magnetico oscilla “sfasato” rispetto a quello elettrico.

1.3 Vettore di Poynting e trasporto di energia

Torniamo a considerare delle onde propaganti: abbiamo già anticipato che esse hanno l'utilissima abilità di trasferire energia da un punto all'altro dello spazio; dimostriamo e quantifichiamo questa caratteristica. Prima di tutto, ricordiamo che la presenza di un campo (elettrico e/o magnetico) in una regione di spazio comporta l'esistenza di una *energia*. Infatti, come dimostrato nei capitoli precedenti, ad un campo elettrico \vec{E} è associata, nel vuoto, una *densità di energia* (ovvero un'energia per unità di volume) $u_{el} = \epsilon_0 E^2/2$, e ad un campo magnetico, nel vuoto, è associata una densità di energia $u_{mag} = B^2/(2\mu_0)$. In un'onda elettromagnetica abbiamo campi oscillanti nel tempo, ma questa circostanza non deve porci particolari problemi: essa, infatti, implicherà in generale che tali densità di energia avranno anch'esse comportamento oscillante nel tempo, con un valore medio che potrà essere uguale o diverso da zero a seconda dei casi specifici, come vedremo nel seguito.

Abbiamo prima stabilito una precisa relazione tra \vec{E} e \vec{B} nel caso di onde propaganti (piane, monocromatiche, polarizzate linearmente). Questa relazione ha un'importante conseguenza quando si calcolano le densità di energia. Infatti, notando che, per i moduli, è $B = cE$, si ha $u_{mag} = B^2/(2\mu_0) = E^2 c^2/(2\mu_0)$; d'altra parte, nella derivazione dell'equazione dell'onda abbiamo stabilito che $c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$; sostituendo, si vede che, per un'onda *propagante*, è $u_{mag} = u_{el}$, cioè l'apporto energetico di origine magnetica uguaglia quello di origine elettrica. Dato che le energie “si sommano” (sono grandezze additive), possiamo concludere che la *densità di energia elettromagnetica* per un'onda propagante vale $u_{em} = u_{el} + u_{mag} = 2u_{el} = 2u_{mag} = \epsilon_0 E^2$.

Definiamo ora una nuova grandezza *vettoriale*, il **vettore di Poynting**: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$. Questo vettore, che, come dimostreremo, ha dimensioni di una potenza per unità di superficie, può essere definito in ogni situazione fisica in cui siano presenti, in una data regione di spazio, campi elettrici e magnetici, ma assume un ruolo molto importante proprio nel caso delle onde elettromagnetiche propaganti. Ricordando la relazione (vettoriale) che abbiamo dato nel par. 1.2.2, $\vec{B} = (k \times \vec{E})/\omega$, si vede subito, facendo il prodotto vettoriale, che il vettore di Poynting per un'onda elettromagnetica propagante è $\vec{S} = \vec{k} E^2/(\omega \mu_0)$,

cioè ha direzione e verso *coincidenti con quelli di propagazione*. Dato che, come abbiamo già stabilito, $k/\omega = 1/c$ e $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$, si ottiene, con un po' di algebra, che, per il *modulo* del vettore di Poynting, si può scrivere $S = c\epsilon_0 E^2$. Vediamo le conseguenze di questa affermazione. Allo scopo, consideriamo un'onda progressiva che si "muove" lungo l'asse Z ed una superficie di area A generica, posta ortogonalmente alla direzione di propagazione (cioè A , nel nostro esempio, appartiene al piano XY). Immaginiamo ora di aver prodotto l'onda in modo tale che all'istante $t = 0$ il "primo" fronte d'onda arrivi alla superficie²⁶; dopo un intervallo di tempo Δt (generico), questo "primo" fronte d'onda si sarà mosso di una distanza $\Delta z = c\Delta t$. In questo modo, nell'intervallo Δt un *volume* pari a $A\Delta z = Ac\Delta t$ viene "riempito" dall'onda elettromagnetica, cioè viene occupato con un campo elettrico e un campo magnetico oscillanti, quelli dell'onda. Di conseguenza, questo volume, inizialmente privo di campi, e quindi di energia, viene interessato da un'energia che vale $U_{em} = Ac\Delta t u_{em} = Ac\Delta t \epsilon_0 E^2$. Vista la situazione, è chiaro che la *potenza che passa per unità di superficie* attraverso A vale $P = U_{em}/(A\Delta t) = c\epsilon_0 E^2$, che è proprio l'espressione del modulo del vettore di Poynting. Dunque \vec{S} individua la *potenza trasportata dall'onda per unità di superficie*.

Calcoliamo ora il *flusso* di \vec{S} attraverso la superficie A : vista l'uniformità spaziale di \vec{S} e la circostanza che la superficie è ortogonale a \vec{k} , si ha semplicemente $\Phi(\vec{S}) = AS = Ac\epsilon_0 E^2$. Questo flusso rappresenta la *potenza*, ovvero l'energia per unità di tempo, che l'onda trasporta con sé. Di conseguenza, risulta dimostrato che le dimensioni del vettore di Poynting sono quelle di una potenza per unità di superficie, con unità di misura W/m^2 , e che effettivamente un'onda elettromagnetica propagante trasporta della potenza, ovvero dell'energia, da un punto all'altro dello spazio. Anche se non andremo nei dettagli di questa affermazione, è possibile anche per le onde elettromagnetiche sfruttare un principio di bilancio energetico: considerata una superficie *chiusa* nello spazio, il bilancio (detto spesso *teorema di Poynting* stabilisce che: $0 = \Phi(\vec{S}) + \frac{dU_{em}}{dt} + \Pi$, dove U_{em} è l'energia elettromagnetica all'interno del volume delimitato dalla superficie chiusa prescelta, e Π rappresenta la potenza *dissipata* in questo volume, ad esempio per effetto Joule.

Infine, come ultima osservazione, notiamo che molto spesso la frequenza di oscillazione delle onde elettromagnetiche, almeno nei casi in cui siamo interessati (ad esempio, per l'ottica), è estremamente elevata ($\omega \sim 10^{15}$ rad/s!), e spesso, per interpretare numerosi fenomeni di interazione radiazione/materia, il parametro rilevante è il *valore mediato nel tempo*, $\langle S \rangle$, del modulo del vettore di Poynting. Come già abbiamo avuto modo di incontrare, il valore medio per funzioni periodiche (generiche) $f(t)$ può essere definito come: $\langle f \rangle = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$, con $T = 2\pi/\omega$, periodo di oscillazione. Quindi per un'onda *propagante* si ha $\langle S(t) \rangle = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt$. Ora, supponendo che la funzione d'onda sia, come nei tanti esempi fatti finora, $E(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi)$, si ha $S(t) = c\epsilon_0 E^2(t) = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(Kz - \omega t + \phi)$. Chi è più versato nell'analisi matematica, potrà facilmente verificare, basandosi sul noto risultato $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \pi$, che

²⁶Questo è in contrasto con quanto abbiamo affermato a proposito del carattere monocromatico dell'onda, ed in effetti è una assunzione non indispensabile, ma sicuramente utile per descrivere il fenomeno di cui ci stiamo occupando.

$\langle S(t) \rangle = c\epsilon_0 E_0^2/2$, cioè che l'operazione di media sul tempo produce sostanzialmente un fattore $1/2$. Dunque, un'onda propagante, qualsiasi sia la sua pulsazione o lunghezza d'onda, trasporta una potenza media nel tempo diversa da zero.

1.3.1 Esercizio: campo elettrico di un laser

Un laser è una sorgente di onde elettromagnetiche, spesso nell'intervallo spettrale visibile, dotata di caratteristiche piuttosto singolari, come, in parte, avremo modo di vedere. Per il momento limitiamoci a considerare un laser di potenza $W = 5.0$ mW che produce un fascio circolare con una sezione di area $A = 1.0$ mm².²⁷ Quanto vale il valore massimo del campo elettrico, E_{max} , trasportato da questa onda?

Soluzione. Quando ci si riferisce alla potenza di una sorgente, normalmente si intende la potenza *mediata nel tempo*. Dunque il nostro laser trasporta una potenza media W su una superficie A ; in altre parole, il valore *medio* del vettore di Poynting è $\langle S \rangle = W/A$. D'altra parte, supponendo con una ragionevole approssimazione che l'onda prodotta dal laser sia del tipo da noi considerato, si ha $\langle S \rangle = c\epsilon_0 E_0^2/2$, dove E_0 , ampiezza dell'onda del campo elettrico, è proprio il valore E_{max} chiesto nell'esercizio. Si ha quindi $E_{max} = (2W/(Ac\epsilon_0))^{1/2}$. Numericamente, utilizzando i valori $c = 3.0 \times 10^8$ m/s e $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m, esce $E_{max} = 3.8 \times 10^6$ V/m, un valore che, come vedete, è piuttosto elevato anche in presenza di una bassa potenza del laser (paragonabile a quella dei puntatori laser venduti alle bancarelle).

1.3.2 Esercizio: potenza media trasportata da un'onda stazionaria

Consideriamo l'onda stazionaria che abbiamo costruito nel par. 1.2.5, cioè dotata di campo elettrico $E(z, t) = 2E_{0,1} \cos(kz) \cos(\omega t)$ e di campo magnetico $B(z, t) = 2(E_{0,1}/c) \sin(kz) \sin(\omega t)$. Come si scrive il modulo del vettore di Poynting S e quanto vale il suo valore medio $\langle S \rangle$ per questa onda stazionaria?

Soluzione. Applichiamo la definizione e, ricordando che \vec{E} e \vec{B} sono mutuamente ortogonali, otteniamo $S = 4(E_{0,1}^2/(\mu_0 c)) \sin(kz) \cos(kz) \sin(\omega t) \cos(\omega t)$. Esaminiamo la dipendenza temporale di questa funzione: ricordando che $\sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)/2$, vediamo che tale dipendenza è di tipo periodico, con pulsazione pari a 2ω (e non ω come per le onde di partenza!). Se provate a fare un grafico e a ragionare un po' sopra sul fatto che la funzione oscilla attorno allo zero, oppure provate direttamente a calcolare l'integrale sul tempo che è nella definizione di valore medio, vi renderete facilmente conto che $\langle S \rangle = 0$. Infatti in un'onda stazionaria il valore medio del vettore di Poynting è *nullo*, cioè l'onda, in media, *non trasporta energia* (e anche per questo si chiama stazionaria!). A questo risultato si poteva anche giungere partendo dalla costruzione dell'onda stazionaria come sovrapposizione di due onde contropropaganti, che portano ognuna la stessa quantità media di potenza ma in versi opposti (e quindi l'effetto complessivo deve essere nullo).

²⁷La capacità di produrre onde elettromagnetiche *collimate*, cioè che si propagano in un "fascio", è una delle principali caratteristiche del laser.

1.4 Luce ed ottica

Avete già avuto un'idea del fatto che, quando si parla di onde elettromagnetiche, ci si riferisce ad un grosso insieme di fenomeni, pertinenti ad ambiti che, nell'esperienza quotidiana, appaiono ben differenti fra loro. Per esempio, onde elettromagnetiche sono quelle che ci permettono di ascoltare la radio (o vedere la televisione, od usare il telefonino), ma anche quelle che ci permettono di vedere e di scaldarci con la luce del sole. La principale caratteristica di un'onda elettromagnetica che determina l'ambito dei fenomeni coinvolti è la *lunghezza d'onda* λ . e quindi la frequenza, $\nu = c/\lambda$ (nel vuoto), ovvero la pulsazione, $\omega = 2\pi\nu$. Si parla spesso di **spettro** delle lunghezze d'onda (o delle frequenze), intendendo l'intervallo di lunghezze d'onda (o frequenze) che caratterizzano le onde elettromagnetiche, ovvero la **radiazione**, rilevante per un certo insieme di fenomeni o di applicazioni. Ad esempio, lo spettro delle frequenze usate per la trasmissione radiofonica nelle banda delle radio libere va da 88 a 108 MHz; la lunghezza d'onda corrispondente è attorno a $\lambda = 3$ m. Si parla di onde radio, però, anche in intervalli più ampi. Ad esempio le comunicazioni fra sottomarini (il mezzo in questo caso è l'acqua, e non il vuoto, cioè l'aria) sfruttano radiazione con lunghezza d'onda di centinaia di metri, mentre a molti di voi sarà noto che i telefonini GSM lavorano a frequenze attorno a 1.8 GHz, cioè con lunghezze d'onda $\lambda \sim 17$ cm. Questo intervallo spettrale appartiene grosso modo alle cosiddette *micro-onde* e non vi sfuggirà che la dimensione tipica delle antenne che vengono impiegate per i telefonini è decisamente più piccola di quella delle antenne delle autoradio: infatti è regola generale che la dimensione tipica dell'antenna scala con quella della lunghezza d'onda.

L'intervallo delle micro-onde comprende anche radiazione rilevante in altri ambiti: ad esempio nei forni a micro-onde si usano generalmente onde di frequenza attorno a 9 GHz (λ 3 cm), che sono "assorbite" in modo molto efficiente dalle molecole d'acqua, e per altri scopi (ad esempio, per scopi analitici o sensoristici) si usano micro-onde di lunghezza millimetrica o sub-millimetrica. Diminuendo ancora la lunghezza d'onda (a partire da $\lambda \sim 100 - 10\mu\text{m}$) si parla di radiazione *infrarossa*, poi si incontra il breve intervallo della radiazione visibile (di cui tratteremo un po' meglio fra breve) e quindi quello dell'ultravioletto. Esistono ancora importanti fenomeni in cui sono coinvolte onde di lunghezza d'onda sempre minore, ad esempio i raggi-X (quelli delle "lastre"), che hanno tipicamente $\lambda < 1\text{nm}$, e i raggi- γ , rilevanti in molti aspetti di cosmologia e fisica delle particelle elementari.

Molte delle caratteristiche delle onde elettromagnetiche sono comuni a tutti gli ambiti che abbiamo citato e parecchi semplici fenomeni possono essere compresi e modellati impiegando gli strumenti matematici di cui abbiamo trattato. Il nostro interesse principale è comunque rivolto verso la *luce visibile*, costituita da radiazione di lunghezza d'onda tale che, grosso modo, $350\text{ nm} < \lambda < 700\text{ nm}$;²⁸ notate che le frequenze corrispondenti sono

²⁸Questi limiti di lunghezza d'onda, che individuano rispettivamente il colore blu-violetto ed il colore rosso-cupo, sono soggettivi, nel senso che alcuni occhi riescono a discernere la radiazione del vicino ultravioletto (cioè con $\lambda < 350\text{ nm}$) ed alcuni anche la radiazione del vicino infrarosso ($\lambda > 700\text{ nm}$). In generale, la sensibilità dell'occhio alla radiazione luminosa in termini di intensità e di lunghezza d'onda,

molto elevate, dell'ordine di 10^{15} Hz. Questo significa che il campo elettrico (e quello magnetico) cambia di verso 10^{15} al secondo!

La radiazione visibile è oggetto dell'**ottica**, che è un campo molto esteso e in perenne evoluzione. In questo capitolo ci limiteremo a discutere alcuni semplicissimi esempi, in parte generali per le onde elettromagnetiche, in parte specifici per la radiazione visibile (o nel vicino ultravioletto, o nel vicino infrarosso), che mostrano come sia possibile “manipolare” le proprietà delle onde elettromagnetiche, in particolare in termini della direzione di propagazione (la direzione di \vec{k}).

1.4.1 Fotoni

Visto l'ambito del quale ci vogliamo occupare, la radiazione elettromagnetica, in particolare quella luminosa, conviene soffermarsi brevemente su un aspetto che esula dalla fisica “classica” e riguarda invece l'approccio quantistico (e, per alcuni aspetti, quello relativistico). In effetti, vista l'importanza anche pratica dell'argomento e la relativa facilità con cui possono essere realizzati esperimenti di ottica anche di tipo piuttosto sofisticato, la tematica relativa alla “natura della luce” è stata sempre ampiamente studiata e dibattuta²⁹.

Abbiamo affermato che la radiazione elettromagnetica, e quindi la luce, può essere considerata come un'onda. L'approccio basato su questa affermazione, detto approccio *ondulatorio*, è preziosissimo per interpretare e predire un grandissimo numero di fenomeni. Tuttavia ce ne sono alcuni, che qui non citeremo, per i quali l'approccio si dimostra insufficiente. Sulla base di un'intuizione di Einstein, fatta un secolo fa, è ampiamente accertato che, accanto alla descrizione ondulatoria, è possibile (e in qualche caso necessario) servirsi di una visione *particellare* della radiazione³⁰, per la quale un “raggio” di luce può essere visto come un fascio di particelle, i **fotoni**. Queste particelle hanno un carattere immateriale, e sono dotate di proprietà assolutamente singolari: i fotoni, infatti, *hanno massa nulla*³¹, ma, nonostante questo, possiedono *energia* e *quantità di moto*³². In particolare, l'energia di un singolo fotone che, dal punto di vista ondulatorio, “appartiene” ad una radiazione di frequenza ν vale $E_{fot} = h\nu$, con $h \approx 6.6 \times 10^{-34}$ Js, costante fondamentale della natura³³. Notate che l'energia del *singolo fotone* è concetto ben diverso rispetto a quello di energia trasportata dall'*onda*, cioè dal fascio di fotoni nel suo complesso. Come

cioè colore, è regolata da leggi, di carattere empirico, piuttosto complicate.

²⁹Sistemi ottici di buona qualità con cui osservare sorgenti luminose stellari e dedurre le caratteristiche erano sicuramente già disponibili nel diciottesimo secolo; d'altro canto, tra gli premi Nobel in Fisica ce n'è almeno uno che è stato attribuito per ricerche che in generale hanno a che vedere con la natura della luce. Quindi l'interesse per questo argomento è certamente plurisecolare, anche senza scomodare le indagini compiute in epoca antica e le speculazioni ad esse conseguenti.

³⁰Il *dualismo onda/particella* è un argomento portante della meccanica quantistica, con notevoli ricadute di carattere fondamentale ed applicativo.

³¹Come al solito in Fisica, andrebbe specificato che questa affermazione è valida fino a prova contraria!

³²I fotoni hanno anche un *momento angolare* diverso da zero, ma di questo non tratteremo.

³³Avevamo già trovato questa costante altrove, ad esempio nella termodinamica, e le avevamo dato il nome di *costante di Planck*.

vedremo nel prossimo esercizio, questa dipende infatti dalla “quantità” di fotoni (per unità di tempo) che formano il fascio, e non (solo) dalla frequenza della radiazione. La quantità di moto dello stesso (singolo) fotone vale invece $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$, essendo c la velocità della luce; dal punto di vista *vettoriale*, è chiaro che la quantità di moto del fotone avrà la stessa direzione del suo moto, che, in termini ondulatori, coincide con quella del vettore d’onda \vec{k} ; ricordando che $k = 2\pi/\lambda$, potremo scrivere in forma compatta $\vec{p} = (h/(2\pi))\vec{k} = \hbar\vec{k}$, dove si è introdotta la notazione $\hbar = h/(2\pi)$.

L’approccio particellare consente di risolvere in modo diretto numerose situazioni fisiche e di interpretare il funzionamento di moltissimi ed importanti dispositivi (ad esempio il laser, ma anche tanti altri dispositivi “optoelettronici” di uso comune). Noi, più modestamente, ne faremo cenno solo in qualcuno degli argomenti che tratteremo nel seguito di questo capitolo.

1.4.2 Esercizio: fotoni “rossi”

Abbiamo acquistato ad una bancarella un puntatore laser che emette un fascio di potenza $W = 3.0$ mW alla lunghezza d’onda $\lambda = 660$ nm (corrisponde ad un bel colore rosso vivo). Quanto vale il numero N di fotoni al secondo che costituiscono il fascio? Supponendo di inviare il fascio contro una parete “perfettamente assorbente” (una parete “nera”), quanto vale, al massimo, la forza F (mediata temporalmente) che l’arrivo dei fotoni esercita sulla parete stessa?

Soluzione. La potenza W significa che, in un intervallo di tempo unitario, $\Delta t = 1$ s, il fascio trasporta un’energia $E = W\Delta t$. Questa energia è “fatta” da tanti fotoni, ognuno dei quali contribuisce con un’energia $E_{\text{fot}} = hc/\lambda$. Dunque, deve essere $E/\Delta t = W = NE_{\text{fot}}$, da cui $N = W/E_{\text{fot}}$; numericamente, tenendo conto che $E_{\text{fot}} \approx 3.0 \times 10^{-19}$ J, si ha $N \approx 10^{16}$ fotoni/s, un numero piuttosto elevato a dispetto della bassa potenza della sorgente laser. All’arrivo sulla parete assorbente, si può supporre che ogni singolo fotone ceda una quantità di moto che in modulo vale $\Delta p = p = h/\lambda$ (notate che, dopo l’impatto con la parete, il fotone si suppone “fermo”). Complessivamente, nell’intervallo Δt una quantità di moto pari a $\Delta P = N\Delta t\Delta p$ verrà ceduta alla parete. Ricordando il legame (“teorema dell’impulso”) fra quantità di moto e forza, si ha $F = N\Delta p = Nh/\lambda$. Numericamente si ottiene il risultato $F \approx 10^{-9}$ N, dunque un valore praticamente trascurabile in molte situazioni fisiche³⁴.

1.4.3 Riflessione da superfici metalliche

Abbiamo annunciato che l’ottica riguarda in primo luogo la capacità di manipolare le proprietà del *vettore* \vec{k} di un’onda elettromagnetica. Infatti, in un semplice modello a *raggi* della luce, in cui la direzione e il verso del vettore d’onda caratterizzano pienamente

³⁴ma non tutte: ci sono dei bellissimi esperimenti che mostrano come lo scambio di quantità di moto tra fotoni e materia, allo stato atomico o molecolare, possa condurre a risultati strepitosi in termini sia fondamentali che applicativi.

la direzione di propagazione di un fascio luminoso, operazioni note nell'esperienza comune, come "far riflettere" o "focalizzare" un'onda si riducono proprio, in primo luogo, a modificare direzione e verso di \vec{k} .³⁵

Il modo più eclatante per cambiare verso (e direzione) di \vec{k} è probabilmente rappresentato dalla **riflessione** da parte di uno specchio. Limitiamoci per il momento a considerare un'onda che incide *ortogonalmente* su una *superficie speculare*, cioè sulla faccia di uno specchio. Come è noto, il fascio di luce viene "riflesso", cioè si forma un'onda *riflessa* il cui vettore d'onda ha verso opposto rispetto all'onda *incidente*.

Le conoscenze che abbiamo acquisito finora sono sufficienti per realizzare e risolvere un modello di riflessione da una *superficie perfettamente conduttrice*; in effetti, come sappiamo tutti, molto spesso superfici metalliche, e quindi buoni conduttori, sono usate per fare specchi. Nel nostro modello immagineremo di avere un materiale conduttore nel semispazio $x > 0$ di un certo sistema di riferimento, come indicato in Fig. 1.4.3, e supporremo di avere un'onda linearmente polarizzata lungo Y (cioè tale che il suo campo elettrico abbia questa direzione) che si propaga nel verso positivo dell'asse X "provenendo" da $x \rightarrow -\infty$. Chiamiamo questa onda $E_i(x, t)$, dove il pedice "i" sta per "incidente"; detta $E_{0,i}$ la sua ampiezza, la funzione d'onda sarà, ad esempio: $E_i = E_{0,i} \cos(k_i x - \omega_i t)$, dove abbiamo indicato k_i e ω_i il vettore d'onda e la pulsazione dell'onda (sarà, ovviamente, $\omega_i/k_i = c$, dato che la propagazione avviene nel vuoto), abbiamo posto per comodità la fase costante $\phi_i = 0$, ed abbiamo ommesso di scrivere una relazione vettoriale, dato che sappiamo già per ipotesi che il campo è diretto lungo la direzione dell'asse Y del nostro riferimento.

Poniamo ora che il metallo che si trova in $x > 0$ sia un conduttore così buono da avere resistività praticamente nulla; l'esperienza ci insegna che questa classe di materiali è completamente *opaca*, cioè al suo interno non si può propagare alcuna onda di radiazione visibile³⁶. Questo significa che, per $x > 0$, dovrà essere "sempre e dovunque" $E = 0$. Notate che questa situazione, *campo nullo all'interno di un conduttore*, è analoga a che avevamo stabilito per le situazioni di equilibrio; qui, anche se abbiamo a che fare con campi rapidamente variabili, possiamo continuare ad adottare la stessa relazione. Come potete facilmente intuire, benché nella realtà la condizione sia spesso ragionevolmente ben soddisfatta, si tratta di una approssimazione; in particolare, nei metalli reali, e quindi dotati di una resistività non nulla, esiste un sottile strato di "interfaccia" all'interno del quale il campo *penetra*, con un'ampiezza che decade esponenzialmente su una scala spaziale tipicamente piccola (ben sotto il millimetro). Se ne deduce quindi che l'approssimazione adottata è assolutamente ragionevole.

Sappiamo quindi che $E = 0$ per $x > 0$; chiediamoci cosa succede per i punti che ap-

³⁵È chiaro che questo approccio non esaurisce tutte le possibilità dell'ottica; ad esempio, a parte le variazioni della *fase* dell'onda, di cui tratteremo brevemente, stiamo trascurando le eventuali modificazioni alla distribuzione *trasversa* di intensità del fascio luminoso, che possono essere di grande rilevanza in tanti fenomeni.

³⁶Attenzione: i metalli possono essere trasparenti a radiazione di opportuna lunghezza d'onda; in genere, per frequenze al di sopra dei $10^{17} - 10^{18}$ Hz, che cadono nell'intervallo spettrale dei raggi-X, i metalli, come molti altri materiali, diventano trasparenti.

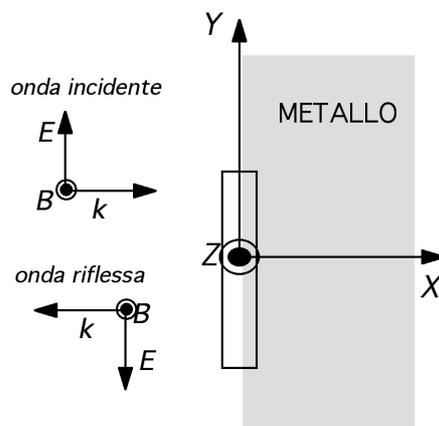


Figura 1.5: Rappresentazione della geometria rilevante per il problema della riflessione dalla superficie di un conduttore; le onde incidente e riflessa sono indicate per chiarezza in posizioni diverse, ma, ovviamente, si trovano dappertutto nel semispazio $z \leq 0$; il rettangolo disegnato attorno all'origine rappresenta una possibile linea chiusa di circuitazione (il disegno non è in scala, dovendo essere i lati ortogonali alla superficie del metallo molto più corti di quelli paralleli).

partengono alla superficie del conduttore, cioè quelli che si trovano in $x = 0$. Notiamo che il campo elettrico incidente, essendo diretto lungo Y , è *tangenziale* (cioè parallelo) alla superficie. Ricordiamo le *condizioni di continuità del campo elettrico* che avevamo stabilito in un precedente capitolo; utilizzando la circuitazione del campo, avevamo mostrato che le *componenti tangenziali* dovevano essere conservate nel passaggio attraverso un'interfaccia³⁷. Allora, poiché per $x = 0$ è $E = 0$, deve aversi $E = 0$ anche per $x = 0$; ma in $x = 0$ è presente il campo dell'onda incidente, e quindi l'unica possibilità che *complessivamente* il campo si annulli è che si generi un'onda riflessa. Questa onda, che dovrà necessariamente avere *verso* di propagazione opposto a quello dell'onda incidente, avrà in generale una forma del tipo: $E_r(x, t) = E_{0,r} \cos(k_r x - \omega_r t + \phi_r)$.

Se esaminiamo un po' più da vicino i processi di base coinvolti nella riflessione, usando dei semplici modelli microscopici che qui non discutiamo per ragioni di spazio, possiamo facilmente convincerci che *pulsazione modulo del vettore d'onda* non possono mutare nella

³⁷Fate attenzione: quel ragionamento era basato sull'equazione di Maxwell $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, valida nel caso *statico*. Con le onde elettromagnetiche, invece, il secondo membro di questa equazione di Maxwell non è più nullo, ma, come abbiamo visto in Eq. 1.1 (ovvero con la legge di Faraday, che è la stessa cosa), contiene il termine $-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$; si può facilmente dimostrare che questo termine, che contiene un *flusso*, cioè un integrale di superficie, tende a zero scegliendo di fare la circuitazione su una linea chiusa "schiacciata" sull'interfaccia, per esempio quella indicata in Fig. 1.4.3; quindi possiamo tranquillamente continuare ad usare la condizione di continuità sulle componenti tangenziali del campo.

riflessione. Infatti una loro variazione implicherebbe dei fenomeni a livello atomico che sono improbabili nelle ordinarie condizioni della riflessione. Quindi $\omega_r = \omega_i = \omega$ e $|\vec{k}_r| = |\vec{k}_i| = |\vec{k}|$, dove abbiamo ommesso tutti i pedici per semplificare la notazione. D'altra parte la circostanza che l'onda riflessa deve muoversi nel *verso negativo* dell'asse X (se fosse altrimenti dovremmo ipotizzare un materiale non opaco!), ci suggerisce di scrivere: $E_r(x, t) = E_{0,r} \cos(-kx - \omega t + \phi_r)$. Per soddisfare la condizione di continuità del campo *complessivo*, deve essere per $x = 0$ e per ogni istante t $E_i(x = 0, t) + E_r(x = 0, t) = 0$. Questo si ottiene ponendo $\phi_r = 0$ e $E_{0,r} = -E_{0,i}$.

Abbiamo quindi dimostrato, sulla base di semplici considerazioni di continuità, che deve esistere un'onda riflessa, e che questa deve essere contropropagante e di ampiezza uguale e opposta in segno rispetto all'onda incidente³⁸, ovvero: $E_r(x, t) = -E_{0,i} \cos(kx + \omega t)$. Notate che, in conseguenza della riflessione, nel semispazio $x < 0$ si trova una sovrapposizione fra onde contropropaganti del tipo studiato in par. 1.2.5: quindi in questo semispazio si formerà un'onda stazionaria il cui campo elettrico sarà sempre nullo in $x = 0$ (e gli altri nodi si troveranno nelle posizioni definite dalla funzione d'onda stazionaria).

1.4.4 Esercizio: cariche e correnti sulla superficie di uno specchio metallico

Abbiamo stabilito l'esistenza e le caratteristiche dell'onda riflessa. Sappiamo che, in generale, un'onda è generata da cariche accelerate. Vediamo di determinare se, e perché, queste cariche si formano sulla superficie del conduttore. Quanto vale la densità di carica superficiale σ alla superficie dello specchio? E quanto vale la *corrente superficiale* i ?

Soluzione. Per risolvere l'esercizio dobbiamo usare le nostre conoscenze sul campo elettrico e magnetico. In particolare, la carica superficiale si trova applicando il teorema di Gauss ad un cilindretto le cui facce superiore ed inferiore sono parallele alla superficie del conduttore e si trovano una all'interno ($x > 0$) e l'altra all'esterno ($x < 0$) del conduttore stesso. Se supponiamo che il cilindretto abbia altezza molto molto piccola (*infinitesima*), possiamo facilmente renderci conto che il flusso di campo elettrico che lo attraversa è nullo (il campo passa solo attraverso la superficie laterale del cilindretto, che abbiamo supposto infinitesima). Dunque deve essere $\sigma = 0$, cioè non c'è alcun *eccesso* di carica.

Per determinare la corrente, invece, applichiamo il teorema di Ampere (o, se preferite, la legge di Maxwell sulla circuitazione del campo magnetico³⁹, e calcoliamo la circuitazione su una linea chiusa rettangolare fatta in modo tale che i lati ortogonali alla superficie siano molto molto piccoli. Il campo magnetico, che è ovviamente diretto lungo Y , non dà contributi all'integrale di linea su questi due lati; d'altra parte, se, come abbiamo supposto, all'interno del materiale ($x > 0$) si ha $E = 0$, deve anche essere $B = 0$, e

³⁸Questa condizione si definisce di *riflessione completa* e si verifica abbastanza bene nei metalli di bassa resistività, come ad esempio l'oro.

³⁹Anche qui ai più attenti non sfuggirà che, nel caso non stazionario che stiamo considerando, sarebbe necessario considerare la variazione del flusso del campo elettrico nella superficie delimitata dalla linea di circuitazione. Però, scegliendo un circuito con lati infinitesimi, come suggerito nel testo, si può dimostrare che questo termine è trascurabile.

quindi anche l'integrale di linea sul lato del rettangolo parallelo alla superficie ed interno al materiale non dà contributo. L'unico termine diverso da zero è quindi quello dovuto all'integrale di linea del campo sul lato esterno alla superficie, in cui il campo magnetico vale $B(x = 0, t)$. Questo campo dovrà ovviamente essere il campo complessivo, cioè quello dato dalla somma $B_i(x = 0, t) + B_r(x = 0, t)$. Ricordando quanto stabilito nel par. 1.2.5, si trova che il teorema di Ampere si scrive: $2B_{0,i} \cos(\omega t)L = \mu_0 I$, dove L è la lunghezza del lato su cui si esegue la circuitazione. Quindi sulla superficie si genera una corrente superficiale (per unità di lunghezza) $i = I/L$ che ha lo stesso carattere oscillante dell'onda incidente, racchiuso nel termine $\cos(\omega t)$. Le cariche che costituiscono questa corrente, essendo sottoposte a moto oscillatorio, sono dotate di un'accelerazione, che di fatto le rende "sorgente" per l'onda riflessa.

1.4.5 Riflessione ad incidenza arbitraria

Abbiamo descritto i meccanismi della riflessione nel caso in cui l'onda incida ortogonalmente rispetto alla superficie dello specchio, in particolare nel caso di superfici metalliche. Nel caso in cui la direzione dell'onda, cioè quella di \vec{k}_i , formi un angolo diverso da zero rispetto alla normale alla superficie, $\theta_i \neq 0$,⁴⁰ l'approccio sviluppato nel paragrafo precedente può ancora essere adottato per arrivare, con qualche piccolo sforzo algebrico e trigonometrico, alla descrizione della situazione fisica che si presenta.

Esiste tuttavia un approccio più immediato, che vale ogni volta che si ha una riflessione (e quindi non solo nel caso di superfici conduttrici). Se torniamo brevemente alla descrizione *particellare* della radiazione come fascio di fotoni, e notiamo che la circostanza che energia e quantità di moto del fotone (grandezze legate a ω e k) non cambiano, secondo quanto abbiamo stabilito prima, allora possiamo pensare alla riflessione di luce da parte di una specchio come ad un processo di *urto elastico* tra fotoni e superficie. La condizione di urto elastico, lo stesso che si verifica quando un pallone (ben gonfio) viene calciato contro una parete, implica che *l'angolo di riflessione sia uguale a quello di incidenza*. Quindi, solo come conseguenza dell'assunzione, ragionevole, che non c'è scambio di energia e quantità di moto tra radiazione e materia in un processo di riflessione pura, possiamo dire che $\theta_r = \theta_i$, dove con θ_r abbiamo indicato l'**angolo di riflessione**, misurato con la stessa convenzione di θ_i , cioè a partire dalla normale alla superficie speculare.

1.4.6 Esercizio: lo specchio sferico concavo

Immaginiamo di avere una superficie perfettamente riflettente (uno specchio, per esempio metallico) che ha la forma di una semisfera di raggio R , e consideriamo l'interazione della luce con la superficie *interna* di questa semi-calotta. Stiamo sostanzialmente parlando di uno **specchio concavo** (avessimo preso in considerazione la superficie esterna avremmo parlato di **specchio convesso**), un dispositivo frequentemente usato in ottica. La

⁴⁰Convenzionalmente, in ottica l'angolo di incidenza si misura rispetto alla normale della superficie; dunque $\theta_i = 0$ significa che il vettore dell'onda incidente fa un angolo nullo rispetto alla normale, ovvero che l'onda è ortogonale alla superficie. Tenetelo presente!

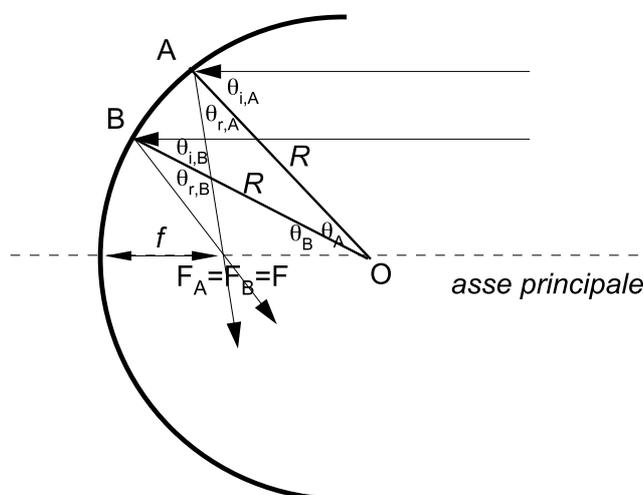


Figura 1.6: Rappresentazione schematica di uno specchio sferico concavo.

Fig. 1.4.6 mostra una sezione di questo sistema, che ha ovviamente un asse di simmetria, che è quello rappresentato in figura (si chiama **asse principale** dello specchio). Immaginiamo che la superficie dello specchio sia illuminata con un fascio di luce *collimato*, cioè tale che può essere suddiviso in tante componenti (*raggi luminosi*) che hanno la stessa direzione di propagazione, e sono tutti paralleli all'asse principale. Come viene modificata la direzione del fascio?

Soluzione. I raggi luminosi del fascio incidono sulla superficie con un angolo di incidenza che dipende dalla posizione sulla superficie stessa. Scegliamo un punto della superficie, ad esempio quello indicato con A in figura, e chiamiamo θ_A l'angolo compreso tra l'asse principale, ed il raggio (della semisfera, non quello luminoso!) che va verso questo punto. Da semplici considerazioni geometriche, si ha che $\theta_{i,A} = \theta_A$, ed il raggio luminoso, una volta riflesso dalla superficie (formando un angolo $\theta_{r,A} = \theta_{i,A} = \theta_A$ rispetto alla normale, che è la direzione del raggio della semisfera), incontrerà l'asse principale dello specchio nel punto F_A . Scegliamo ora un altro punto della superficie, il punto B. Ripetiamo le nostre considerazioni e chiamiamo F_B l'intersezione tra questo raggio luminoso riflesso e l'asse principale dello specchio. Detto O il centro di curvatura della semisfera, poniamo la nostra attenzione sui due triangoli OAF_A e OBF_B . Entrambi sono caratterizzati dal fatto di avere due angoli uguali ($\theta_{r,A} = \theta_A$ e $\theta_{r,B} = \theta_B$); inoltre, confrontati tra loro, questi due triangoli hanno un lato della stessa lunghezza (il segmento OA è un raggio della semisfera, così come lo è il segmento OB). La geometria ci dice che, come conseguenza, si ha $OF_A = OF_B$, cioè i due raggi luminosi che abbiamo considerato intercettano l'asse principale, una volta riflessi, *nello stesso punto*. Simili considerazioni si possono fare per tutti i punti della superficie, ed il luogo in cui tutti i raggi si incontrano dopo essere stati riflessi si chiama **fuoco** dello specchio⁴¹. La posizione del fuoco, che chiamiamo F (senza nessun pedice perché il punto è lo stesso per tutti i raggi luminosi),

⁴¹Questa denominazione può senz'altro farvi ricordare l'invenzione di Archimede a Siracusa!

in particolare la distanza f dal punto in cui l'asse principale intercetta la superficie dello specchio vale $f = R/2$, come si può dimostrare facendo alcune semplici considerazioni di carattere geometrico.

Dunque, uno specchio concavo è un sistema ottico che, in prima approssimazione (trascurando diversi effetti di *aberrazione* e di *diffrazione*), è caratterizzato da un fuoco, posto a distanza $f = R/2$ rispetto alla superficie dello specchio. Il fuoco è il punto in cui convergono i raggi luminosi che appartengono ad un fascio collimato che incide sulla superficie dello specchio con una direzione parallela all'asse principale. È chiaro che, se “rovesciassimo” la configurazione, cioè mettessimo nel fuoco una sorgente di luce, puntiforme ed *isotropa* (uniforme in tutte le direzioni), allora avremmo “in uscita” dallo specchio un fascio collimato. Inoltre, se invece che considerare la superficie interna della semisfera prendessimo quella esterna, avremmo uno specchio *convesso*, del tipo di quelli usati agli incroci delle strade per “far vedere oltre gli ostacoli”. Uno specchio convesso funziona in maniera in qualche modo “opposta” rispetto al concavo. In particolare esso si comporta da elemento *divergente* nei confronti di una sorgente posta nel fuoco; torneremo nel prossimo paragrafo ad occuparci delle stesse questioni da un punto di vista più generale.

1.5 Formazione di immagini da specchi sferici

La capacità di manipolare il vettore d'onda tramite processi di riflessione e focalizzazione è alla base di numerosissime applicazioni dell'ottica. In effetti, ogni dispositivo in cui si faccia uso di “specchi e lenti” impiega questi processi per formare *immagini di oggetti*, cioè ne permette visione (diretta o tramite opportuni rivelatori, pensate a macchine fotografiche e telecamere) generalmente “modificata” in qualche maniera (ad esempio, l'immagine è ruotata, ingrandita, rimpiccolita, etc.) di oggetti opportunamente illuminati. I meccanismi di formazione dell'immagine possono essere interpretati attraverso le regole dell'**ottica geometrica**, in cui, come abbiamo già sottolineato, un fascio luminoso uscente da una sorgente, o, più in generale, da un *oggetto* opportunamente illuminato, viene idealmente suddiviso in tanti *raggi* luminosi, che si propagano in una direzione (quella di \vec{k} per la corrispondente funzione d'onda). Questo approccio contiene evidentemente delle approssimazioni: in particolare, si trascura completamente ogni questione relativa alla *distribuzione trasversa* del fascio, ovvero dei raggi luminosi, cioè non si tiene in conto il fatto che ogni fascio di luce reale ha una sua estensione spaziale. Come conseguenza, molti fenomeni che sono rilevanti nella pratica, come ad esempio l'aberrazione, la diffrazione, l'interferenza, sono di fatto ignorati. Tuttavia, l'approccio semplificato dell'ottica geometrica è molto potente per capire il funzionamento di base di molti sistemi ottici, e quindi vale sicuramente la pena di soffermarsi su questo argomento.

Aspetto chiave dell'ottica geometrica è la *formazione di immagini*, che, come specificheremo più avanti, possono essere *reali o virtuali*. Per capire cosa si intende per formazione di immagine, torniamo all'esempio dello specchio sferico concavo. Supponiamo ora di avere una sorgente non collimata, come nell'esempio del paragrafo precedente, ma

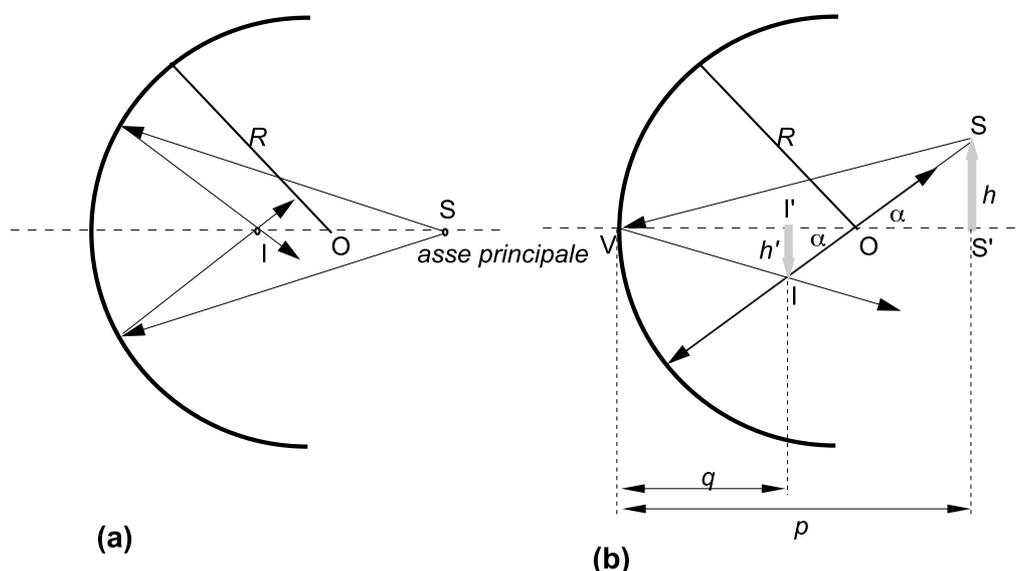


Figura 1.7: Formazione di un'immagine reale per uno specchio sferico concavo (a); costruzione dell'immagine in uno specchio sferico concavo (b).

divergente, cioè che manda radiazione in tutte le direzioni⁴²; questa sorgente potrebbe essere rappresentata da una lampadina, ma anche, ovviamente, da un *oggetto* puntiforme illuminato in modo da “rimandare” luce in tutte le direzioni. Supponiamo poi che, come in Fig. 1.5(a), la sorgente, o oggetto, sia collocata *sull'asse principale* del sistema (definito prima), nel punto S, la cui distanza dalla superficie dello specchio è *maggiore* del raggio di curvatura R dello specchio: in pratica, la sorgente si trova “al di là” del centro dello specchio. Limitiamoci a considerare alcuni dei raggi uscenti dalla sorgente, in particolare quelli che formano un piccolo angolo rispetto all'asse principale dello specchio; questa approssimazione, detta **parassiale**, consente di limitare i problemi legati al fatto che stiamo trascurando la distribuzione trasversa della radiazione, ed è quindi essenziale perché possa essere applicato l'approccio geometrico che stiamo impiegando.

Poniamo la nostra attenzione su due di questi raggi, quelli indicati in figura; essi, dopo aver raggiunto la superficie dello specchio, vengono riflessi con un certo angolo, ed incontrano l'asse principale nello *stesso punto*, indicato con I in figura; da questo punto essi poi continuano a divergere. Osservate che questo punto ha, in termini dell'ottica che stiamo trattando, caratteristiche identiche a quelle della sorgente, o dell'oggetto, che stiamo considerando: infatti i raggi si incontrano in esso e poi ne divergono. Quindi questo punto può essere considerato a tutti gli effetti come il punto immagine dell'oggetto, e in particolare si tratta di un'**immagine reale**, indistinguibile da quella della sorgente, o oggetto, attuale. Vediamo ora cosa succede se, invece di considerare una sorgente puntiforme,

⁴²Potremmo supporre anche che si tratti di una sorgente puntiforme *isotropa*, cioè che distribuisce radiazione in modo uniforme in tutto lo spazio

abbiamo una sorgente *estesa*⁴³. Nella Fig. 1.5(b) un tale oggetto è rappresentato come una freccia, di lunghezza h e con un suo estremo appartenente all'asse principale dello specchio (è utile, per non appesantire le costruzioni geometriche che faremo, considerare configurazioni di questo tipo). Anche questo oggetto sarà ovviamente illuminato, in modo che da esso dirameranno infiniti raggi, con angolazioni diverse tra loro. Selezioniamo due di questi raggi, entrambi partenti dalla punta della freccia. Uno di loro passerà per il centro di curvatura, il punto O della figura; esso raggiungerà la superficie dello specchio con una direzione radiale, cioè ortogonale allo specchio stesso, e quindi il raggio riflesso tornerà indietro per la stessa direzione. Consideriamo ora un altro raggio, precisamente quello che, partendo dalla punta della freccia, raggiunge nel "vertice" V dello specchio, cioè l'intersezione tra la sua superficie e l'asse principale. La sua riflessione tornerà indietro formando rispetto all'asse principale un angolo uguale a quello di incidenza. Indichiamo con I il luogo in cui questi due raggi riflessi che stiamo considerando si incontrano tra loro. Poiché i due raggi riflessi partono entrambi dalla punta della freccia, questo punto di incontro rappresenta l'*immagine* della punta della freccia stessa. Questa immagine ha carattere reale, dato che essa è fatta da raggi luminosi che si incontrano in un punto e ne divergono. Ripetiamo ora la procedura considerando il punto di partenza della freccia oggetto. Esso giace sull'asse principale, e pertanto i fasci originati dal punto di partenza della freccia, una volta riflessi, tornano indietro per la direzione dell'asse principale. Questa considerazione ci consente di disegnare la freccia immagine: essa avrà una lunghezza h' e sarà evidentemente *capovolta* rispetto all'oggetto, così come indicato in figura.

1.5.1 Ingrandimento e legge del fuoco

Discutiamo ora sulla *dimensione* lineare dell'immagine, in particolare sul rapporto tra questa e quella dell'oggetto; in sostanza, vogliamo determinare l'**ingrandimento** $M = h'/h$ del sistema ottico che stiamo considerando. Cominciamo subito con il notare che, se l'immagine risulta *capovolta* rispetto alla sorgente, convenzionalmente si ha $M < 0$. Esaminiamo i due triangoli rettangoli S'VS e I'VI di figura; essi sono simili, dato che l'angolo in V ha lo stesso valore per tutti e due (si tratta dell'angolo di incidenza e di riflessione per lo stesso raggio). Pertanto, detta p la distanza tra oggetto e superficie dello specchio e q la distanza tra immagine e superficie dello specchio⁴⁴, per le regole dei triangoli simili, deve essere $h'/h = -q/p$, dove il segno negativo tiene conto dell'osservazione sopra riportata.

Esaminiamo ora i triangoli rettangoli S'OS e I'OI; anch'essi sono evidentemente simili, avendo lo stesso angolo in O. Indicando con α questo angolo, si ha: $\tan \alpha = h/(p - R)$, ed anche $\tan \alpha = -h'/(R - q)$, dove con R abbiamo indicato il raggio di curvatura dello specchio (ed abbiamo posto esplicitamente un segno meno davanti ad h' per ricordarci che, nella nostra convenzione, questa grandezza deve essere negativa). Da queste due equazioni esce $h'/h = (R - q)/(p - R)$, ma il rapporto di ingrandimento deve anche

⁴³Estesa, ma non troppo, affinché sia sempre possibile ragionare in termini di ottica parassiale.

⁴⁴Entrambe queste distanze sono misurate sull'asse principale dello specchio.

essere pari al rapporto $-q/p$, come abbiamo stabilito appena sopra. Si ottiene quindi $h'/h = -q/p = -(R - q)/(p - R)$, da cui, con semplici passaggi algebrici:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (1.12)$$

Questa legge, detta *degli specchi sferici*, stabilisce un'importante relazione tra le distanze tra specchio e oggetto, p , e tra specchio e immagine, q , attraverso un parametro costruttivo dello specchio, il suo raggio di curvatura R . Inoltre, come abbiamo osservato nel paragrafo precedente, in uno specchio sferico la distanza $R/2$ coincide con la *distanza focale* f del sistema, per cui la stessa legge può essere scritta come:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (1.13)$$

Notate che un fascio collimato come quello che abbiamo trattato nel paragrafo precedente può essere sempre immaginato come proveniente da una sorgente puntiforme collocata a *grandissima distanza dallo specchio*, cioè per $p \rightarrow \infty$; ⁴⁵ in questo caso si ha evidentemente $q \rightarrow f$, cioè il punto in cui convergono tutti i raggi è proprio il fuoco del sistema.

Abbiamo finora considerato il comportamento di uno specchio concavo; le leggi che abbiamo determinato funzionano anche con specchi convessi, a patto di stabilire alcune convenzioni sui *segni* delle grandezze considerate nell'Eq. 1.12; in particolare, le distanze p e/o q saranno considerate negative quando i punti che esse individuano sono collocati “al di fuori” della circonferenza di cui lo specchio sferico costituisce un arco. Un aspetto interessante dello specchio convesso è che esso dà luogo ad **immagini virtuali** degli oggetti che vi si riflettono: infatti i raggi riflessi divergono necessariamente da un punto che si trova “al di là” dello specchio, per cui essi non si intersecano realmente in tale punto. Di conseguenza le caratteristiche dell'immagine non sono perfettamente identiche a quelle dell'oggetto, da cui la denominazione virtuale. Notate che anche *uno specchio piano produce un'immagine virtuale*: infatti anche in questo caso i raggi riflessi appaiono provenire da posizioni che sono collocate “al di là” dello specchio.

1.5.2 Esercizio: il proiettore di un'automobile

I proiettori (volgarmente noti come fanali!) di un'automobile tradizionalmente incorporano al loro interno una sorta di specchio sferico⁴⁶. Supponiamo allora di avere uno specchio sferico con raggio di curvatura $R = 10$ cm e di porre una sorgente luminosa di dimensione lineare $h' = 5.0$ mm ad una distanza $q = 5.2$ cm dallo specchio⁴⁷. Quanto vale la distanza

⁴⁵Gli esperimenti di ottica geometrica hanno per molti secoli sfruttato la luce del sole; essendo in questo caso sicuramente grande la distanza tra sorgente e specchio (qualsiasi specchio sulla terra!), il fascio di luce si può senz'altro considerare collimato. Da qualche decennio lo stesso obiettivo si può raggiungere con buona approssimazione usando la luce di un laser.

⁴⁶Più precisamente si tratta di uno specchio a curvatura multipla, a cui si dà il nome generico di *parabola*.

⁴⁷Ad esempio possiamo supporre che questa sorgente sia il filamento di una lampadina ad incandescenza, del tipo di quelle, dette “alogene” per la presenza di un gas (alogeno) al loro interno, usate spesso proprio

p dallo specchio in cui si forma l'immagine della sorgente? Quant'è l'estensione lineare h dell'immagine?

Soluzione. Dalla nomenclatura usata nel testo dell'esercizio abbiamo già posto le basi per risolvere questo problema. In pratica, dobbiamo prima di tutto valutare p usando la legge di Eq. 1.12; si ha $p = Rq/(2q - R) = 130$ cm; adottando la definizione di ingrandimento, che qui scriviamo in termini dei valori assoluti perché ci disinteressiamo dell'orientazione spaziale dell'immagine rispetto alla sorgente, abbiamo che l'estensione lineare dell'immagine vale: $h = h'/|M| = h'p/q = 125$ mm. Questo "allargamento" delle dimensioni della sorgente è di fatto impiegato per illuminare in modo adeguato la strada (che ha estensione lineare ben maggiore rispetto alla lampadina!). Se pensate di realizzare realmente questo esperimento (non è difficile!) potete rendervi conto del fatto che il luogo in cui si forma l'immagine non è, ovviamente, l'unico in cui "si trova luce"; infatti per distanze diverse da p si trova sicuramente un fascio di luce, e la circostanza che la posizione dell'immagine sia ben determinata significa solo che per questa distanza l'immagine è "a fuoco", cioè è possibile distinguere la forma geometrica della sorgente ed anche i suoi dettagli (entro certi limiti!).

1.6 Onde in materiali dielettrici (trasparenti)

Fino a questo punto abbiamo in genere immaginato di avere a che fare con onde elettromagnetiche che si propagano *nel vuoto*; infatti l'unica occasione in cui abbiamo considerato un'interazione tra onda e un materiale è stato lo specchio metallico, dove ci siamo premurati di specificare che, di fatto, il materiale poteva essere modellato come perfettamente opaco. A parte impiegare onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda minore (ad esempio i raggi-X, che penetrano in tanti materiali, anche conduttori), restringendoci all'intervallo spettrale del visibile sappiamo benissimo che non tutti i materiali sono opachi. Una lastra di vetro, infatti, ci appare ben trasparente. Come sappiamo, il vetro si comporta dal punto di vista elettrico come un isolante, ovvero un *dielettrico*.

Senza entrare troppo nei dettagli, che richiedono un livello di approfondimento e di sforzo modellistico che va oltre gli scopi di questi appunti, pensiamo alle differenze di carattere microscopico che possono verificarsi quando della radiazione luminosa cerca di penetrare all'interno di un conduttore o di un dielettrico. Il conduttore presenta delle cariche "ragionevolmente" libere di muoversi (tanto più ragionevolmente quanto più il conduttore è "ideale", cioè caratterizzato da una resistività praticamente trascurabile). Come abbiamo mostrato in precedenza, quando un'onda incide su una superficie metallica si genera una corrente oscillante di superficie; questa corrente dà luogo all'onda riflessa, e se la sua ampiezza è, in modulo, esattamente pari a quella dell'onda incidente (riflessione completa, o pura), allora nel semispazio dell'onda incidente si forma un'onda stazionaria, e

nei proiettori delle automobili. In una lampadina di questo tipo l'emissione è dovuta al forte riscaldamento per effetto Joule di un sottile filamento, in genere di tungsteno. È chiaro che una sorgente di questo tipo non è né puntiforme né isotropa, ma comunque possiamo supporre che l'emissione sia omogeneamente distribuita nello spazio ed adottare le leggi stabilite nel testo.

nel semispazio all'interno del materiale si annulla qualsiasi campo. Per questo il materiale si presenta come opaco.

In un dielettrico, invece, non ci sono cariche libere di muoversi, ma, piuttosto, le cariche sono “legate” (gli elettroni restano legati agli atomi). Queste cariche, benché legate, cercheranno di seguire l'oscillazione (forzata) dovuta al campo dell'onda incidente, ma il fatto che esse sono legate impedirà che si formi un'onda riflessa *della stessa ampiezza (in modulo) di quella incidente*. Dunque la riflessione non potrà essere completa, e “un po'” di radiazione continuerà a propagarsi *dentro* il materiale. È chiaro che, nel suo muoversi all'interno del materiale dielettrico, l'onda “cercherà” di mettere in oscillazione una quantità sempre crescente (mano a mano che penetra nel materiale) di cariche legate. Per questo motivo l'onda, durante la sua propagazione, perderà dell'energia: si parla infatti di **assorbimento** di radiazione da parte di un dielettrico.

In questi appunti non tratteremo del processo di assorbimento, i quali, alla fine, rendono praticamente opaco anche un materiale dielettrico purché di spessore arbitrariamente grande. Limitiamoci comunque ad un'osservazione: se prendiamo una lastra di materiale dielettrico e un'onda che ci incide (chiamiamo Z la direzione di propagazione di quest'onda), e supponiamo di suddividere la lastra in tante “lamine”, ognuna di spessore (infinitesimo) dz , potremo immaginare che la perdita di “energia dall'onda” in ognuna di queste lamine abbia lo stesso valore relativo. In altre parole, ricordando che il trasporto di energia per un'onda elettromagnetica si esprime attraverso il (modulo del) vettore di Poynting S , potremo scrivere ragionevolmente: $dS = -k dz$, con k (coefficiente di assorbimento) maggiore di zero. Questa espressione significa infatti che la variazione di S mano a mano che l'onda procede all'interno di uno spessore dz di materiale è sempre negativa (cioè S diminuisce) ed ha sempre lo stesso “tasso” di variazione. La relazione che abbiamo scritto è di fatto un'equazione differenziale del primo ordine, come ne abbiamo già incontrate diverse nell'ambito del corso (ad esempio, pensate alla scarica di un condensatore). La sua soluzione è del tipo $S(z) = S_0 \exp(-k(z - z_0))$, dove S_0 è il valore del vettore di Poynting nella posizione z_0 . In altre parole l'energia trasportata (per unità di tempo) dall'onda diminuisce esponenzialmente via via che l'onda procede nel materiale. Il tasso di diminuzione, k , dipende dal tipo di materiale (e dalla lunghezza d'onda della radiazione). Per il vetro, k può essere molto basso, così che anche lastre molto spesse (metri) risultano almeno parzialmente trasparenti.

Oltre a questo fenomeno di assorbimento, ce n'è un altro sul quale possiamo invece esprimerci in modo più preciso. Abbiamo più volte ricordato come, nel vuoto, le equazioni di Maxwell impongano una velocità di fase che vale $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \approx 3 \times 10^8$ m/s. D'altra parte, nel pochissimo di elettrostatica per i dielettrici che abbiamo trattato, abbiamo imparato che la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 , deve essere considerata come se venisse moltiplicata per una *costante dielettrica relativa* $\epsilon_R \geq 1$.⁴⁸ Come già anticipato, ci aspettiamo allora che la velocità di fase all'interno di un materiale dielettrico diventi

⁴⁸A rigore, sarebbe necessario considerare in questo contesto anche la variazione della permeabilità magnetica attraverso il coefficiente μ_R ; di fatto, però, i materiali che hanno $\mu_R > 1$ sono generalmente (almeno in natura!) opachi per la radiazione visibile, per cui ci si può tranquillamente limitare ai casi in cui $\mu_R = 1$.

$v = (\epsilon_0 \epsilon_R \mu_0)^{-1/2} = c/\epsilon_R^{1/2}$. Al fattore (evidentemente adimensionale) $1/\epsilon_R^{1/2}$ si dà il nome di **indice di rifrazione**, che si indica spesso con il simbolo n ; dunque la velocità di fase in un mezzo dielettrico si riduce di un fattore n rispetto alla velocità della luce (nel vuoto). Il valore di n dipende dal materiale considerato⁴⁹: per il vetro, ad esempio, esso vale circa 1.3, per il quarzo circa 1.5, per alcuni semiconduttori può valere oltre 2. Questa riduzione della velocità di fase, cioè, per noi, della velocità di propagazione dell'onda all'interno di un dielettrico, è molto importante in ottica. Noi ci limiteremo a vederne le conseguenze nella possibilità di realizzare lenti, che sono, in pratica, “analoghi trasparenti” degli specchi sferici.

1.6.1 Legge di Snell

Consideriamo la situazione rappresentata in Fig 1.6.1: una lastra di materiale dielettrico si trova nel semispazio $x > 0$ e dal semispazio $x < 0$ (in cui c'è il “vuoto”) arriva un'onda elettromagnetica che incide sulla faccia (piana) del dielettrico con un angolo di incidenza θ_i . Notate che questo problema è geometricamente simile a quello che abbiamo trattato nel par. 1.4.5, solo che qui abbiamo un materiale dielettrico invece che conduttore. In quel paragrafo, giocando con la definizione di fotone e con il fatto che la riflessione può essere interpretata come un urto elastico con una parete rigida (ed impenetrabile), avevamo stabilito che l'angolo di riflessione è $\theta_r = \theta_i$. Anche nell'interazione con una superficie dielettrica avremo, in parte, lo stesso fenomeno di *riflessione*: una parte dell'energia trasportata dall'onda incidente sarà infatti riflessa, e l'angolo di riflessione sarà uguale a quello di incidenza, nel senso che avevamo stabilito nel par. 1.4.5⁵⁰, a prescindere dalla “bontà” del materiale considerato. Se pensate a questioni di bilancio energetico, questa affermazione è d'accordo con il fatto che parte dell'energia trasportata dall'onda incidente si propaga all'interno del materiale.

Dunque è ragionevole supporre che ci sia un'onda **trasmessa** (talvolta detta *onda rifratta*) che penetra all'interno del materiale. Come indicato in figura, denominiamo θ_t l'angolo di trasmissione, cioè l'angolo formato dal vettore d'onda \vec{k}_t dell'onda trasmessa rispetto alla normale del piano di interfaccia. Vogliamo determinare il valore di θ_t in funzione di θ_i e delle caratteristiche del materiale, cioè del suo indice di rifrazione n . Ricordiamoci che siamo interessati a stabilire cosa succede subito al di là del piano $x = 0$; questo ci consente di supporre trascurabile lo scambio di energia tra onda e materiale, dato che l'assorbimento “richiede dello spessore” (di materiale) per verificarsi.

Torniamo a ragionare in termini di fotoni, ed esaminiamo in particolare la loro quantità ‘di moto. Avevamo stabilito che, per un singolo fotone, si ha $\vec{p} = \hbar\vec{k}$; consideriamo la

⁴⁹È inutile sottolineare che, nei dielettrici reali, l'indice di rifrazione dipende anche dalla lunghezza d'onda della radiazione considerata. Questo dà luogo ad una varietà di importanti fenomeni, compresa la **dispersione** della luce bianca da parte di un prisma o la formazione dei romantici arcobaleni.

⁵⁰In termini di riflessione, la differenza principale tra conduttore e dielettrico è che, in questo caso, la riflessione è molto lontana dall'essere completa; in altre parole, $E_{0,r} < E_{0,i}$ (per il vetro, in condizioni di incidenza normale, si ha, approssimativamente, $E_{0,r}/E_{0,i} \sim 0.15$, come si potrebbe calcolare con un semplice esercizio di dimostrazione delle cosiddette *leggi di Fresnel*).

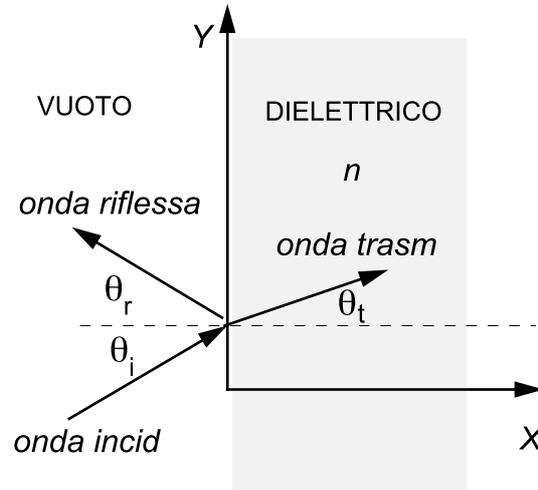


Figura 1.8: Rappresentazione schematica dell'incidenza di un'onda su una lastra di materiale dielettrico con indicazione delle grandezze rilevanti per la derivazione della legge di Snell.

componente Y della quantità di moto di fotoni che si trovano fuori (appartenenti all'onda incidente) e dentro (appartenenti all'onda “trasmessa”) il materiale, cioè $p_{i,Y} = \hbar k_{i,Y}$ e $p_{t,Y} = \hbar k_{t,Y}$. La geometria del problema ci suggerisce che $\sin \theta_t / \sin \theta_i = p_{t,Y} / p_{i,Y} = k_{t,Y} / k_{i,Y}$. Ricordiamoci ora della relazione che vale per un'onda elettromagnetica: $k = \omega / v$ dove v è proprio la velocità di fase dell'onda. Ricordando che v e k , considerati come vettori, hanno la stessa direzione e verso, questa relazione vale per tutte le componenti di \vec{k} , per cui è anche $k_{i,Y} = \omega v = \omega c$ e $k_{t,Y} = \omega v = \omega c / n$. Si ottiene allora la seguente relazione, detta **legge di Snell**:

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{1}{n}. \quad (1.14)$$

Quindi l'angolo di trasmissione, nel caso di passaggio di radiazione dal vuoto ad un mezzo dielettrico, si riduce di un fattore n rispetto all'angolo di incidenza, come rappresentato in figura. Questa circostanza è, per esempio, alla base del fatto che le lunghezze vengono “distorte” quando si osservano materiali immersi nell'acqua (che ha un indice di rifrazione maggiore di quello del vuoto, cioè dell'aria).

Più in generale, l'Eq. 1.14 stabilisce che, nel passaggio da un materiale con indice di rifrazione n_1 ad uno con indice di rifrazione n_2 vale la relazione tra gli angoli: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, come si può facilmente verificare. Quindi l'angolo di “trasmissione” (ovvero il suo seno) diminuisce od aumenta rispetto all'angolo di incidenza a seconda che il materiale in cui avviene la “trasmissione” abbia indice di rifrazione minore o maggiore rispetto a quello dove si trova il fascio incidente. Riscrivendo la legge di Snell nella forma $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$ si può notare come, quando $\frac{n_1}{n_2} > 1$ (passaggio da un materiale con indice di rifrazione maggiore ad uno con indice di rifrazione minore), sia possibile una conseguenza abbastanza peculiare. Infatti è possibile determinare un **angolo limite** $\theta_{1,L} = \arcsin(n_2/n_1)$ tale che

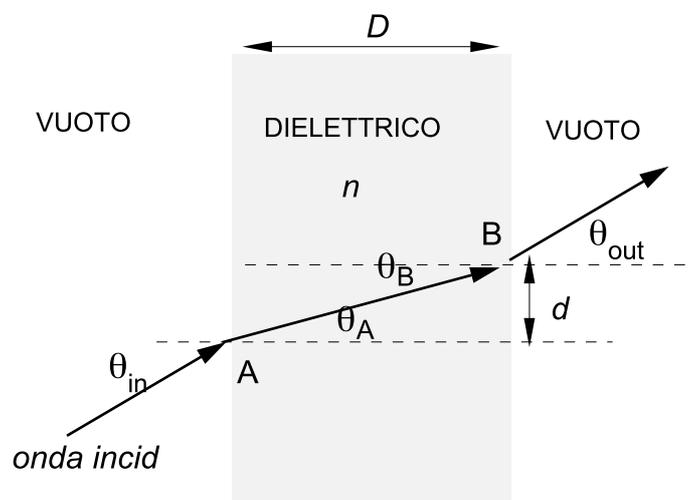


Figura 1.9: Traslazione di un raggio luminoso per attraversamento di una lastra dielettrica; notate che i raggi riflessi alle due interfacce non sono riportati per esigenze di chiarezza grafica.

per $\theta_1 > \theta_{1,L}$ si ha $\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > 1$. Secondo Snell, questo prodotto dovrebbe essere pari al $\sin \theta_2$, che, essendo una funzione seno, non può assumere valori maggiori di 1. In queste circostanze si parla di **riflessione totale**, cioè la trasmissione del fascio nel mezzo ad indice di rifrazione minore viene *inibita*, e tutta l'energia trasportata dall'onda incidente viene riflessa, come nel caso di uno specchio metallico⁵¹. Questo fenomeno è ben sfruttato nelle *fibre ottiche*, dove la capacità di guidare radiazione luminosa dall'ingresso all'uscita con minime perdite di energia si basa sul verificarsi di riflessioni multiple che avvengono nel “nucleo” della fibra, fatto di materiale con un indice di rifrazione n_1 maggiore di quello dell'ambiente circostante.

1.6.2 Esercizio: traslazione di un raggio luminoso

Supponiamo di avere una lastra di vetro con $n = 1.3$ e spessore $D = 10$ cm illuminata con un raggio luminoso che incide sul punto A della sua superficie, come indicato in Fig. 1.6.2, con un angolo di incidenza $\theta_{in} = 30$ gradi (la regione 1 è in aria, cioè “vuota”). Dopo aver attraversato la lastra, che immaginiamo abbia assorbimento trascurabile, il raggio emerge dal punto B della faccia opposta della lastra; quanto vale l'angolo di “uscita” θ_{out} ? Quanto vale la “distanza” d (vedi figura) fra punto di ingresso e punto di uscita del raggio?

Soluzione. Il percorso del raggio luminoso è indicato in figura; per la legge di Snell, l'angolo θ_A è tale che $\sin \theta_A = \sin \theta_{in}/n$; inoltre si ha, per questioni geometriche, $\theta_B = \theta_A$,

⁵¹Si può dimostrare che, in realtà, il campo nel mezzo 2 diventa **evanescente**, cioè forma una sorta di onda che si estingue su una scala spaziale molto piccola, dell'ordine della lunghezza d'onda, e quindi ha carattere *non propagante*.

per cui, usando Snell per la seconda interfaccia, deve essere $\sin \theta_{out} = n \sin \theta_B = n \sin \theta_A = \sin \theta_{in}$; quindi $\theta_{out} = \theta_{in}$, ovvero la direzione del raggio *non cambia* a causa del passaggio attraverso la lastra di vetro. Invece il punto di uscita è chiaramente diverso rispetto a quello di ingresso, ed in particolare il raggio subisce una “traslazione”. L’entità di questa traslazione, cioè il valore d richiesto nel testo, si trova applicando la trigonometria, in particolare notando che $d = D \tan \theta_A = D \sin \theta_A / \cos \theta_A = D n \sin \theta_{in} / (1 - n^2 \sin^2 \theta_{in})^{1/2}$; numericamente si ottiene $d \approx 8.5$ cm, un valore consistente; infatti il passaggio attraverso una lastra di dielettrico è un modo comunemente usato per “traslare” un raggio luminoso.

1.6.3 Lenti di materiale trasparente

A tutti è ampiamente noto che in ottica si fa spesso uso di *lenti* realizzate in materiali trasparenti (ad esempio vetro, polycarbonato, etc.). È chiaro che le lenti vengono impiegate per “manipolare” i vettori d’onda di fasci luminosi, cioè per “focalizzare” o “defocalizzare” luce. Come abbiamo visto, questa è anche la funzionalità degli specchi sferici, o in generale di superfici riflettenti curve. Ci aspettiamo quindi di poter trasferire quanto espresso nel par. 1.5.1 a sistemi che non sono fatti di metallo, ma, anzi, sono realizzati con materiali dielettrici più o meno trasparenti alla radiazione luminosa.

Consideriamo ad esempio il sistema descritto in Fig. 1.6.3, costituito da un cilindro di materiale dielettrico, con indice di rifrazione n , lavorato in modo che una sua estremità di base abbia una forma emisferica, con raggio di curvatura R (la figura ne mostra evidentemente una vista in sezione). Supponiamo di avere una sorgente puntiforme ed isotropa collocata nel punto S di figura, cioè posta sull’asse principale del sistema (definito come nel caso degli specchi sferici) a una distanza p dalla faccia panciuta del sistema stesso. Consideriamo un raggio luminoso che emerge da S e raggiunge la superficie del dielettrico nel punto P,⁵² con un angolo di incidenza θ_i . Per la legge di Snell, questo raggio entrerà nel materiale formando un angolo θ_t tale che $\sin \theta_t = \sin \theta_i / n$, e, muovendosi per questa direzione, incontrerà l’asse principale nel punto I, collocato a distanza q dalla superficie del dielettrico (vedi figura). Se supponiamo che l’angolo θ_i sia piccolo, così da non avere problemi di *aberrazione*, come abbiamo accennato trattando degli specchi sferici, potremo approssimare il seno dell’angolo con l’angolo stesso, e scrivere $\theta_t \sim \theta_i / n$. Detto O il centro di curvatura della superficie panciuta del dielettrico, consideriamo i due triangoli SPO e PIO; ragionando di trigonometria, in particolare del fatto che la somma degli angoli di un triangolo vale 180 gradi, potremo facilmente dimostrare che valgono le seguenti relazioni (fate riferimento alla figura per individuare i vari angoli): $\theta_i = \alpha + \beta$ e $\beta = \theta_t = \gamma$. Di conseguenza, deve essere $\gamma = (\alpha + \beta) / n = (\alpha + \gamma) / n$, ovvero $\alpha + n\gamma = (n - 1)\beta$. Osserviamo ora i due triangoli rettangoli SP’P ed IP’P: essi condividono lo stesso cateto P’P, di lunghezza d . Inoltre, nell’ipotesi di fasci parassiali, gli angoli α e β sono molto piccoli (così non sembra in figura per esigenze “tipografiche”!), e quindi le lunghezze degli cateti dei due triangoli si possono approssimare in questo modo: $SP' \sim p$; $IP' \sim q$, mentre $OP' \sim R$ (è il raggio di curvatura). Allora, tenendo anche conto che, per piccoli

⁵²Ci limitiamo a considerare *raggi parassiali*, cioè che formano piccoli angoli rispetto all’asse principale del sistema!

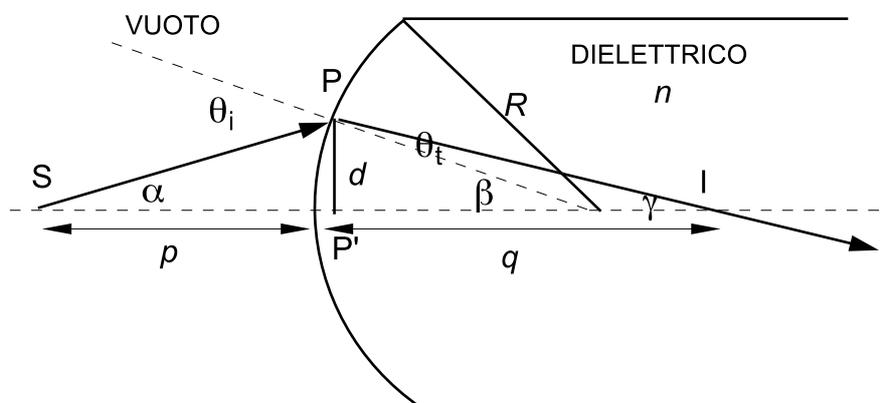


Figura 1.10: Rappresentazione schematica del sistema considerato per ricavare la legge di Eq. 1.15; la figura non è in scala, e la vista si riferisce ad una sezione.

angoli, tangente ed angolo hanno approssimativamente lo stesso valore, possiamo scrivere: $\tan \alpha \sim \alpha \sim d/p$, $\tan \beta \sim \beta \sim d/R$; $\tan \gamma \sim \gamma \sim d/q$.

Tenendo conto delle relazioni trovate sopra tra i vari angoli, sostituendo possiamo scrivere:

$$\frac{1}{p} + n \frac{1}{q} = (n - 1) \frac{1}{R} . \quad (1.15)$$

Questa relazione, talvolta definita **legge del diottra**⁵³, è formalmente molto simile alla legge degli specchi sferici, Eq. ???. Tra l'altro, essa stabilisce che, una volta fissati i “dati costruttivi” R ed n , la distanza q dipende solo da p ; quindi tutti i raggi uscenti dalla sorgente S , a patto di essere parassiali (cioè poco inclinati rispetto all'asse principale del sistema) sono focalizzati in un punto.

Dunque dovrebbe esservi chiaro a questo punto che un dielettrico di forma panciuta, cioè *convessa* grazie alla legge di Snell ha proprietà di manipolazione dei vettori d'onda di raggi luminosi del tutto simili a quelle di uno specchio sferico *concavo*. Analogamente, una superficie dielettrica *concava* si comporta in modo simile ad uno specchio sferico *convesso*, cioè produce un effetto in qualche modo opposto a quello di focalizzazione (“defocalizza”). Quindi tutte le constatazioni di ottica geometrica fatte per gli specchi sferici (formazione di immagini reali, virtuali, etc.) possono essere trasferite al caso dei dielettrici; ciò costituisce la base per lo studio delle lenti (nell'approssimazione parassiale).

Dal punto di vista costruttivo, generalmente le lenti sono realizzate con strati *sottili* di materiale dielettrico, e si parla allora di *lenti sottili*. Infatti spessori troppo abbondanti limitano la funzionalità del sistema ottico in termini di trasparenza ed anche per il verificarsi di distorsioni dell'immagine di vario tipo (ad esempio, l'*aberrazione cromatica*, legata alla dipendenza di n dalla lunghezza d'onda). Non entriamo in questi appunti nei dettagli delle leggi per le lenti sottili, ma comunque tenete sempre presente che una

⁵³Una sfera di materiale dielettrico si può chiamare *diottra*, da cui il nome “diottria” per il potere focalizzante delle lenti usate in oculistica.

superficie dielettrica convessa fa convergere (nel fuoco) i raggi luminosi che ci incidono sopra, una concava, viceversa, li fa divergere.

Nel caso delle lenti convesse (per semplicità dotate di una superficie convessa ed una piana), è facile definire la **distanza focale** f ; come nel caso degli specchi, questa è la distanza dalla superficie convessa in cui vengono fatti convergere i raggi luminosi quando la lente è illuminata con un fascio *collimato*. Come abbiamo già specificato, il fascio collimato si può ottenere immaginando di porre la sorgente a grandissima distanza dalla lente, cioè ponendo $p \rightarrow \infty$. L'Eq. 1.15 ci dice che, in questo caso, $n/q \sim (n-1)/R$; per definizione di fuoco, deve anche essere $f = q$. Notate però che qui, dato che supponiamo una lente sottile, il fuoco, si viene a trovare nel vuoto, e non nel mezzo dielettrico, per cui la relazione corretta è in questo caso: $1/q = 1/f \sim (n-1)/R$. Questa relazione può essere generalizzata nel caso di sistemi con due superfici curve, di raggio di curvatura R_1 ed R_2 , ottenendo: $1/f = (n-1)(1/R_1 - 1/R_2)$, che è detta **legge dei costruttori di lenti**. Con la convenzione di avere $f < 0$ nel caso di lenti divergenti, e ponendo coerentemente i raggi $R_1, R_2 < 0$ nel caso di superfici *concave*, la stessa legge si può usare anche per sistemi che “defocalizzano” la luce. Appreziate come questa legge sia potente, permettendo di riunire in un unico parametro, la *lunghezza focale* f , tutti i dettagli costruttivi di una lente. Inoltre, la definizione di fuoco permette di utilizzare anche per le lenti la legge già ricavata per gli specchi sferici, cioè di scrivere:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad (1.16)$$

relazione molto utile per determinare le proprietà di un sistema ottico costituito da una o più lenti.

1.6.4 Esercizio: una lente di ingrandimento

Una lente di ingrandimento ha una focale $f = 3.0$ cm. Un oggetto illuminato, che in Fig. 1.6.4 è rappresentato come una freccia di lunghezza $d = 1.0$ mm, è posto a distanza $p = 4.0$ cm dalla lente (che supponiamo sottile). A quale distanza dalla lente q si forma l'immagine? Che tipo di immagine è? Quanto vale l'ingrandimento M della lente?

Soluzione. Dobbiamo adottare le stesse procedure viste nel caso degli specchi sferici. Proviamo quindi a costruire l'immagine usando gli approcci dell'ottica geometrica. Dalla punta della freccia oggetto partirà un raggio parallelo all'asse principale della lente; esso, essendo parallelo all'asse, sarà deflesso dalla lente e intercederà il punto F dell'asse, posto a distanza f dalla lente. Prendiamo poi un altro raggio, quello che, partendo sempre dalla punta della freccia oggetto, si dirige verso il “punto di mezzo” della lente, indicato con A in figura. Questo raggio, che non viene deflesso dalla lente, incrocerà l'altro raggio nel punto I'. Questo punto sarà l'immagine della punta della freccia, che, anche in questo caso, apparirà capovolta; notate inoltre che le caratteristiche dell'immagine sono tali da renderla *reale*, cioè “indistinguibile” dall'oggetto. La distanza q a cui si forma l'immagine si ottiene dalla legge di Eq. 1.16: $1/q = 1/f - 1/p$, da cui, numericamente, $q = 12$ cm. L'ingrandimento, usando le regole degli specchi, è $|M| = q/p = 3$.

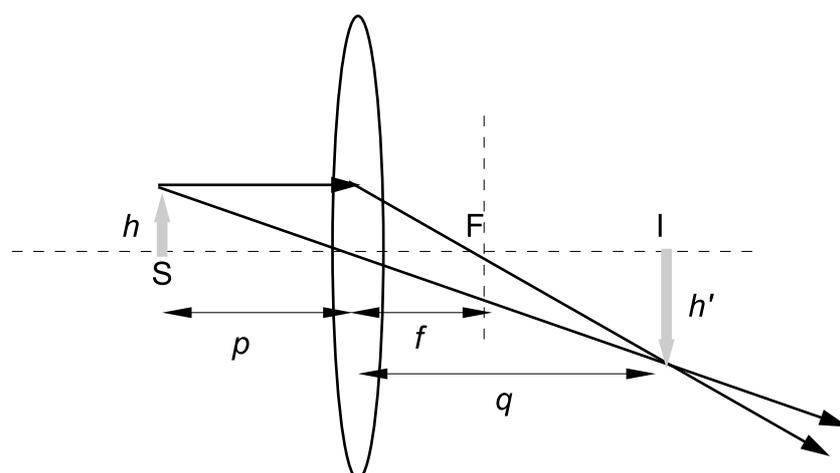


Figura 1.11: Rappresentazione schematica del problema con una lente piano-convessa.