

# Cavi schermati e coassiali (molto facoltativo!)

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 1 - FF, 29 aprile 2017)

Questa nota tratta, in maniera assolutamente parziale e concisa, il funzionamento di un cavo coassiale. La nota ha carattere *assolutamente facoltativo*, cioè, almeno ai fini della vostra preparazione per l'esame di Laboratorio 2, non cambia nulla se la leggete, o meno. Lo scopo è infatti quello di chiarire un dettaglio che ha il rilievo di una curiosità: perché qualche volta siete stati invitati, in laboratorio, a utilizzare il *cavo coassiale* e come, in realtà, vi sarebbe bastato usare un *cavo schermato*. Sicuramente potrete trovare un'analisi più approfondita, accurata e circostanziata in altri corsi tra quelli che avete frequentato, frequentate, o frequenterete.

## I. INTRODUZIONE

Al di fuori della repubblica delle banane in cui si trova il Laboratorio 2, il mondo delle misure è popolato assiduamente da cavi coassiali, normalmente terminati con connettori (per esempio, i BNC) anch'essi di geometria coassiale. Un sensore lo avete avuto anche voi: i connettori di ingresso e uscita di tanti dispositivi (oscilloscopio e generatore di funzioni, per esempio, ma anche l'ingresso di antenna del televisore) sono coassiali. Avete anche avuto un'idea dell'impiego dei cavi coassiali in qualche circostanza, per esempio per limitare gli effetti degli accoppiamenti con segnali parassiti (*rumore di pick-up*) in ambienti in cui erano presenti campi magnetici oscillanti e piuttosto intensi.

L'ambizione minimale di questa nota è fornire una semplice spiegazione al motivo per cui siete stati invitati a usare il *cavo coassiale* in alcune esperienze, e dimostrare come, in realtà, sarebbe stato sufficiente usare un *cavo schermato*, una tipologia di cavo più semplice. Poiché questo potrebbe lasciarvi la curiosità di sapere cosa fa e a cosa serve il cavo coassiale, si aggiunge nella nota una breve spiegazione del suo funzionamento nell'ambito di una tematica, quella delle *linee di trasmissione*, che avete studiato, o studierete, in altri corsi. A questi corsi si rimanda per ulteriori spiegazioni e per le debite contestualizzazioni.

## II. CAVO SCHERMATO

Un cavo schermato può avere una configurazione geometrica coassiale, cioè essere realizzato con una coppia di conduttori schematizzati come un cilindro (pieno) di raggio  $a$ , e un guscio sottile cilindrico di raggio  $b$  coassiale al primo. Per gli scopi della nostra descrizione chiamiamo  $\ell$  la lunghezza del sistema così costruito, e indichiamo con  $\epsilon_R$  la costante dielettrica relativa del mezzo che si trova fra i due conduttori: la Fig. 1(a) mostra una visione schematica di quanto abbiamo in mente.

Il cavo schermato, come ogni cavo, nell'accezione comune, è costituito da (almeno) due conduttori, che quindi sono adatti a trasferire un segnale, o una corrente. Per esempio, nella Fig. 1(b) il generatore di d.d.p.  $V_0$  (qui

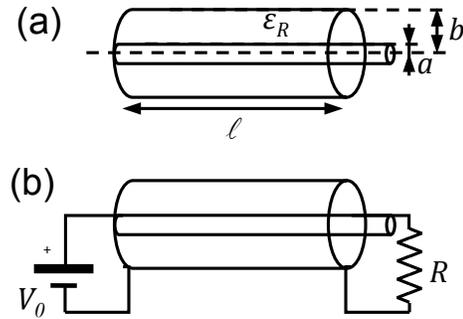


Figura 1. Rappresentazione del sistema considerato (a) e del suo impiego (b).

considerato ideale e continuo) è montato in modo da far circolare una corrente nel conduttore centrale e da qui nel carico resistivo  $R$  collegato alla fine del cavo. Una corrente di uguale intensità ( $I = V_0/R$ ), e verso opposto, circola quindi nel conduttore esterno, chiudendo il circuito.

Visto in termini generali, il cavo permette un trasferimento di potenza dalla sorgente (il generatore) all'utilizzatore (il carico). Infatti, all'interno del materiale dielettrico che separa i due conduttori si trovano un campo elettrico (radiale) e un campo magnetico (tangenziale), in questo esempio statici, che danno luogo a un vettore di Poynting  $\vec{S}$  di direzione assiale, orientato dalla sorgente all'utilizzatore. Come si può facilmente verificare, il modulo di questo vettore è pari alla densità di potenza trasferita, cioè  $\Phi(\vec{S}) = (V_0^2/R)$ , dove il flusso è calcolato sulla sezione del dielettrico ortogonale all'asse del sistema.

Trascurando gli "effetti ai bordi", campi e vettore di Poynting sono nulli fuori dal cavo. Qualitativamente, questo vuol dire che c'è uno *schermo* fra interno e esterno del cavo, cioè che quello che succede dentro al cavo non produce alcun effetto al di fuori (non c'è trasferimento, o perdita, di energia al di fuori del cavo). Applicando un concetto generale di "reciprocità", si può facilmente affermare che è vero anche il viceversa, cioè che l'interno del cavo non risente di campi eventualmente presenti al suo esterno. Se volete, il conduttore esterno del cavo si

comporta da gabbia di Faraday per i campi elettrici e da supporto per correnti parassite in grado di schermare i campi magnetici oscillanti.

Il tanto vituperato accoppiamento con segnali parassiti richiede che il cavo che porta il segnale “senta” i campi, in particolare campi magnetici oscillanti, prodotti all’esterno e presenti nella zona in cui si trova il cavo. Dunque è evidente che l’uso del cavo schermato riduce, per quanto possibile, questo tipo di accoppiamenti, permettendo di aumentare l’immunità nei confronti del rumore di pick-up. La locuzione “per quanto possibile” significa che l’effetto di schermatura ha, inevitabilmente, dei limiti, in particolare quando i campi esterni al cavo sono intensi e oscillanti a frequenze relativamente alte. In certe applicazioni, schermare anche in modo molto raffinato i conduttori non è sufficiente, e occorre passare a trasmissioni ottiche in fibra, ovviamente immuni rispetto ai campi parassiti. Tuttavia la vostra esperienza pratica dovrebbe avervi suggerito che molto spesso l’effetto di schermatura è sufficiente per ridurre sensibilmente la quantità di rumore raccolto nella misura.

### III. CAVO COASSIALE

Un cavo coassiale propriamente detto può sicuramente avere la stessa configurazione geometrica del cavo schermato modello di Fig. 1(a). Osserviamo che il sistema considerato si comporta come un condensatore cilindrico, e dunque, come è facilissimo dimostrare, al cavo coassiale può essere associata una capacità

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_R}{\ln(b/a)} \ell, \quad (1)$$

dove tutte le grandezze rappresentate dai vari simboli sono state definite, o hanno un’ovvia definizione.

A questo sistema si può anche associare, sempre in maniera elementare, un coefficiente di autoinduzione: allo scopo è sufficiente immaginare di inviare una corrente di intensità  $I$  nel conduttore centrale, che qui supponiamo di raggio trascurabile ( $a \ll b$ ), ovvero interessato dalla corrente prevalentemente sulla sua superficie esterna, come tende a verificarsi per l’effetto pelle. Questa corrente crea un campo di induzione magnetica tangenziale, di ampiezza  $B(r) = \mu_0 I / (2\pi r)$ , con  $r$  coordinata radiale cilindrica. Il flusso di questo campo su una superficie che, nel piano della Fig. 1(a) è rappresentata da un rettangolo di altezza  $\ell$  e base  $(b - a)$ , risulta  $\Phi_S(\vec{B}) = \mu_0 I \ell \ln(b/a) / (2\pi)$ , per cui

$$L = \frac{\mu_0 \ln(b/a)}{2\pi} \ell, \quad (2)$$

con tutti i simboli definiti, come prima.

In un cavo coassiale capacità e induttanza sono “esattamente” (entro tolleranze molto basse) rappresentate dalle equazioni appena scritte. Allo scopo è necessario, per esempio, che le dimensioni rilevanti subiscano variazioni trascurabili quando il cavo viene piegato, schiacciato o

curvato, e che il dielettrico, e anche il conduttore esterno, siano omogenei e uniformi in tutta la regione di spazio tra i conduttori e per tutta la lunghezza del cavo. Sono sostanzialmente queste caratteristiche costruttive che distinguono un cavo coassiale da uno schermato: ovviamente il gioco vale la candela solo se l’uso di un cavo coassiale comporta reali vantaggi, al di là della schermatura.

Infatti il cavo coassiale esiste per un motivo specifico: esso si può comportare da *linea di trasmissione* anche per impulsi di segnale o per segnali di frequenza elevata. Nella pratica, di una linea di trasmissione non si ha bisogno quando si lavora a frequenze sotto il centinaio di kHz. Nelle nostre esperienze banana-like ci siamo raramente spinti al di sopra di qualche kHz, affermazione che dimostra come, di fatto, l’uso che avete fatto del cavo coassiale sia un lusso.

#### A. Linea di trasmissione a elementi distribuiti

Il concetto di linea di trasmissione rientra in un contesto generale che qui non vogliamo certamente affrontare. In termini molto qualitativi, ci limitiamo ad affermare che una linea di trasmissione permette di trasferire i segnali dalla sorgente all’utente in maniera “efficiente”, con poche (idealmente nulle) dispersioni di potenza e con poche (idealmente nulle) “riflessioni” all’uscita.

Parlare di “trasmissione” implica tenere conto di “ritardi” temporali tra inizio e fine, ovvero ingresso e uscita, della linea. Questi ritardi originano da un motivo ovvio: a ogni filo conduttore è lecito associare una capacità e un’induttanza, poiché di certo il campo elettrico da esso generato (quando interessato da una corrente) darà luogo, con un altro conduttore, o con la terra, o con quello che vi pare, a una differenza di potenziale realizzando un condensatore (forse tanti, tantissimi condensatori). Analogamente, la corrente che passa nel filo produce un campo magnetico, che si può auto-accoppiare, ovviamente, con il filo stesso. In un gergo da laboratorio, queste sono le capacità e induttanze spurie, o parassite, a cui tante volte ci siamo appellati per giustificare risultati fuori modello. Infatti generalmente non è possibile determinare con un calcolo il loro valore, per cui non è possibile includerle quantitativamente in un modello predittivo o interpretativo.

Tuttavia queste capacità e induttanze esistono, e, a causa del fatto che ci vuole del tempo per caricare un condensatore, o per “vincere” l’inerzia di un induttore, è ovvio che non è possibile trasmettere in un tempo indefinitamente breve capacità e induttanze si possono trascurare (per esempio, e con un certo significato, per le onde elettromagnetiche), la trasmissione di un segnale non può avvenire a velocità arbitrariamente alta: la teoria della relatività, corroborata da un’infinità di evidenze sperimentali, lo stabilisce in modo chiaro.

Ciò stabilito, commentiamo ancora, sempre brevemente, sul contesto nel quale intendiamo muoverci. Notiamo che, se il concetto di dispersione di potenza è, probabil-

mente, ben chiaro a tutti (basta verificare che il vettore di Poynting fuori dalla linea di trasmissione sia nullo, o trascurabile), quello di riflessione è anch'esso un po' sfuggente. Siamo però tutti abituati alla riflessione di un fascio di luce, cioè per una radiazione elettromagnetica di frequenza così elevata da poter essere apprezzata dall'occhio, e tutti sappiamo che c'è una riflessione, almeno parziale, quando un raggio di luce colpisce una lastra di vetro (supponiamo qui un'incidenza normale, quindi la legge di Snell non serve). Il vetro è un materiale dielettrico, come l'aria o, meglio ancora, il vuoto. La riflessione allora può essere interpretata (questa interpretazione la daremo anche nel nostro corso, più avanti) come conseguenza del cambio di una caratteristica del dielettrico, in particolare dell'indice di rifrazione, ovvero della costante dielettrica.

Assumere che non ci sia riflessione del nostro segnale, ovvero che essa sia trascurabile, impone che la trasmissione avvenga in un sistema in cui le caratteristiche di propagazione, in particolare la velocità (di fase, come si definisce in elettromagnetismo), sono uniformi. Ancora di più: per avere riflessioni trascurabili occorre che anche l'"interfaccia" tra linea di trasmissione e utilizzatore sia uniforme, che è un buon motivo per cui anche i connettori (i BNC, ad esempio) devono mantenere una configurazione coassiale.

Dal punto di vista qualitativo, l'uniformità della linea di trasmissione realizzata con un cavo coassiale è, o può essere, soddisfatta dal fatto che capacità e induttanza, come definite dalle Eqs. 1,2, sono funzioni lineari della lunghezza  $\ell$ . Possiamo infatti definire capacità e induttanza per unità di lunghezza,  $C' = C/\ell$  e  $L' = L/\ell$ , omogenee per tutta la lunghezza del cavo.

Siamo quindi autorizzati a modellare la nostra linea di trasmissione come una successione di induttori e capacitori, montati come in Fig. 2. Notate che in questo modello stiamo trascurando altri possibili effetti, come la presenza di una resistenza e di una *conduttività* (reciproco della resistenza) per unità di lunghezza: usando un buon conduttore, come il rame, la prima affermazione è piuttosto ben verificata, almeno trascurando l'*effetto pelle*. Trascurare la conduttività significa invece supporre che il dielettrico che separa i due conduttori non abbia "perdite": nella pratica questo implica usare frequenze per le quali il dielettrico si comporta in maniera adeguata, affermazione ragionevole, in genere, se  $f$  è minore delle centinaia di MHz.

L'uniformità delle caratteristiche del cavo consente di distribuire in modo continuo induttanza e capacità: in altre parole, su un elemento di lunghezza  $dz$  della linea troveremo una capacità  $dC = C'dz$  e un'induttanza  $dL = L'dz$ . Il passaggio al continuo così realizzato è necessario per permettere la soluzione analitica del problema che vogliamo trattare. In esso ci limitiamo a considerare segnali sinusoidali alternati, che ci consentono di impiegare il metodo simbolico (fasori).

Come potete facilmente verificare sfruttando le vostre conoscenze su impedenze e fasori e usando un mi-

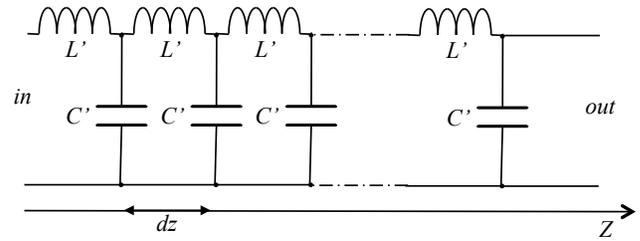


Figura 2. Modello del cavo coassiale come linea di trasmissione a elementi distribuiti.

nimo di matematica, per ogni elemento di lunghezza  $dz$  avremo una caduta di potenziale (in senso fasoriale)  $dV_\omega = -j\omega dL I_\omega$ , e ogni elemento di lunghezza sarà interessato da una corrente, che va sulle armature del condensatore,  $dI_\omega = -j\omega dC V_\omega$ . Dividendo queste espressioni per  $dz$ , come siamo abituati e autorizzati a fare, otteniamo due equazioni differenziali accoppiate:

$$\frac{\partial V_\omega}{\partial z} = -j\omega L' I_\omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial z} = -j\omega C' V_\omega \quad (4)$$

Derivando ulteriormente rispetto a  $z$  entrambi i membri e combinando si ottengono due equazioni del secondo ordine disaccoppiate, che trovano qualche volta il nome di *equazioni del telegrafista*:

$$\frac{\partial^2 V_\omega}{\partial z^2} = -\omega^2 L' C' V_\omega \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 I_\omega}{\partial z^2} = -\omega^2 L' C' I_\omega \quad (6)$$

Come ben sapete, le soluzioni di queste equazioni possono essere scritte nella forma

$$V_\omega(z) = V_{\omega,0}^+ \exp(-\gamma z) + V_{\omega,0}^- \exp(\gamma z) \quad (7)$$

$$I_\omega(z) = I_{\omega,0}^+ \exp(-\gamma z) + I_{\omega,0}^- \exp(\gamma z) \quad (8)$$

$$\gamma = j\omega \sqrt{L' C'} \quad (9)$$

dove i vari coefficienti sono dei fasori [dunque, grandezze complesse con andamento temporale descritto da funzioni  $\exp(j\omega t)$ ] che rappresentano le grandezze considerate, tensione e corrente, nella posizione  $z = 0$ , ovvero all'inizio della linea di trasmissione.

Tenendo conto del carattere fasoriale dei coefficienti, è facile, almeno per chi ha già studiato un minimo di elettromagnetismo, ottica e onde (per chi non lo ha già fatto, torneremo sull'argomento anche nel nostro corso), rendersi conto che le funzioni trovate come soluzione rappresentano la sovrapposizione di onde (armoniche e monocromatiche) che si propagano nel verso positivo e negativo dell'asse  $Z$ . La frequenza angolare di queste onde è proprio  $\omega$ , mentre il *numero d'onda* è

$$k = \omega \sqrt{L' C'} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_R} \quad (10)$$

dove abbiamo esplicitato le espressioni di  $L'$  e  $C'$  per il cavo coassiale. Un calcolo dimensionale conferma che l'espressione di Eq. 10 ha proprio le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, come richiesto dal ruolo di numero d'onda.

## B. Propagazione

Volendo, e per fare un po' più di chiarezza, possiamo riscrivere le funzioni d'onda trovate esplicitando l'andamento temporale contenuto nei fasori delle condizioni iniziali (ma mantenendo sempre il carattere di rappresentazione simbolica dovuto all'uso di grandezze complesse):

$$\begin{aligned} V(z, t) &= V_0^+ \exp(j(\omega t - kz)) + V_0^- \exp(j(\omega t + kz)) \quad (11) \\ I(z, t) &= I_0^+ \exp(j(\omega t - kz)) + I_0^- \exp(j(\omega t + kz)) \quad (12) \end{aligned}$$

dove spero che la scelta dei segni, un po' bislacca, non vi crei problemi.

Come prima osservazione, notiamo come l'ipotesi di riflessione che abbiamo formulato prima sia compatibile con la soluzione trovata: la sovrapposizione delle due onde che si propagano in versi opposti dimostra infatti che è possibile avere riflessione, e che la sua presenza, o rilevanza, dipende matematicamente dai valori iniziali corrispondenti.

Vediamo poi un altro aspetto interessante: la velocità di propagazione delle nostre onde (la sola velocità di fase, la linea di trasmissione considerata è evidentemente non dispersiva) è, come si dimostra facilmente (il "facilmente" ha il significato di prima, anche di questo parleremo ancora),

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_R}}; \quad (13)$$

se la propagazione avvenisse nel vuoto, cioè per  $\epsilon_R = 1$ , la velocità sarebbe quella della luce, cioè  $c$ . Possiamo quindi porre  $v = c/\sqrt{\epsilon_R} < c$  (in un altro contesto porremmo  $\sqrt{\epsilon_R} = n$ , con  $n$  indice di rifrazione reale del dielettrico attraverso cui avviene la propagazione). Per curiosità, i cavi coassiali in uso tipico in laboratorio (modelli RG-58/U, o simili) sono costruiti con un dielettrico, il polietilene, che alle frequenze in gioco ha una costante dielettrica relativa  $\epsilon_R \simeq 2.3$ , a cui corrisponde  $v \simeq 0.66c$ .

Come ulteriore curiosità, osservate che talvolta spezzoni di cavi coassiali sono usati come *linee di ritardo*: il tempo che un impulso (arbitrariamente breve, qui continuiamo a trascurare il comportamento dispersivo della linea di trasmissione) impiega per percorrere lo spezzone è qualche volta indicato, di norma in unità di ns, sul cavo stesso. Ovviamente, e trascurando la dispersione, esso dipende dalla lunghezza  $\ell$  dello spezzone attraverso la relazione  $\ell/v$ . Per intenderci, un metro di cavo produce un ritardo di circa 5 ns.

## C. Impedenza caratteristica

La proprietà più importante di un cavo coassiale, conseguenza diretta dell'uniformità delle sue caratteristiche di propagazione lungo l'intera lunghezza, è la sua *impedenza*: per i cavi da voi usati, e per la maggioranza dei cavi coassiali in circolazione, essa è fissata al valore nominale  $Z = 50$  ohm.

Determinare l'impedenza del cavo a partire dal suo modello (quello di Fig. 2) è operazione complicata, a causa del carattere distribuito delle induttanze e capacità. Molto più semplice è partire dalla definizione di impedenza:  $V_\omega = Z I_\omega$ . Cerchiamo allora una relazione che consenta di legare  $V_\omega$  a  $I_\omega$  scegliendo solo *una* delle due componenti della funzione d'onda soluzione, per esempio quella che si propaga nel verso positivo dell'asse  $Z$ . I valori iniziali  $V_{\omega,0}^+$  e  $I_{\omega,0}^+$  dipendono ovviamente da "come" il cavo viene utilizzato, cioè da quali sono e come funzionano la sorgente e l'utilizzatore. Dunque dovremo lavorare un po' di matematica per trovare delle relazioni che ci permettano di evitare questa dipendenza dalle condizioni di impiego.

Ora che consociamo le soluzioni  $V_\omega(z)$  e  $I_\omega(z)$  (prendiamo le forma espresse in Eqs. 7, 8, limitandoci, come già affermato, alle componenti che si propagano nel verso positivo dell'asse  $Z$ , per cui useremo l'apice "+"), possiamo inserirle nelle Eq. 3, ottenendo

$$\frac{\partial V_\omega^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [V_{\omega,0}^+ \exp(-\gamma z)] = \quad (14)$$

$$= -\gamma V_{\omega,0}^+ \exp(-\gamma z) = -j\omega L' I_{\omega,0}^+ \exp(-\gamma z), \quad (15)$$

da cui ricaviamo l'uguaglianza

$$\gamma V_{\omega,0}^+ = j\omega L' I_{\omega,0}^+. \quad (16)$$

A questo punto possiamo stabilire che

$$V_\omega^+(z) = V_{\omega,0}^+ \exp(-\gamma z) = \quad (17)$$

$$= j \frac{\omega L'}{\gamma} I_{\omega,0}^+ \exp(-\gamma z) = \quad (18)$$

$$= j \frac{\omega L'}{\gamma} I_\omega^+(z). \quad (19)$$

Dunque otteniamo

$$Z = j \frac{\omega L'}{\gamma} = \frac{j\omega L'}{j\omega \sqrt{L'C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}, \quad (20)$$

dove per l'ultimo passaggio abbiamo esplicitato l'espressione di  $\gamma$  trovata prima.

Ancora, sfruttando le espressioni di  $C'$  e  $L'$  di Eqs. 1,2, possiamo porre

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_R} \frac{\ln(b/a)}{2\pi}} = Z_{vac} \frac{\ln(b/a)}{2\pi \sqrt{\epsilon_R}}, \quad (21)$$

dove con  $Z_{vac} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  abbiamo indicato la cosiddetta *impedenza del vuoto*, il cui valore, nel sistema di unità di misura da noi utilizzato, è  $Z_{vac} \simeq 377$  ohm..

Per la tipologia di cavo generalmente usata in laboratorio (RG-58/U), i raggi dei conduttori sono in rapporto  $b/a \simeq 4$ , per cui, tenendo conto della costante dielettrica relativa del polietilene alle frequenze di interesse,  $\epsilon_R \simeq 2.3$ , si ottiene proprio  $Z \simeq 50$  ohm.

#### D. Piccole precisazioni

In primo luogo, osservate che in tutta la descrizione che è stata fatta abbiamo supposto che i materiali non avessero proprietà magnetiche rilevanti: una trattazione più accurata dovrebbe tenere conto delle eventuali proprietà magnetiche, portando a rimpiazzare  $\mu_0$  con il prodotto  $\mu_0\mu_R$  in tutte le equazioni rilevanti.

Inoltre, come già affermato, il modello di Fig. 2 non è completo: a rigore, in serie agli induttori distribuiti dovrebbe essere considerata una resistenza distribuita  $R'$ , che tiene conto della resistività del filo, e un'altra resistenza dovrebbe essere posta in parallelo ai condensatori distribuiti, per tenere conto delle perdite del dielettrico a frequenze alte. Più elegantemente, gli effetti delle perdite possono essere espressi introducendo una conduttività distribuita  $G'$ , le cui dimensioni sono, ovviamente, quelle di un reciproco di resistenza per unità di lunghezza.

Il conduttore centrale di un cavo coassiale è realizzato in rame di grande diametro (tipicamente diversi decimi di mm), e quindi ha una resistenza DC per unità di lunghezza sicuramente trascurabile. Tuttavia, come già segnalato, i cavi coassiali vengono usati per segnali a frequenza alta, dove lo spessore  $\delta_{skin}$  di penetrazione dell'effetto pelle diventa piccolo (per  $f \sim 1$  MHz, è già  $\delta_{skin} < 0.1$  mm). Anche se all'aumentare della frequenza il comportamento reattivo tende sempre più a prevalere, non è sicuramente vero che  $R'$  è sempre, e del tutto, trascurabile.

Lo stesso si verifica per le perdite del dielettrico, dovute alla circostanza che i meccanismi di polarizzazione del materiale non riescono più a seguire le rapide variazioni di campo elettrico applicato. Di nuovo, non è sicuramente vero che  $G'$  è sempre, e del tutto, trascurabile. Per i cavi di tipo RG-58/U si ritiene, praticamente, che essi si comportino in modo sufficientemente ben descritto da quanto sviluppato in precedenza per frequenze minori di alcuni GHz (certamente molto al di fuori delle nostre possibilità di laboratorio, ma certamente prossime a frequenze di uso comune, per esempio nei telefonini e nei wi-fi).

È molto facile dimostrare che, tenendo conto di  $R'$  e  $G'$ , il termine  $\gamma$  di Eq. 9 diventa complesso:

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} ; \quad (22)$$

la conseguenza principale di questa circostanza è che la propagazione del segnale nella linea è accompagnata da un'attenuazione [i termini del tipo  $\exp(-\gamma z)$  danno luogo ad esponenziali decrescenti con  $z$ , che vanno a moltiplicare tutto il resto]. Un'ulteriore conseguenza è che, essendo  $R'$  e  $G'$  entrambi dipendenti dalla frequenza, la linea di

trasmissione diventa dispersiva, cioè la *velocità di gruppo*  $v_g = d\omega/dk$  non è costante con la frequenza.

Infine, anche l'espressione dell'impedenza caratteristica  $Z$  si modifica, diventando complessa:

$$Z = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} . \quad (23)$$

#### E. Matching delle impedenze

Concludiamo questa nota dando alcune informazioni semi-qualitative su un aspetto di importanza tecnica fondamentale quando si impiegano segnali a frequenze alte (oltre il MHz, nella pratica) o impulsi di durata breve (sotto le centinaia di ns, nella pratica): il *matching delle impedenze*.

Per prima cosa, osserviamo che, se la linea di trasmissione non fosse uniforme, per esempio per una variazione di  $\epsilon_R$ , delle dimensioni del sistema, o della sua forma, da qualche parte nella sua lunghezza avremmo un (brusco) cambiamento di  $Z$ , e probabilmente anche un sensibile cambiamento di  $v$ . L'impedenza  $Z$  rappresenta il rapporto tra d.d.p. e intensità di corrente trasportata nel cavo. In modo naïf, possiamo pensare che, dovendo la carica conservarsi, e quindi la corrente rimanere costante attraverso la (brusca) variazione, le condizioni di operazione del cavo devono modificarsi.

Normalmente, se lo scopo della linea è quello di trasmettere potenza da sorgente a utilizzatore, sarebbe desiderabile fare in modo che il segnale riflesso, quello che si propaga nel verso negativo dell'asse  $Z$ , fosse trascurabile. Matematicamente, questo vuol dire che i coefficienti  $V_0^-$  e  $I_0^-$  della sovrapposizione di onde di Eq. 7 dovrebbero essere trascurabili rispetto a  $V_0^+$  e  $I_0^+$ . A causa della (brusca) variazione di  $Z$ , può invece verificarsi che essi diventino non trascurabili, allo scopo di continuare a soddisfare la definizione di  $Z$  come rapporto tra d.d.p. e intensità di corrente.

Dunque, la brusca variazione comporta una riflessione del segnale, in modo piuttosto simile (molto simile se si assume che cambi anche  $v$ ) a quanto succede inviando un fascio di luce sulla faccia di una lastra dielettrica (ne abbiamo già fatto cenno).

Lo stesso ragionamento può applicarsi all'uscita della linea di trasmissione: essa sarà connessa a un utilizzatore, o un carico (magari rappresentato da uno strumento di misura, come un oscilloscopio), caratterizzato da un'impedenza di ingresso, generalmente complessa,  $Z_{load}$ . Detta  $Z$  l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione, le riflessioni saranno minimizzate tanto più  $Z_{load} = Z$ .

Infine, poiché, come già sappiamo dai tempi di Thévenin, si realizza un trasferimento di potenza ottimale quando la resistenza, o impedenza, di uscita della sorgente, che qui chiamiamo  $Z_{source}$ , è simile a  $Z_{load}$ , risulta evidente che le condizioni di "miglior funzionamento" di

una linea di trasmissione suggeriscono

$$Z_{source} \simeq Z \simeq Z_{load} . \quad (24)$$

Il valore  $Z = 50$  ohm è diventato, nel corso degli anni, uno standard convenzionale (in rete potete trovare delle spiegazioni storiche sul perché sia stato scelto proprio questo valore). Dunque capite bene che non è un caso se la resistenza, o impedenza, di uscita del generatore di funzioni sia proprio  $Z_{source} = 50$  ohm. Andando avanti

nelle vostre frequentazioni di laboratorio, scoprirete che il valore di 50 ohm è anche uno standard per la resistenza, o impedenza, di ingresso di tanti oscilloscopi, e vedrete come, qualche volta e per gli strumenti meno sofisticati, per ottenere questo specifico valore di  $Z_{load}$  sia necessario porre una resistenza di 50 ohm (nel mio gergo detta “tappo a 50 ohm”) in parallelo all’ingresso (che ha una resistenza convenzionale di 1 Mohm, dunque il parallelo conduce a  $Z_{load} \simeq 50$  ohm).