A

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 – 23/11/2009

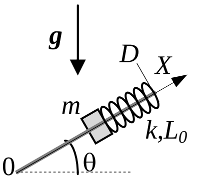
Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove su un piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R (incognito) con accelerazione **angolare** α = 2.0 rad/s^2 **costante e uniforme**. Inoltre si sa che all'istante t_0 = 0 esso parte da fermo dalla posizione angolare θ_0 = 0 e che all'istante t' = 1.0 s esso ha accelerazione di **modulo** a' = 5.0 m/s^2.
   a) Quanto vale il raggio R della traiettoria circolare? [Ricordate che l'accelerazione, in generale, è un vettore!]
   R = …………………………………… ~ ………. m $a/(\alpha(1+\alpha^2 t'^4)^{1/2})$ ~ 1.1 m   [in un moto circolare l'accelerazione è un vettore che ha due componenti ortogonali tra loro; conviene fare riferimento alle componenti radiali e tangenziali che in modulo sono: $a_R = a_{centr} = \omega^2 R$ e $a_T = \alpha R$. Poiché il moto è uniformemente accelerato, si ha $\omega(t) = \alpha t$, dove si è tenuto conto della condizione iniziale sulla velocità. Ricordando significato ed espressione del modulo di un vettore (teorema di Pitagora!), deve essere: $a' = (a_R'^2+a_T^2)^{1/2}$, da cui la soluzione]

   b) In quale istante t'' l'oggetto avrà percorso per intero e per la prima volta un giro completo della sua traiettoria?
   t'' = …………………………………… ~ ………. s $(4\pi/\alpha)^{1/2}$ ~ 2.5 s   [tenendo conto delle condizioni iniziali date, la legge oraria del moto angolare recita $\theta(t) = (\alpha/2)t^2$. La soluzione si ottiene imponendo $\theta(t'') = 2\pi$ (lo spostamento angolare corrispondente a un giro completo)]

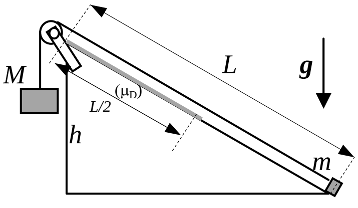
2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida e indeformabile (un tondino) di lunghezza D = 2.0 m, fissa su un piano verticale e tale da formare un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, come indicato in figura. Il manicotto è attaccato all'estremo di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 18 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 50 cm, il cui altro estremo è vincolato al punto "superiore" della guida. Nelle soluzioni **dovete** fare uso del sistema di riferimento indicato in figura come asse X, diretto come la guida, orientato in alto e centrato sull'estremo "inferiore" della guida stessa. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7 e $sin(\pi/6)$ = 1/2]



   a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del manicotto? [Dovete usare il sistema di riferimento indicato e scrivere una **funzione** della coordinata x. Non dovete usare valori numerici per questa risposta, esprimendo i dati noti del problema con i propri simboli "letterali"!]
   $a(x)$ = …………………………………… $(k/m)(D-x-L_0)-g\sin\theta$ [nella direzione dell'asse, sul manicotto agisce la proiezione della forza peso, $-mg\sin\theta$, dove il segno negativo tiene conto dell'orientazione dell'asse, e la forza elastica, che in modulo vale $k|\Delta|$. Δ è la compressione o elongazione della molla, cioè la differenza tra lunghezza della molla, $L = D - x$, e lunghezza a riposo L_0. Notate che per $\Delta > 0$ (molla estesa) la forza deve avere segno positivo, e viceversa per $\Delta < 0$. Quindi è $F_{ELA} = k(D-x-L_0)$, da cui la risposta]

   b) Supponete ora che il manicotto venga spostato (da un operatore esterno) nella posizione $x_0 = D/2$ e che da qui, all'istante t_0=0, venga lasciato libero di muoversi. Quanto vale la velocità v' con cui il manicotto passa per la propria posizione di equilibrio x_{EQ}? [La soluzione tramite bilancio energetico o conservazione dell'energia è sconsigliata perché difficoltosa dal punto di vista algebrico]
   v' = …………………………………… = ……….. m/s $\pm\omega(L_0 +(mg/k)\sin\theta - D/2)=(k/m)^{1/2}(L_0 +(mg/k)\sin\theta - D/2)$ = 0.13 m/s   [la soluzione dell'equazione del moto è armonica, del tipo $x(t) = C\cos(\omega t+\phi)+x_{EQ}$, con x_{EQ} tale che $a(x_{EQ})$ = 0 [da cui $x_{EQ} = D-L_0-(mg/k)\sin\theta$)]. La legge oraria della velocità è $v(t) = -\omega C\sin(\omega t+\phi)$. Dovendo essere $v(t=0)$=0, si ha subito ϕ = 0. Imponendo la condizione iniziale $x_0 = D/2$ si ottiene $C = L_0+(mg/k)\sin\theta - D/2$. In questo moto armonico la posizione di equilibrio viene raggiunta quando $\cos(\omega t')$ = 0, cioè quando $\sin(\omega t') = \pm 1$. Dunque la velocità vale $v' = \pm\text{-}\omega C$, dove il segno è negativo nelle fasi di risalita e positivo altrimenti, da cui la soluzione. La soluzione si trova anche ragionando in termini di conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U_G+\Delta U_{ELA}$, con $\Delta E_K = (m/2)v'^2$, $\Delta U_G = mg(x_{EQ}-x_0)\sin\theta$, dove l'angolo serve per esprimere la variazione di quota corrispondente a uno spostamento $x_{EQ}-x_0$ che avviene sul piano, e $\Delta U_{ELA} = (k/2)(x_0-L_0)^2-(k/2)(x_{EQ}-L_0)^2$. Tuttavia, in questo caso, passare per questo tipo di approccio rende assai complicata la manipolazione algebrica]

3. Una (piccola, cioè puntiforme!) cassa di massa m = 6.0 kg può muoversi lungo un piano inclinato di altezza h = 2.0 m e lunghezza L = 4.0 m. Alla cassa è annodata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa M = 8.0 kg. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse. Inizialmente la cassa si trova alla base del piano inclinato dove è tenuta ferma da un operatore esterno (una manina). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Per questa domanda supponete che la cassa scivoli sul piano con **attrito trascurabile**. Ad un certo istante l'operatore lascia libera di muoversi la cassa con velocità iniziale nulla. Si osserva che essa risale lungo il piano inclinato fino a raggiungerne la sommità. Quanto vale, in modulo, la velocità v' con cui essa raggiunge la sommità del piano inclinato? [Notate che anche l'oggetto di massa M si muove verticalmente verso il basso e supponete che non ci sia alcun ostacolo nel suo movimento]

v' = …………………………………… = ……….. m/s $(2g(ML-mh)/(M+m))^{1/2}$ ~ 5.3 m/s [non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica del sistema delle due masse, cioè: $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Poiché le masse sono due ed entrambi sono inizialmente ferme, si ha $\Delta E_K = ((m+M)/2)v'^2$; infatti per l'inestensibilità della fune la velocità delle due masse è sempre la stessa. L'unica forza (conservativa) che agisce nel problema è la forza peso, dunque l'energia potenziale da considerare è quella gravitazionale dovuta allo spostamento verso l'alto della cassa (che guadagna energia) e allo spostamento verso il basso dell'oggetto (che perde energia). Infatti si ha $\Delta U_{Gcassa} = mgh$ e $\Delta U_{Goggetto} = -mgL$, dove si è correttamente tenuto in conto che la cassa di alza per un tratto pari all'altezza del piano, ma l'oggetto si abbassa per un tratto equivalente alla lunghezza del piano. Sommando tra loro le variazioni di energia potenziale e manipolando un po' l'espressione si arriva alla soluzione]

b) Immaginate ora che il tratto "superiore" del piano inclinato, di lunghezza pari alla metà del piano stesso, presenti attrito **dinamico** con coefficiente μ_D = 0.50 (la porzione di piano interessata dall'attrito è segnata in figura con una linea più spessa). Se ripetete l'esperimento del quesito precedente, cioè lasciate andare la cassa dalla base del piano, osserverete gli stessi effetti? In particolare, la cassa giungerà ancora sulla sommità del piano? E se sì, quanto vale la velocità v'' con cui ci arriva? Discutete per benino (e in modo quantitativo) in brutta. [Consiglio: ragionate in termini di bilancio energetico!]

Discussione: ……………………………………

Anche in questo caso conviene ragionare in termini di bilancio energetico. Supponiamo che la cassa raggiunga la sommità del piano. Dal punto di vista energetico, la condizione più "favorevole" per il processo considerato è che la cassa arrivi in cima e lì si fermi, ovvero che al termine del processo non ci sia energia cinetica. Questo vuol dire che la variazione di energia meccanica è $\Delta E_{MECC} = \Delta U_G = mgh - MgL$. Per il bilancio energetico deve essere $\Delta E_{MECC} = L_A$. Il lavoro della forza di attrito dinamico vale, sempre supponendo che la cassa arrivi in cima al piano, $L_A = -F_A L/2$. Infatti la forza di attrito è costante e uniforme e sempre diretta in verso opposto allo spostamento (da cui il segno negativo – naturalmente occorre considerare solo lo spostamento nella zona in cui è presente attrito, che vale $L/2$). In particolare, in modulo è $F_A = \mu_D N = \mu_D mg\cos\theta = \mu_D mg(1-\sin^2\theta)^{1/2} = \mu_D mg(1-h^2/L^2)^{1/2}$, dove abbiamo usato un po' di ovvia trigonometria. Pertanto, se si vuole che la cassa raggiunga la sommità del piano, deve essere: $-\mu_D mg(1-h^2/L^2)^{1/2} L/2 = mgh - MgL$. Usando le grandezze del problema, si vede subito che il lavoro della forza di attrito è, in valore assoluto, minore della variazione dell'energia potenziale. Dunque la cassa arriva sulla sommità del piano. Per calcolare la velocità v'' occorre aggiungere nella variazione di energia meccanica il termine $\Delta E_K = ((m+M)/2)v''^2$. Risolvendo l'equazione si trova $v'' = ((2/(M+m))(MgL-mgh-\mu_D mg(1-h^2/L^2)(L/2)))^{1/2}$ ~ 4.6 m/s, ovviamente minore della v' determinata in assenza di attrito]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 23/11/2009 Firma:

B

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 – 23/11/2009

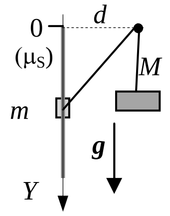
Nome e cognome: …………………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove sul piano orizzontale XY sotto l'azione di un'accelerazione **costante e uniforme** $\boldsymbol{a} = (0, a)$, con a = 2.0 m/s^2. Si sa che all'istante iniziale t_0 = 0 esso si trova nell'origine del sistema di riferimento con una velocità di modulo v_0 = 10 m/s diretta nel verso positivo dell'asse X.
   a) Quanto vale il **modulo** della velocità v' che l'oggetto possiede all'istante t' = 10 s? [Ricordate che la velocità, in generale, è un vettore!]
   v' = …………………………………… ~ ……… m/s $(v_0^2+a^2t'^2)^{1/2}$ ~ 22 m/s [deve essere $v' = (v'^2_X+v'^2_Y)^{1/2}$. Poiché l'accelerazione è diretta lungo Y, tenendo conto delle condizioni iniziali si ha $v'_X = v_0$ e $v'_Y = at'$, da cui la soluzione]

   b) Quanto vale, in modulo, l'accelerazione **tangenziale** a'_T che l'oggetto ha all'istante t' di cui sopra? [Ricordate il significato di accelerazione tangenziale come accelerazione del punto **nella direzione del suo moto**]
   a'_T = …………………………………… ~ ……… m/s^2 $a\sin\theta = a\,tg\theta/(1+tg^2\theta)^{1/2} = a(at/v_0)/(1+(at/v_0)^2)^{1/2}$ ~ 1.8 m/s^2
   [l'oggetto ha sempre accelerazione $\boldsymbol{a}$, che, secondo il testo, è costante e uniforme e diretta lungo Y. Per rispondere al quesito occorre proiettare il vettore $\boldsymbol{a}$ nella direzione del moto all'istante t' . Tale direzione coincide con la direzione della velocità allo stesso istante, che può essere espressa usando l'angolo θ rispetto all'orizzontale come: $tg\theta = v'_y/v'_X = at/v_0$. La proiezione del vettore $\boldsymbol{a}$ lungo tale direzione si ottiene moltiplicandone il modulo per $\sin\theta = tg\theta/(1+tg^2\theta)^{1/2}$, da cui la soluzione]

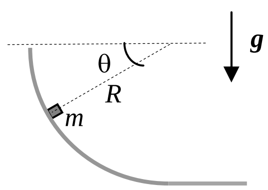
2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg può scorrere lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Il manicotto è vincolato a una fune inestensibile di massa trascurabile che, dopo essere passata su un perno molto sottile conficcato in una parete verticale, termina con una massa M (incognita). La fune scorre **con attrito trascurabile** sul perno e l'intero sistema ha la configurazione di figura, dove sono indicati l'asse Y che **dovete** impiegare (verticale, diretto verso il basso e centrato all'estremità superiore della guida) e la distanza d fra perno e guida, che vale d = 1.0 m. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Supponete per questa domanda che il manicotto possa muoversi lungo la guida con **attrito trascurabile**. Sapendo che la posizione di equilibrio del manicotto, misurata nel sistema di riferimento indicato, è $y_{EQ} = d$, quanto vale la massa M?
   M = …………………………………… ~ ……… kg $md/(d^2+d^2)^{1/2} = m2^{1/2}$ ~ 2.8 kg [dovendo essere in equilibrio anche la massa M , la tensione della fune vale in modulo $T = Mg$. Tenendo conto della geometria del sistema, si ha che la componente verticale della tensione della fune per una posizione y generica $y>0!$) si esprime come $T_Y=-Ty/(y^2+d^2)$. All'equilibrio deve essere $mg+T_Y$ = 0, da cui la soluzione]

   b) Immaginate ora che, a differenza della situazione considerata nella domanda precedente, la guida sia **scabra** e che il manicotto subisca attrito **statico** con coefficiente di attrito μ_S = 0.50. Quanto vale, in modulo, la forza di attrito F_{AS} quando il manicotto si trova nella posizione $y_{EQ} = d$? Discutete per benino in brutta se si determinano altre posizioni di equilibrio oltre a quella ($y_{EQ} = d$) che si verifica in assenza di attrito.
   F_{AS} = …………………………………… = ……….. N 0 [la forza di attrito statico si oppone al moto del manicotto in direzione verticale. Nella posizione indicata, che era di equilibrio, forza peso e componete verticale della tensione della fune si annullano, per cui non c'è alcuna forza che provoca movimento. Dunque l'attrito deve essere nullo!]
   Discussione: …………………………………… la forza di attrito statico vale, **al massimo**, $F_{ASMAX} = \mu_S N = \mu_S Mgd/(d^2+y^2)^{1/2}$ (essendo la situazione di equilibrio, si ha sempre $T = Mg$). Questa forza si oppone al moto del corpo, che avviene sotto l'effetto della risultante verticale delle forze, il cui **modulo** è $|mg-Mgy/(d^2+y^2)^{1/2}|$ (è bene prendere in considerazione il modulo, perché il movimento potrebbe avvenire verso l'alto o verso il basso a seconda dello scostamento verso il basso o verso l'alto rispetto alla posizione di equilibrio y_{EQ}). Si vede allora che esiste un intervallo di posizioni attorno a y_{EQ} all'interno del quale si continua ad avere equilibrio. Cerchiamo gli estremi di questo intervallo: essi sono dati dalle soluzioni dell'equazione algebrica: $F_{ASMAX}=\mu_S Mgd/(d^2+y^2)^{1/2} = \pm(mg-Mgy/(d^2+y^2)^{1/2})$, dove il segno ± si riferisce rispettivamente a $y > y_{EQ}$ e $y < y_{EQ}$. La soluzione di queste equazioni algebriche del secondo ordine fornisce la risposta al problema.

3. Un oggetto puntiforme di massa m = 50 g può scivolare **con attrito trascurabile** lungo una guida rigida e indeformabile che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 5.0 m e si trova, fissa, su un piano verticale. Al suo termine, la guida prosegue con un tratto orizzontale, come rappresentato in figura. Inizialmente l'oggetto si trova fermo nella posizione indicata in figura a causa di un operatore esterno (una manina) che lì lo tiene (l'angolo rispetto all'orizzontale vale θ = π/6); ad un dato istante l'oggetto viene lasciato libero di muoversi. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7 e $\sin(\pi/6)$ = ½]



   a) Quanto vale la velocità v' con cui l'oggetto arriva sul tratto orizzontale in fondo alla guida?
   v' = ……………………………..=.......... m/s $(gR)^{1/2}$ = 7.0 m/s [non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica. Quindi si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Dato che l'oggetto è inizialmente fermo, deve essere $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. Inoltre l'unica forza (conservativa) che

agisce è la forza peso, per cui $\Delta U = \Delta U_G = mg\Delta z$, con Δz variazione di quota dell'oggetto. La trigonometria suggerisce che $\Delta z = R(sin\theta.-1)$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale, in modulo, la forza di reazione vincolare N che la guida esercita sull'oggetto nell'istante in cui esso arriva alla fine dell'arco di circonferenza, cioè nell'istante in cui la sua velocità raggiunge la v' calcolata sopra?

N = …………………………….. =......... N $2mg$ = 0.98 N [l'oggetto è sottoposto ad un'accelerazione centripeta che ha modulo $a_C = v'^2/R = g$ (usando il risultato precedente). Le due forze agenti sul corpo in direzione verticale, cioè il peso (verso il basso) e la reazione vincolare (verso l'alto, cioè in direzione "centripeta") concorrono a fornire questa accelerazione. Deve cioè essere: $ma_C = N - mg$, da cui $N = m(a_C+g)$ e quindi il risultato]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 23/11/2009 Firma:

C

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 – 23/11/2009

Nome e cognome: ………………………………………………………   Matricola: ……………

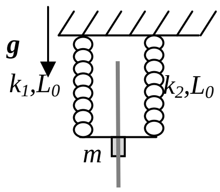
Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R (incognito) con accelerazione **angolare** α **costante e uniforme** (incognita). Si sa che all'istante t' = 1.0 s il **modulo** della sua accelerazione vale a' = 1.0 m/s^2 , mentre all'istante t'' = 2.0 s il modulo della sua accelerazione è a'' = 2.0 m/s^2.

   a) Quanto vale l'accelerazione angolare α? [Ricordate che l'accelerazione, in generale, è un vettore!]
   α = …………………………………… ~ ………. rad/s^2 $(3/(t''^4-4t'^4))^{1/2}$ = 0.50 rad/s^2 [in un moto circolare l'accelerazione è un vettore che ha due componenti ortogonali tra loro; conviene fare riferimento alle componenti radiali e tangenziali che in modulo sono: $a_R = a_{centr} = \omega^2 R$ e $a_T = \alpha R$. Poiché il moto è uniformemente accelerato, si ha $\omega(t) = \alpha t$, dove si è tenuto conto della condizione iniziale sulla velocità. Ricordando significato ed espressione del modulo di un vettore (teorema di Pitagora!), deve essere: $a' = (a_R'^2+a_T^2)^{1/2}$, per cui $a' = R\alpha(1+\alpha^2t'^4)^{1/2}$ e $a'' = R\alpha(1+a^2t''^4)^{1/2}$. Dunque il rapporto vale: $a''/a'=((1+\alpha^2t''^4)/(1+\alpha^2t'^4))^{1/2}$. Risolvendo questa equazione algebrica si trova la soluzione]

   b) Quanto vale il raggio dell'orbita R?
   R = …………………………………… ~ ………. m $a'/(\alpha(1+\alpha^2t'^4))^{1/2}$ ~ 1.8 m   [dalla soluzione del quesito precedente si trova $a' = R\alpha(1+\alpha^2t'^4)^{1/2}$ da cui, sostituendo il valore di α appena determinato, si trova la risposta]

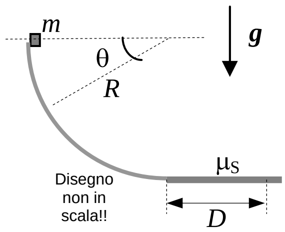
2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 10 kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Il manicotto è vincolato a un'asta orizzontale di massa trascurabile, a cui sono attaccate due molle di massa trascurabile, lunghezza di riposo L_0 = 2.0 m e costanti elastiche rispettivamente k_1 = 40 N/m e k_2 = 1.2x10^2 N/m. Gli altri estremi delle molle sono attaccati a un solaio rigido come rappresentato in figura. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Quanto vale, all'**equilibrio**, l'allungamento Δ_0 delle due molle, cioè la differenza fra la loro lunghezza e la lunghezza di riposo? [Notate che, a causa della guida e del fatto che le due lunghezze di riposo sono uguali, l'allungamento deve essere lo stesso per le due molle]
   Δ_0 = …………………………………… = ………. m $mg/(k_1+k_2)$ = 0.61 m   [all'equilibrio la somma delle due forze elastiche deve uguagliare in modulo la forza peso, cioè $mg = k_1\Delta + k_2\Delta$, da cui la soluzione]

   b) Agendo con una qualche perturbazione esterna (ad esempio una manina che sposta la massa e la lascia andare, oppure che ci dà un colpettino), il manicotto viene messo in oscillazione. Durante l'oscillazione si osserva che l'allungamento massimo delle molle vale Δ_{MAX} = 81 cm. Quanto vale, in modulo, la massima velocità v_{MAX} che il manicotto raggiunge durante il suo moto oscillatorio? [Per la soluzione si sconsiglia di passare per la strada del bilancio energetico o conservazione dell'energia meccanica]
   v_{MAX} = …………………………………… = ………. m/s $((k_1+k_2)/m)^{1/2}(\Delta_{MAX}-\Delta_0)$ = 0.80 m/s   [scegliendo un asse verticale Y orientato, ad esempio, verso il basso e centrato sul solaio, l'equazione del moto del manicotto si scrive: $a(y) = -((k_1+k_2)/m)(y-L_0)+g$. Questa equazione del moto ammette soluzione armonica del tipo : $y(t) = C\cos(\omega t+\phi)+y_{EQ}$ a cui corrisponde la legge oraria per la velocità $v(t) = -\omega C\sin(\omega t+\phi)$, con $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$. Esprimendo la posizione in funzione dell'allungamento o compressione della molla $\Delta(t)$, che è ovviamente dato da $\Delta(t)=y(t)-\Delta_0$ e notando che $y_{EQ} = L_0+\Delta_0$, si ha $\Delta(t) = C\cos(\omega t+\phi)+\Delta_0$. Il dato del problema significa che, al massimo, cioè quando $\omega t+\phi = 2n\pi$, con $n = 0,1,\ldots$, si ha $\Delta(t) = \Delta_{MAX}$, da cui si deduce $C = \Delta_{MAX}-\Delta_0$. La massima velocità (in modulo) si ha per $|\sin(\omega t + \phi)| = 1$ (il manicotto passa per la posizione di equilibrio) e vale $v_{MAX} = \omega C$, da cui la soluzione. Alla soluzione si può arrivare anche ragionando in termini di conservazione dell'energia meccanica – nel problema non ci sono forze dissipative! Basta porre $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ELA}$. Tuttavia la soluzione in questi termini richiede di lavorare sulle grandezze da determinare per legarle alle condizioni del problema, per cui è consigliabile seguire la strada della soluzione della legge oraria]

3. Un oggetto puntiforme di massa m = 50 g può muoversi lungo una guida rigida e indeformabile che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 50 cm e si trova, fissa, su un piano verticale. Come mostrato in figura, l'arco di circonferenza è seguito da un tratto piano e orizzontale: l'arco di circonferenza presenta attrito **trascurabile**, mentre il tratto orizzontale è **scabro** e presenta un attrito **dinamico** con coefficiente μ_D (incognito). Inizialmente l'oggetto si trova fermo nella posizione indicata in figura, cioè alla "sommità" dell'arco, a causa di un operatore esterno (una manina) che lì lo tiene; ad un dato istante l'oggetto viene lasciato libero di muoversi. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità]



   a) Si osserva che, dopo aver percorso per intero l'arco di circonferenza, l'oggetto si muove per un tratto D = 1.0 m lungo il piano orizzontale, e poi si ferma. Quanto vale il coefficiente di attrito μ_D?
   μ_D = ……………………………..=.......... R/D = 0.50   [il bilancio energetico, ovvero il teorema dell'energia cinetica, o delle forze vive, stabilisce che $L_A = \Delta E_{MECC}$. Applichiamo il bilancio considerando come situazione iniziale quella in cui l'oggetto è in cima all'arco

e come situazione finale quella in cui si è fermato. La variazione dell'energia meccanica si scrive $\Delta E_{MECC} = \Delta E_K + \Delta U_G = -mgR$. Infatti l'unica forza (conservativa) che agisce è la forza peso e la variazione di quota dell'oggetto è pari al raggio della guida (l'oggetto diminuisce la sua quota e quindi l'energia potenziale gravitazionale diminuisce). Inoltre, essendo l'oggetto fermo all'inizio e alla "fine", l'energia cinetica e la sua variazione sono sempre nulle. Il lavoro della forza di attrito nel tratto rettilineo, essendo la forza uniforme e costante, di modulo $\mu_D mg$, di direzione sempre opposta allo spostamento, vale $L_A = -\mu_D mgD$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale, in modulo, la componente **radiale** a_R dell'accelerazione che l'oggetto possiede nell'istante in cui esso passa per la posizione angolare indicata in figura (l'angolo vale $\theta = \pi/6$)? [Ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = ½$]

a_R = …………………………….. =......... m/s^2 $2gsin\theta = 9.8$ m/s^2 [applicando la conservazione dell'energia meccanica nel processo che conduce l'oggetto dalla partenza, da fermo, alla posizione richiesta – notiamo infatti che non ci sono forze dissipative in questo processo, si trova la velocità v (ovviamente tangenziale) che l'oggetto ha in quella posizione. Infatti è $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)v^2 - mgRsini\theta$, dove si è notato che la variazione di quota dell'oggetto è pari a $Rsin\theta$, e che il segno negativo tiene conto che questa quita, e dunque l'energia potenziale gravitazionale, è diminuita. Essendo il moto circolare, l'oggetto deve subire accelerazione centripeta, che ha proprio la direzione radiale richiesta, e che vale $a_C = v^2/R$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 23/11/2009 Firma:

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 – 23/11/2009

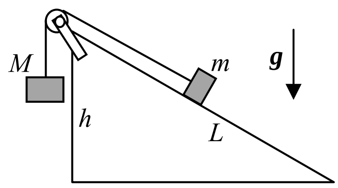
Nome e cognome: …………………………………………………….   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove sul piano orizzontale XY sotto l'azione di un'accelerazione **costante e uniforme** $\boldsymbol{a}$, che ha componenti **incognite** a_X e a_Y (entrambe costanti e uniformi!). Si sa che all'istante iniziale $t_0 = 0$ esso si trova nell'origine del sistema di riferimento con una velocità di modulo $v_0 = 10$ m/s diretta nel verso positivo dell'asse X. Si sa inoltre che all'istante $t' = 2.0$ s esso ha velocità di modulo $v' = 10$ m/s diretta nel verso positivo dell'asse Y.
   a) Quanto vale, in **modulo**, l'accelerazione a dell'oggetto? [Ricordate che l'accelerazione, in generale, è un vettore!]
   a = …………………………………… ~ ………. m/s^2 $((-v_0/t')^2+(v'/t')^2)^{1/2} = (v_0^2+v'^2)^{1/2}/t' \sim 7.1$ m/s^2 [poiché l'accelerazione è costante e uniforme, deve essere $a_X = \Delta v_X/(t'-t_0) = -v_0/t'$; analogamente deve essere $a_Y = \Delta v_y/(t'-t_0) = v'/t'$. Quindi il modulo del vettore accelerazione si trova da $a = (a_X^2+a_Y^2)^{1/2}$, da cui la soluzione]

   b) Qual è la posizione occupata dall'oggetto nell'istante t' di cui sopra? [Esprimete la posizione tramite le coordinate cartesiane x' e y']
   x' = …………………………………… = ………. m $v_0t'+(a_x/2)t'^2 = v_0t'/2 = 10$ m [esce dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato]
   y' = …………………………………… = ………. m $a_Yt'^2/2 = v't'/2 = 10$ m [come sopra]

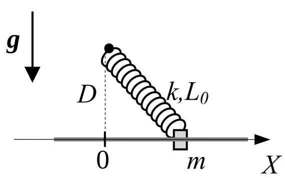
2. Una (piccola) cassa di massa $m = 6.0$ kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato di altezza $h = 2.0$ m e lunghezza $L = 4.0$ m. Alla cassa è annodata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa $M = 8.0$ kg. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile** e si suppone che essa, nel suo **eventuale** movimento, non slitti sulla superficie laterale della puleggia. La puleggia, che può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse, è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Quanto vale l'accelerazione a dell'oggetto di massa M? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]
   a = …………………………………… = ……….. m/s^2 $g(M-mh/L)/(M+m) = 3.5$ m/s^2 [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g-T/M$, con T modulo della tensione della fune. L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche a , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = -g\sin\theta+T/m$, con $\sin\theta = h/L$. Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per a si ottiene la soluzione]

   b) Quanto vale, in **modulo**, la forza F che il giogo esercita sulla puleggia?
   F = …………………………………… ~ ……….. N
   $(T^2\cos^2\theta+(T\sin\theta+T)^2)^{1/2}=T(2(1+h/L))^{1/2}=mMg(1+h/L)(2(1+h/L))^{1/2}/(M+m) \sim 87$ N [la puleggia è ovviamente in equilibrio. Su di essa agiscono le due tensioni della fune, di direzione una parallela al piano inclinato e l'altra verticale (entrambe sono orientate "verso il basso"). Infatti, affinché la fune non slitti sulla puleggia, è necessario che essa trasferisca alla puleggia stessa delle forze uguali in modulo alla tensione T della fune e orientate come la fune. Queste forze devono essere bilanciate dalla forza F , il cui modulo, quindi, deve essere uguale al modulo della somma **vettoriale** delle due tensioni. Dalla soluzione al quesito precedente si sa che $T = M(g-a)= mMg(1+h/L)/(M+m)$. Per calcolare il modulo della somma **vettoriale** è utile notare che la tensione nel tratto di collegamento dalla puleggia all'oggetto ha solo componente verticale, mentre la tensione del tratto di fune che va dalla puleggia alla cassa ha componente verticale $T\sin\theta = Th/L$ e componente orizzontale $T\cos\theta = T(1-\sin^2\theta)^{1/2} = T(1-h^2/L^2)^{1/2}$. Da qui la soluzione]

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa $m = 1.0$ kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale. Il manicotto è attaccato a una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 25$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = 1.0$ m il cui altro estremo è inchiodato a una parete verticale nella posizione indicata in figura (la distanza tra il chiodo e la guida è $D = 2L_0 = 2.0$ m); la figura mostra anche l'asse X che dovete usare (orizzontale come la guida e centrato sulla "verticale" del chiodo). Notate che, in figura, il manicotto si trova in una posizione x generica. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Qual è la coordinata x_{EQ} della posizione di equilibrio del manicotto? Quanto vale, all'**equilibrio**, il modulo della reazione vincolare N che la guida esercita sul manicotto?
   x_{EQ} = …………………………………… = ………. m 0 [rispetto all'asse considerato, l'equazione del moto si scrive: $a(x) = -(k/m)((D^2+x^2)^{1/2}-L_0)x/(D^2+x^2)^{1/2}$. Infatti il moto è dovuto alla **proiezione orizzontale** della forza elastica che, sfruttando la geometria del sistema, si scrive in questo modo. Si vede facilmente che l'accelerazione si annulla per $x=x_{EQ}=0$]

N = ……………………………………. = ………. N $-mg + k(D-L_0)$ = 15 N [la reazione vincolare serve per evitare che il manicotto si muova in direzione verticale. Dunque essa deve compensare le altre forze in questa direzione. Tali altre forze sono il peso, diretto verso il basso, e la forza elastica. Nella posizione di equilibrio, quest'ultima è relativa a un allungamento della molla pari a $(D-L_0)$ ed è diretta verso l'alto, da cui la soluzione]

b) Un operatore esterno (una manina) porta il manicotto nella posizione $x_0 = D$ per poi lasciarlo andare da fermo. Il manicotto si mette in movimento verso la posizione di equilibrio. Quanto vale, in modulo, la velocità v' con cui esso passa per la posizione di equilibrio x_{EQ} determinata al quesito precedente? [Ricordate che il movimento avviene con attrito trascurabile!]

v' = ……………………………………. ~ ………. m/s $((k/m)L_0^2(8-4\sqrt{2}))^{1/2}$ ~ 7.7 m/s [essendo l'attrito trascurabile, si conserva l'energia meccanica del manicotto, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Poiché il manicotto parte da fermo, è $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. Inoltre l'unica forza (conservativa) che fa lavoro è la forza elastica; dunque $\Delta U = \Delta U_{ELA} = (k/2)\Delta_{EQ}^2-(k/2)\Delta_0^2$, dove Δ_0 e Δ_{EQ} sono gli allungamenti della molla quando il manicotto è rispettivamente nella posizione x_0 e x_{EQ}. Per il teorema di Pitagora è $\Delta_0 = (2^{1/2}D - L_0) = L_0(2^{3/2} - 1)$ e $\Delta_{EQ} = L_0$. Quindi si ottiene $0 = (m/2)v'^2-(k/2)L_0^2((2^{3/2}-1)^2-1)$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 23/11/2009 Firma: