Corso di Laurea CIA – PROVA DI SECONDA PROVA DI VERIFICA – a.a. 2009/10

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un piano inclinato di massa M = 2.0 kg, angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale e altezza h = 4.0 m, può **scorrere con attrito trascurabile** in direzione orizzontale ed è **inizialmente fermo**. Sulla sua sommità si trova, anch'esso **inizialmente fermo**, un corpo puntiforme di massa $m = M/4$ = 0.50 kg, che può scivolare sul piano inclinato con **attrito trascurabile**. A un dato istante il corpo puntiforme viene lasciato libero di scivolare lungo il piano inclinato, avendo velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; tenete presente che, in questo esercizio, è necessario considerare in modo opportuno il **movimento orizzontale del piano inclinato!** Ricordate infine che $cos(\pi/3)= ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]

   a) Quanto vale, in **modulo**, la velocità V del piano inclinato nell'istante in cui il corpo puntiforme ne raggiunge la base?
   V = …………………………….. ~ .... m/s $(gh/34)^{1/2} \sim 1.1$ m/s [sul sistema cositituito da copro puntiforme e piano inclinato non agiscono forze esterne in direzione orizzontale; infatti le sole forze esterne sono il peso e la reazione vincolare che la superficie (orizzontale) di appoggio esercita sulla base del piano inclinato. Entrambi tale forze sono verticali. Si può dunque affermare che il sistema è isolato in direzione orizzontale, e dunque in questa direzione si conserva la quantità di moto, cioè, essendo nulla la quantità di moto iniziale totale (tutto è fermo all'inizio), si ha: $0 = MV + mv_X$, avendo indicato come v_X la velocità del corpo puntiforme in direzione X (orizzontale). Inoltre, non essendoci forze dissipative, si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè: $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (M/2)V^2+(m/2)v^2-mgh$, essendo h la variazione di quota del corpo puntiforme nel processo. A questo punto occorre notare che, per la geometria del problema, si ha $v_X = v cos\theta = v/2$ (l'ultima tenendo conto del valore del coseno). Si hanno dunque due equazioni che, riscritte tenendo conto della relazione tra le masse, recitano: $v/2+4V = 0$ e $v^2+4V^2-2gh = 0$. La soluzione del sistema porta alla risposta]

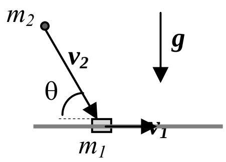
   b) Come si scrive l'equazione del moto del centro di massa del **sistema** (piano + corpo puntiforme) rispetto alla direzione orizzontale? [Dovete in pratica scrivere l'espressione della componente orizzontale dell'accelerazione a_{CM} del centro di massa]
   a_{CM} = ………………………………. 0 [come già discusso nella soluzione al punto precedente, il sistema può essere considerato isolato in direzione orizzontale. In altre parole, su di esso non agiscono forze esterne in direzione orizzontale, e dunque l'accelerazione è nulla]

   c) Quanto vale, in **modulo**, lo spostamento orizzontale ΔX che il piano inclinato compie in corrispondenza della discesa del corpo puntiforme?
   ΔX = …………………………….. ~ .... m $|-htg\theta/5| \sim 0.46$ m [dato che il centro di massa del sistema è inizialmente fermo e che nulla è la sua accelerazione in direzione orizzontale, in questa direzione esso non si sposta, cioè $0 = \Delta x_{CM}$. D'altra parte, per la definizione di posizione del centro di massa, si ha $\Delta x_{CM} = m\,\Delta x + M\Delta X$, con Δx spostamento in direzione orizzontale del corpo puntiforme. Poiché nel processo considerato il corpo scende lungo il piano inclinato, si può affermare che esso compie uno spostamento orizzontale pari a $htg\theta$ **misurato rispetto al piano inclinato**. Poiché anche il piano inclinato si sposta (della quantità incognita ΔX, si ha $\Delta x = \Delta X+htg\theta$, per cui si ha: $0 = \Delta X(M+m)+mhtg\theta$, ovvero, usando la relazione tra le masse: $0 = 5\Delta x+htg\theta$, da cui la soluzione]

2. Due carrellini (puntiformi!) di massa rispettivamente $m_1= m/4$ e $m_2 = m$, con m = 0.50 kg, si muovono con **attrito trascurabile** lungo l'asse X (orizzontale) di un sistema di riferimento. I due carrellini sono collegati da una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 10 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 80 cm (in pratica le due estremità della molla sono vincolate ai due carrelli); l'asse della molla rimane sempre parallelo all'asse X. All'istante t_0 = 0 i due carrellini si muovono con velocità $\mathbf{v_{01}}$ e $\mathbf{v_{02}}$ dirette **entrambe** nel verso positivo dell'asse X e di modulo rispettivamente $v_{01} = 2v_0$ e $v_{02} = v_0$, con v_0 = 1.0 m/s. Inoltre si sa che, all'istante t_0, le coordinate dei due carrellini sono rispettivamente x_{01} = 0 (il carrellino 1 sta passando per l'origine dell'asse) e $x_{02} = L_0$. Con il passare del tempo il carrellino 1 si avvicina al 2 e la molla si comprime fino a raggiungere la compressione massima Δ_{MAX}.

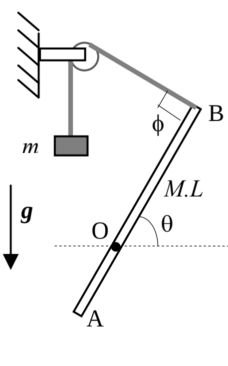
   a) Quanto vale, in modulo, la compressione massima della molla, Δ_{MAX}?
   Δ_{MAX} = …………………………………… = …….. m $(m/(5k))^{1/2}v_0 = 0.10$ m [i due carrellini formano un sistema per la presenza dell'interazione elastica prodotta dalla molla. Tale sistema è isolato lungo l'asse X, non essendoci forze esterne in questa direzione; dunque si conserva la quantità di moto totale in direzione X, cioè $m_1v_{01}+m_2v_{02} = m_1v_1+m_2v_2$, essendo v_1 e v_2 le velocità dei due carrellini in un istante generico (attenzione: sono le componenti orizzontali delle velocità rispetto al riferimento considerato). Inoltre, non agendo forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, cioè, tenendo conto che inizialmente la molla è "scarica" (la distanza fra i carrelli è la lunghezza della molla, che inizialmente è pari alla lunghezza di riposo!): $(m_1/2)v_{01}^2 + (m_2/2)v_{02}^2 = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 + (k/2)\Delta^2$, dove abbiamo tenuto in debito conto dell'espressione dell'"energia" potenziale elastica, che dipende quadraticamente dalla compressione (o estensione) della molla. La condizione di massima compressione, ovvero minima distanza relativa tra i carrellini, si ottiene quando $v_1 = v_2 = v$. Dunque, tenendo anche conto delle relazioni tra masse e tra velocità date nel testo, la conservazione della quantità di moto si scrive:; $(3/2)mv_0 = (5/4)mv$, da cui $v = (6/5)v_0$. La conservazione dell'energia meccanica diventa invece: $(m/4)4v_0^2+mv_0^2=2mv_0^2=(5/4)mv^2 + k\Delta_{MAX}^2 = (5/4)m((6/5)v_0^2)+k\Delta_{MAX}^2$, da cui, con qualche altro ulteriore passaggio algebrico, si trova la soluzione]

3. Un manicotto di massa $m_1 = m$ = 2.0 kg può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale. Inizialmente il manicotto si muove con velocità $\mathbf{v_1}$ diretta nel verso positivo dell'asse X (parallelo alla guida) e di modulo v_1 = 0.80 m/s. Ad un dato istante nel manicotto si conficca un proiettile di massa $m_2 = m/5$ che impatta sul manicotto avendo, subito prima dell'urto, la velocità $\mathbf{v_2}$ diretta come in figura (il proiettile proviene "da sinistra" e l'angolo indicato, misurato rispetto all'orizzontale, vale $\theta = \pi/3$) e di modulo $v_2 = 5v_1$. [Ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$~1.7]



   a) Quanto vale la velocità v' con cui il sistema manicotto+proiettile (conficcato) si muove subito dopo l'urto?
   v' = …………………………………… = …….. m/s $(5/6)(1+cos\theta)v_1 = 5v_1/4 = 1.0$ m/s [considerando la situazione subito dopo e quella subito prima dell'urto, si ha che il sistema proiettile e manicotto è isolato lungo la direzione orizzontale, che è quella di moto, non essendoci forze esterne così dirette. Pertanto deve essere: $m_1v_1+m_2v_2cos\theta = mv_1(1+cos\theta) = (m_1+m_2)v' = (6/5)mv'$, da cui la soluzione]

4. Una sottile sbarra **omogenea** di lunghezza L = 1.0 m e massa M = 2.0 kg è imperniata in modo da poter ruotare con attrito trascurabile attorno a un perno che la attraversa a tre quarti della sua lunghezza: facendo riferimento alla figura, questo significa che le lunghezze dei segmenti indicati sono OA = $L/4$ e OB = $3L/4$. All'estremo B della sbarra è legata una fune inestensibile di massa trascurabile che, dopo essere passata per la gola di una puleggia **di massa trascurabile**, termina con un peso di massa m (incognita). Tutto il sistema è **in equilibrio** con gli angoli rappresentati in figura che valgono $\theta = \pi/3$ e $\phi = \pi/2$. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/3)$ = ½ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]



   a) Quanto valgono, **in modulo**, la tensione T della fune e la forza F che il perno esercita sull'asta nel punto O?

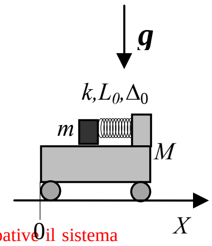
T = ……………….……………………. = ………… N $mg = Mg\cos\theta/3$ = 3.3 N   [la tensione della fune deve essere uguale a mg per grantire l'equilibrio traslazionale del peso di massa m. Inoltre per l'equilibrio rotazionale della sbarra deve essere, calcolando i momenti rispetto ad O, $T3L/4 = Mg(L/4)\cos\theta$, da cui la soluzione]

F = …………………………………… ~ ………… N $((Mg\sin\theta\cos\theta/3)^2+(-Mg\cos\theta/3+Mg)^2)^{1/2}=Mg(31/36)^{1/2}$ ~ 18 N   [per l'equilibrio traslazionale della sbarra il perno deve esercitare forze che bilanciano la forza peso $\boldsymbol{Mg}$ e la tensione della fune $\boldsymbol{T}$, cioè, in termini vettoriali, deve essere $0 = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{Mg} + \boldsymbol{T}$. La componente orizzontale della forza $\boldsymbol{F}$ è uguale e opposta alla componente orizzontale della tensione della fune, che vale, per la geometria del sistema, $T\sin\theta = Mg\sin\theta\cos\theta/3$, dove abbiamo usato la risposta al quesito precedente La componente verticale è invece data dalla somma algebrica della componente verticale di $\boldsymbol{T}$, che vale $T\cos\theta=Mg\cos^2\theta/3$, e della forza peso Mg, che punta in direzione opposta e quindi avrà un segno opposto. Ricordando che il modulo di un vettore si trova come radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti si ha la soluzione]

b) Supponete ora che, ad un dato istante, la fune venga improvvisamente tagliata; subito dopo il taglio si osserva che la sbarra comincia a ruotare attorno all'asse passante per il perno. Nella sua rotazione la sbarra assume ad un dato istante una direzione verticale (cioè l'angolo θ di figura vale -π/2, intendendo con il segno negativo che, in questo istante, l'estremo A si trova più in alto dell'estremo B). Quanto vale la velocità angolare ω della sbarra in tale istante? [Trascurate ogni forma di attrito]

ω = …………………………………… ~ ………… rad/s $(2Mg(L/4)(\sin\theta+1)/I)^{1/2} = (96Mg(L/4)(\sin\theta+1)/(7ML^2))^{1/2} = (24g(\sin\theta+1)/(7L))^{1/2}$ ~ 7.9 rad/s   [nella rotazione della sbarra non intervengono forze dissipative e dunque l'energia meccanica si conserva: $0 = \Delta E_K+\Delta U_G$. La variazione di energia cinetica, supponendo ragionevolmente nulla la velocità iniziale, è $\Delta E_K=(I/2)\omega^2$, mentre la variazione di energia potenziale gravitazionale è dovuta alla variazione di quota del centro di massa della sbarra, e quindi è $\Delta U_G=Mg(L/4)(\sin\theta+1)$ (la sbarra è omogenea e quindi il centro di massa i trova a metà della sua lunghezza). Per la soluzione, occorre calcolare il momento di inerzia I: si può o eseguire il calcolo diretto (per integrazione) oppure sfruttare il teorema degli assi paralleli. Essendo, per una sbarra sottile omogenea, $I_{CM}=ML^2/12$ ed avendosi $d=L/4$, è $I=ML^2(1/12+1/16)=(ML^2/48)(4+3)=(7/48)ML^2$, da cui la soluzione]

5. Un carrello di massa M = 5.0 kg, che può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una strada orizzontale, è dotato di una sponda verticale rigida a cui è vincolata una molla, di massa trascurabile, costante elastica $k = 3.0\text{x}10^3$ N/m e lunghezza di riposo L_0 = 80 cm. Alla molla, che è disposta con il suo asse in direzione orizzontale, è attaccato un piccolo oggetto di massa $m = M/5$ = 1.0 kg, che può scorrere con **attrito trascurabile** sulla superficie del carrello. Inizialmente tutto il sistema (carrello e oggetto) è fermo e la molla si trova compressa per un tratto Δ_0 = 50 cm a causa di una fune. La posizione del carrello è tale che la sua estremità indicata in figura ha coordinata X_0 = 0 (rispetto ad un asse X orizzontale). All'istante t_0=0 la fune viene improvvisamente tagliata ed il **sistema** si mette in movimento.



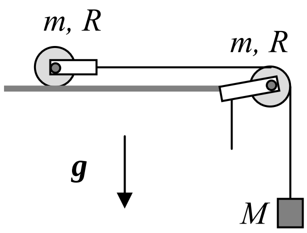
a) Quanto vale la velocità V' del **carrello** nell'istante in cui la molla si trova a passare per la sua lunghezza di riposo?

V' = …………………………………… = …….. m/s $\Delta_0(km/(M(m+M)))^{1/2}$= 5.0 m/s   [non essendoci forze dissipative il sistema conserva la sua energia meccanica: $0=\Delta E_K+\Delta U_{ELA}=(m/2)v'^2+(M/2)V'^2-(k/2)\Delta_0^2$. Inoltre il sistema è anche isolatoi (lungo X) e quindi si conserva la quantità di moto totale (inizialmente nulla): $0=mv'+MV'$. Combinando le sue conservazioni si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale la coordinata X' dell'estremo del carrello nell'istante considerato alla domanda precedente? [In pratica vi si chiede di individuare lo spostamento del carrello a quel dato istante]

X' = …………………………………… = ……… m $\Delta_0(m/(m+M))$= 0.42 m   [poiché il sistema è isolato, il centro di massa non ha accelerazione, ed essendo inizialmente fermo (tutto è fermo all'inizio), rimane sempre fermo. Pertanto $0=\Delta x'_{CM}=(m\Delta x'+M\Delta X')/(m+M)$, da cui $\Delta X'=-(m/M)\Delta x'=X'$, dove l'ultimo passaggio si deve al fatto che la coordinata iniziale dell'estremo del carrello è nulla. D'altra parte per semplici ragioni geometriche si ha che lo spostamento dell'oggetto misurato nel sistema di riferimento assegnato è $\Delta x'=-\Delta_0+\Delta X'$, essendo $-\Delta_0$ lo spostamento **relativo** dell'oggetto rispetto al carrello (notate il segno!). Da qui si ottiene la soluzione]

6. Un rullo, costituito da un cilindro pieno **omogeneo** di massa $m = 5.0\text{x}10^{-1}$ kg e raggio R = 10 cm, può muoversi di **rotolamento puro** (senza strisciamento) su un piano orizzontale scabro. Il rullo è dotato di un giogo, di massa trascurabile, che ne consente la rotazione (attorno al proprio asse) con **attrito trascurabile**; una fune inestensibile e di massa trascurabile è collegata al giogo. Dopo essere passata per la gola di una puleggia, costituita da un cilindro analogo al precedente che può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse, la fune termina con una massa M = 1.0 kg, libera di muoversi in direzione verticale (vedi figura). La fune **non slitta** sulla gola della puleggia. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



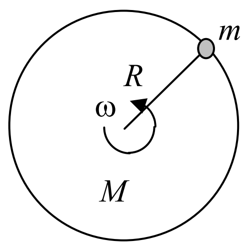
a) Inizialmente il rullo è tenuto fermo da una causa esterna che poi viene rimossa ed il rullo si mette quindi in movimento. Quanto vale la velocità v_{CM} che possiede il suo centro di massa in corrispondenza a uno spostamento Δs = 5.0 m? [Si intende che si deve dare una risposta tenendo conto della condizione di rotolamento puro del rullo e del fatto che la fune non slitta sulla puleggia]

v_{CM} = …………………………………… = ………… m/s $(Mg\Delta s/(m+M/2))^{1/2}$ = 7.0 m/s   [per il bilancio energetico, che, tenendo conto del fatto che a compiere lavoro è la forza peso che agisce sulla massa M, dell'inestensibilità della fune, del moto di rotolamento puro e del non slittamento fra fune e puleggia, si scrive: $Mg\Delta s = (m/2)v_{CM}^2+(M/2)v_{CM}^2+(I/2)\omega^2 + (I/2)\omega^2 = v^2_{CM}(m/2+M/2+I) = v^2_{CM}(m/2+M/2+I/R^2) = v^2_{CM}(m/2+M/2+m/2)$, dove si è anche sfruttato che, per un cilindro omogeneo in rotazione attorno al suo asse, si ha $I = (m/2)R^2$]

b) Quanto vale la forza di attrito F_A che si esercita tra piano orizzontale e rullo nelle condizioni di rotolamento puro considerate nel testo?

F_A = …………………………………… = ………… N $(mg/2)(M/(M+2m))$ = 1.2 N   [dette T_1 e T_2 le tensioni che la fune esercita rispettivamente sul giogo e sulla massa M, nelle condizioni del problema si hanno le seguenti equazioni del moto: $ma_{CM} = T_1 - F_A$; $I\alpha_{RULLO} = F_AR$; $I\alpha_{PULEGGIA} = T_2R - T_1R$; $Ma = Mg - T_2$. D'altra parte per l'inestensibilità della fune si ha $a_{CM} = a$, mentre per le condizioni di rotolamento puro e di non slittamento della fune sulla puleggia si ha $\alpha_{RULLO} = a_{CM}/R$ e $\alpha = a/R = \alpha_{PULEGGIA}$, da cui, mettendo a sistema le equazioni, si ottiene la soluzione]

7. In un luna park c'è una piattaforma orizzontale che ha la forma di un disco **omogeneo** di massa $M = 2.0\text{x}10^2$ kg e raggio R = 10 m, che può ruotare **con attrito trascurabile** attorno al suo asse. Sulla piattaforma si trova un bambino, che approssimerete con un punto materiale di massa m = 20 kg. Inizialmente il bambino si trova alla periferia (sul bordo) del disco, come in figura, ed il sistema è stato messo in rotazione attorno all'asse del disco con velocità angolare ω = 2.0 rad/s da un motore, che poi è stato scollegato dall'asse (il disco ruota "in folle" e con attrito trascurabile).



Vista dall'alto

a) Quanto vale il momento di inerzia I **complessivo** del sistema costituito da piattaforma + bambino? [Calcolatelo per rotazioni attorno all'asse del disco]

I = ……………………………………= ……… kg m^2 $(m+M/2)R^2$= $1.2\text{x}10^4$ kg m^2 [il momento di inerzia complessivo è dato dalla somma del momento di inerzia del disco, $I_D = (M/2)R^2$ (essendo il disco omogeneo) e di quello del bambino, $I_B = mR^2$ (tutta la massa del bambino, puntiforme, si trova a ruotare a una distanza R dall'asse)]

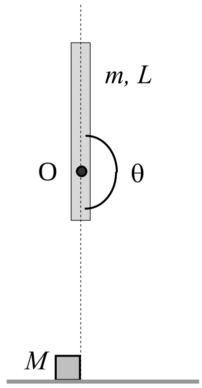
b) Immaginate ora che il bambino si metta in cammino verso il centro del disco. Quanto vale la velocità angolare ω' del disco quando il bambino ne raggiunge il centro? [Osservate con attenzione cosa si conserva…]

ω' = …………………………………… = ... rad/s $\omega\, I/(I-mR^2) = \omega(1-2m/M) = 1.6$ rad/s [le forze che fanno muovere il bambino sono interne al sistema, dato che sono esercitate dal bambino e agiscono, tramite l'attrito, sulla superficie del disco. Pertanto nel sistema si conserva il momento angolare assiale: $I\omega = I'\omega'$, con I' momento di inerzia del **solo** disco, che vale $I - mR^2$ dato che, quando il bambino è al centro del disco, non contribuisce al momento di inerzia]

c) Quanto vale il lavoro L che il bambino deve compiere per muoversi dalla periferia al centro del disco? [Si intende che all'inizio e alla fine dello spostamento il bambino se ne sta fermo rispetto al disco e che, ancora una volta, ogni forma di attrito è trascurabile]

L = …………………………………… = ... J $(I/2)\omega^2(2m/M+1-1)= I\omega^2(m/M) = 4.8\text{x}10^3$ J [si può imporre il bilancio energetico: $L = \Delta E_K$, dove, essendo il bambino fermo rispetto al disco all'inizio e alla fine del processo, si ha $\Delta E_K = (I'\omega'^2 - I\omega^2)/2 = (I/2)\omega^2((I'/I)(\omega'/\omega)^2-1)=(I/2)\omega^2(I/I'-1)$, da cui la soluzione]

8. Una sottile asta rigida **omogenea** di lunghezza L = 2.0 m e massa m = 5.0 kg è imperniata attorno al punto O di figura che si trova a una distanza $d = L/4$ rispetto a un estremo, come rappresentato in figura. passa per un estremo dell'asta stessa) in modo da ruotare con attrito trascurabile su un piano verticale.



a) Quanto vale il momento di inerzia I della sbarretta per rotazioni attorno al perno O assegnato?

I = ……………….. = …….. kg m^2 $(7/48)mL^2 = M/(M+2m)) = 2.9$ kg m^2 [potete impiegare due modi per ottenere il risultato, uno diretto e l'altro attraverso il teorema degli "assi paralleli". Per il calcolo diretto, immaginiamo di porre un asse X lungo l'asse dell'asta. Si ha allora $I = \int_{MASSA} x^2dm = \int_{-L/4}^{3L/4} \rho_m Sx^2dx= \rho_m S[x^3/3]_{-L/4}^{3L/4} = (\rho_m S/3)L^3(28/64) = (7/48)\rho_m SL^3=(7/48)mL^2$. Nel calcolo, si noti la scelta degli estremi di integrazione, che rappresentano le posizioni degli estremi dell'asta rispetto a un riferimento centrato nel punto O. Osservate inoltre l'ultima sostituzione, dovuta al fatto che, per un'asta omogenea, è $m = \rho mV = \rho_m SL$. Ricordando che il momento di inerzia per una rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa (il punto di mezzo) di un'asta sottile omogenea è $I_{CM}=mL^2/12$, e notando che l'asse passante per il punto O dista $D = L/4$ dall'ipotetico asse che passa per il centro di massa (i due assi sono ovviamente paralleli tra loro), si ha: $I = mL^2/12 + m(L/4)^2 = mL^2(7/48)$, cioè, come atteso, si ottiene di nuovo il risultato trovato in precedenza]

b) Immaginate ora che inizialmente l'asta venga mantenuta ferma da una qualche causa esterna in modo da trovarsi nella configurazione di figura, cioè con il suo asse in direzione verticale e con la "parte più lunga" verso l'alto. A un dato istante la causa esterna viene rimossa istantaneamente e, a causa di una piccola perturbazione che non produce velocità iniziale, l'asta comincia a ruotare. Quanto vale la velocità angolare ω dell'asta quando il suo asse ha compiuto uno spostamento angolare θ = 180 gradi? [In pratica, nell'istante considerato l'asta ripassa per la prima volta in direzione verticale, ma stavolta la "parte più lunga" punta verso il basso. Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; trascurate **ogni forma di attrito**]

ω = ……………………………. ~ ………. rad/s $((48/7)(g/L))^{1/2} \sim 5.8$ rad/s [dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = (I/2)\omega^2 - mg|\Delta y|$, con $|\Delta y|$ spostamento verticale (in modulo) del centro di massa dell'asta. Per la geometria del sistema, è facile rendersi conto che $|\Delta y| = L/2$ Sostituendo l'espressione del momento di inerzia trovato sopra si ottiene il risultato, dove, nell'estrarre la radice quadrata, si è scelta la soluzione positiva (significa che stiamo usando la convenzione di definire positiva la velocità angolare di una rotazione in senso orario; la convenzione opposta darebbe lo stesso risultato a meno di un segno)]

c) Quanto vale l'accelerazione angolare α dell'asta quando essa si trova nella posizione di cui al punto precedente?

α = ……………………………. = ………. rad/s^2 0 [per l'equazione del moto rotazionale si ha $\alpha = \Sigma\tau/I$. Le forze (esterne) che agiscono sull'asta sono la forza peso, applicata al centro di massa e diretta verso il basso, e la forza esercitata dal perno sull'asta (il vincolo che impedisce il moto di traslazione). Entrambi queste forze hanno momento nullo rispetto al polo O: infatti le forze del perno sono applicate al punto O, mentre il braccio della forza peso, nell'istante considerato (l'asta è verticale), è nullo, per cui nullo è il momento della forza peso. Da qui la soluzione]

d) Supponete ora che, quando l'asta si trova nella posizione di cui al punto sopra, il suo estremo urti **anelasticamente** con un oggetto di puntiforme di massa $M = m/9$ (il carattere anelastico dell'urto significa che, in seguito alla collisione, l'oggetto rimane conficcato nell'asta), che inizialmente si trovava fermo nella posizione indicata in figura, poggiato su un piano. Quanto vale la velocità angolare ω' dell'asta **subito dopo** l'urto? [State attenti a valutare bene cosa si conserva…]

ω' = ……………………………. ~ ………. rad/s $(7/48)(96/17)\omega = (14/17)\omega \sim 4.8$ rad/s [l'urto è anelastico per cui non si conserva l'energia cinetica del sistema. Inoltre non si conserva neanche la quantità di moto, dato che la forza che il perno esercita sull'asta è impulsiva e fa sì che il sistema non possa ritenersi isolato. Tuttavia, come già notato, questa forza ha braccio nullo, per cui, nella breve durata dell'urto (la forza peso, che esiste, non riesce a contribuire in modo significativo), il sistema si può considerare isolato rispetto ai momenti. Dunque si conserva il momento angolare: $I\omega = I'\omega'$, con $I' = I+M(3L/4)^2= (7/48)mL^2+(9/16)ML^2=mL^2(7/48+1/32)=(17/96)mL^2$, dove si è tenuto in debito conto il fatto che, in seguito all'urto anelastico, il momento di inerzia complessivo del sistema cambia, diventando la somma di quello della sbarra e di quello della massa puntiforme $M = m/2$, che, trovandosi tale massa a distanza $3L/4$ dal polo, vale $M(3L/4)^2$]

e) Come cambierebbe la soluzione del problema supponendo un urto completamente **elastico** tra estremità dell'asta e oggetto puntiforme? [Limitatevi a scrivere le equazioni rilevanti, discutendole per bene in brutta]

Discussione: ………………………….. in caso di urto elastico occorre considerare separatamente le velocità dell'oggetto e dell'asta dopo l'urto, dato che l'oggetto non rimane più conficcato nell'asta. Ricordando l'espressione del momento angolare per un oggetto puntiforme, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \mathbf{x} m\mathbf{v}$ e notando che, per la geometria del problema, si ha $L_{OGGETTO} = Mv'(3L/4)$, con v' velocità dell'oggetto dopo l'urto (tale velocità è diretta orizzontalmente a causa della presenza del piano). La conservazione del momento angolare, che continua a valere anche in questo caso, si scrive allora: $I\omega = I\omega'+Mv'(3L/4)$. D'altronde la conservazione dell'energia cinetica complessiva del sistema, dovuta al carattere elastico dell'urto, impone: $(I/2)\omega^2=(I/2)\omega'^2+(M/2)v'^2$. Si ha dunque un sistema di due equazioni e due incognite, la velocità angolare dell'asta e quella traslazionale dell'oggetto, entrambe dopo l'urto, che può essere risolto. L'operazione non è molto agevole dal punto di vista algebrico a causa della presenza di un'equazione del secondo grado, per cui vi si risparmia volentieri questa fatica!].

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, ………………….   Firma: MISTER X