

La soluzione di un circuito un po' complicato

fuso@df.unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 2 - FF, 31 ottobre 2014)

Questa nota riporta lo svolgimento della soluzione di un circuito un po' complicato, comprendente ben due generatori di differenza di potenziale e cinque resistori! Il circuito è uguale a quello presentato in una precedente versione di questa nota, ma qui vengono adottati, per fini didattici, metodi di soluzione diversi e più efficaci.

I. CIRCUITO, NODI, RAMI, MAGLIE

Il circuito considerato è quello rappresentato in Fig. 1: ci sono due generatori (ideali) di d.d.p., rispettivamente di valore V_1 e V_2 , e cinque resistori, di resistenza R_{1-5} . Di questo circuito riusciremo a sapere tutto, però, tanto per porre una domanda semplice, immaginiamo di voler conoscere la differenza di potenziale ΔV_2 ai capi del resistore R_2 . Al solo scopo di permettere conti abbastanza facili, immaginiamo $V_2 = 2V_1 = 2V$ e $R_j = jR$ (vuol dire $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, e così via), tranne che $R_5 = R_4 = 4R$.

Cominciamo con l'individuare nodi (punti del circuito dove si incontrano tre o più fili) e rami (successioni di rami che collegano due nodi adiacenti). Si individuano $N_n = 4$ nodi (n_{1-4} in figura) e $N_r = 6$ rami (r_{1-6} in figura). C'è un teorema che stabilisce che il numero di maglie da considerare per la soluzione è $N_m = N_r - N_n + 1 = 3$. Tre tra le possibili maglie m_{1-3} sono anche marcate in figura: la freccina indica il verso di percorrenza della corrente in ogni maglia, che è consigliabile scegliere in modo coerente fra le varie maglie. La convenzione che useremo sarà quella di scegliere positivo il verso di circolazione orario.

A. Semplificazione

Prima di procedere "al buio", conviene notare che, ai fini della domanda che ci siamo posti, il circuito può essere notevolmente semplificato. Infatti i resistori R_4 e R_5 sono evidentemente in parallelo tra loro senza nessun generatore o altro componente in mezzo, e il resistore R_3 è in serie con quel parallelo. Possiamo allora ridurre il circuito dato a quello di Fig. 2, in cui compare il resistore R_{345} che sostituisce i precedenti resistori ed equivale a quelli. Usando le regoline di serie e parallelo si trova facilmente $R_{345} = 5R$.

In questo nuovo circuito i nodi sono solo due e i rami tre, per cui le maglie da considerare sono solo due.

B. Principio di sovrapposizione

Il principio di sovrapposizione ha un ruolo ubiquitario nei problemi di cui vogliamo occuparci. Il motivo concettuale è semplice da capire: useremo la legge di Ohm

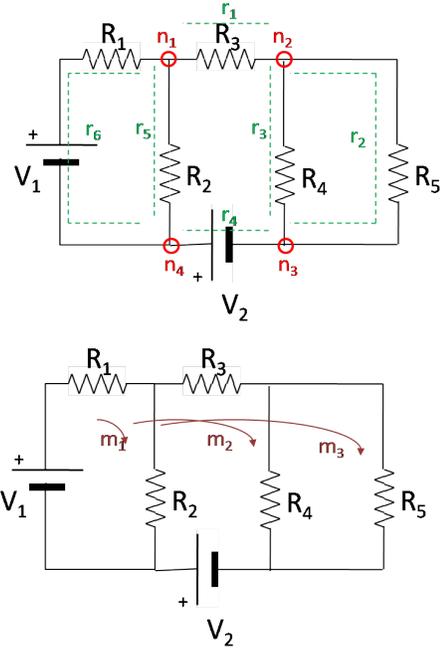


Figura 1. Schema del circuito con indicati i nodi, i rami (figura in alto) e le maglie indipendenti (figura in basso).

che è una relazione lineare, per cui il principio di sovrapposizione vale estesamente. Ad esempio, se il metodo di soluzione permette di scomporre il circuito in più "sottocircuiti" (ovvero maglie) ognuno caratterizzato da una certa intensità di corrente, i rami eventualmente a comune fra due maglie avranno una corrente netta data dalla somma algebrica delle correnti nelle maglie. Similmente il principio di sovrapposizione si può usare per determinare differenze di potenziale tra due punti del circuito una volta note le differenze di potenziale tra gli stessi punti relative alle singole maglie.

Il circuito di Fig. 2 può essere scomposto in tre differenti maglie, quella di sinistra, quella di destra e quella esterna, come rappresentate e denominate in figura. Vedremo come, operando due diverse scelte per la scomposizione in maglie, sarà possibile giungere allo stesso risultato. Alla fine proveremo anche un metodo differente, che è anche atteso portare allo stesso risultato.

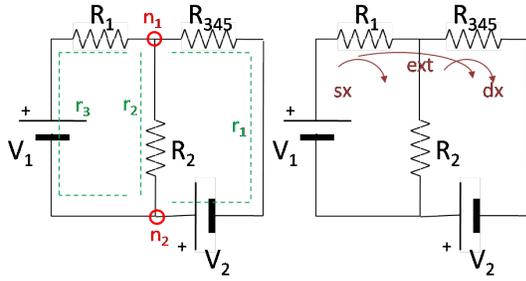


Figura 2. Schema del circuito semplificato equivalente a quello di Fig. 1 per gli scopi dell'esercizio; la figura di sinistra mostra nodi e rami, quella di destra le maglie con il verso di percorrenza e la denominazione usata nel testo (sx, dx ed ext stanno per sinistra, destra, esterna, rispettivamente).

C. Metodo 1: maglie laterali

Cominciamo considerando le due maglie laterali, di sinistra e di destra, facendo riferimento ai segni di figura per il verso positivo di circolazione delle correnti di maglia I_{m1} e I_{m2} . Notiamo poi che il resistore R_2 è a comune fra le due maglie. Dunque esso sarà attraversato da *entrambi* le correnti di maglia (principio di sovrapposizione).

Occorre a questo punto scrivere due equazioni algebriche che rappresentino il comportamento delle maglie. Questo può essere fatto usando la legge di Ohm, ovvero, se preferite, le leggi di Kirchoff (sapete che, a rigore, né Ohm, né tanto meno, Kirchoff, sono vere e proprie leggi, ma usiamo queste denominazioni convenzionali). Stando attenti a scegliere i segni giusti coerentemente con i versi di percorrenza definiti positivi per le correnti, le equazioni delle due maglie saranno

$$V_1 = R_1 I_{m1} + R_2 I_{m1} - R_2 I_{m2} \quad (1)$$

$$V_2 = R_2 I_{m2} - R_2 I_{m1} + R_{345} I_{m2} . \quad (2)$$

Usando le relazioni numeriche tra le varie grandezze si trova

$$V = 3R I_{m1} - 2R I_{m2} \quad (3)$$

$$2V = -2R I_{m1} + 7R I_{m2} . \quad (4)$$

Questo sistema a due equazioni algebriche lineari e due incognite può essere facilmente risolto fornendo $I_{m1} = (V/R)(11/17)$ e $I_{m2} = (V/R)(8/17)R$. Le due correnti scorrono in senso inverso attraverso il resistore R_2 . Dunque per la legge di Ohm si avrà $\Delta V_2 = R_2(I_{m1} - I_{m2}) = (6/17)V$, dove il segno positivo indica che il punto più in alto del resistore in figura si trova a potenziale maggiore.

D. Metodo 2: maglie sinistra e esterna

Vediamo cosa succede se scegliamo quest'altra suddivisione del circuito in maglie. Indicando con I'_{m1} e I'_{m2}

le nuove correnti di maglia, e osservando che stavolta è il resistore R_1 ad essere in comune (occhio: le correnti di maglia hanno lo stesso verso su questo resistore!), le equazioni relative saranno

$$V_1 = R_1 I'_{m1} + R_1 I'_{m2} + R_2 I'_{m1} \quad (5)$$

$$V_1 + V_2 = R_1 I'_{m2} + R_1 I'_{m1} + R_{345} I'_{m2} , \quad (6)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che i due generatori sono in serie tra loro nella maglia esterna (ancora principio di sovrapposizione delle tensioni, oppure legge di Kirchoff sulle differenze di potenziale).

Semplificando le espressioni come prima, si trova

$$V = 3R I'_{m1} + R I'_{m2} \quad (7)$$

$$3V = R I'_{m1} + 6R I'_{m2} . \quad (8)$$

Risolvendo si ottiene $I'_{m1} = (V/R)(3/17)$ e $I'_{m2} = (V/R)(8/17)$. Stavolta, il resistore R_2 è attraversato dalla sola corrente I'_{m1} , per cui $\Delta V_2 = R_2 I'_{m1} = (6/17)V$, che è risultato identico a quello di prima.

E. Metodo 3: sovrapposizione dei generatori

Per la soluzione di circuiti, ovvero maglie, contenenti diversi generatori di d.d.p. è possibile servirsi anche di un altro metodo, anch'esso basato sul principio di sovrapposizione, stavolta applicato alle d.d.p. dei generatori. Il metodo consiste nello scrivere tante equazioni del circuito quanti sono i generatori. Ogni equazione conterrà solo il contributo di un generatore, e l'altro sarà rimpiazzato (o gli altri saranno rimpiazzati) da un cortocircuito, cosa che, come sapete, tiene conto del fatto che un generatore di d.d.p. ideale come quelli che stiamo considerando ha resistenza interna nulla. Alla fine i risultati "parziali" dei vari circuiti dovranno essere integrati tra loro usando il principio di sovrapposizione, tanto per cambiare.

Dunque riprendiamo l'intero circuito e rimpiazziamo il generatore 2 con un cortocircuito. Quello che resta è facile da descrivere. Al generatore superstite, l'1, è collegata la serie di R_1 con il parallelo tra R_2 e R_{345} , con resistenza equivalente $R_{2345} = (10/7)R$. Con un po' di applicazione delle regoline dei partitori di corrente e tensione si trova $\Delta V_{G1} = (10/17)V$ (provate da soli a rifare i conti!).

Facciamo la stessa operazione sostituendo il generatore 1 con un cortocircuito: stavolta al generatore 1 resterà collegata la serie di R_{345} con il parallelo di R_1 e R_2 , che ha resistenza equivalente $R_{12} = (2/3)R$. Ragionando come sopra, si trova $\Delta V_{G2} = -(4/17)V$, dove il segno negativo indica che in questo caso il lato alto del resistore R_2 si trova a potenziale minore.

Per il principio di sovrapposizione è $\Delta V_2 = \Delta V_{G1} + \Delta V_{G2} = (6/17)V$, che è anche stavolta lo stesso risultato ottenuto prima.

Siete invitati a provare come esercizio altre possibilità (scelta di diverse maglie, trattazione del circuito originale) e anche a calcolare altre grandezze relative al circuito considerato.