

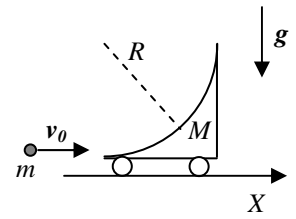
# Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 2 – 26/03/2010

Nome e cognome: .....

Matricola: .....

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un blocco di materiale di massa  $M = 2.0$  kg è scavato in forma di quarto di circonferenza di raggio  $R = 10$  cm, come rappresentato in figura (la figura riporta una vista laterale). Il blocco è munito di ruote che ne rendono possibile il movimento, con **attrito trascurabile**, lungo la direzione orizzontale (denominata X). Una pallina (puntiforme!) di massa  $m = M/4 = 0.50$  kg viene lanciata contro il blocco in modo da imboccare l'ingresso inferiore della guida, come mostrato in figura. Al momento dell'arrivo della pallina sulla guida, il blocco è **fermo**, mentre la pallina ha velocità di modulo  $v_0 = 10$  m/s diretta lungo l'asse X (cioè orizzontalmente). Si osserva che la pallina risale lungo la guida, muovendosi con **attrito trascurabile**, finché, a un dato momento, passa per l'uscita (il punto più alto). Nel frattempo si osserva ovviamente che **anche il blocco si mette in movimento**. [Usate  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> per il modulo dell'accelerazione di gravità, diretta come in figura]



a) Discutete per benino, in brutta, quali grandezze del sistema si conservano nel processo (risalita della pallina lungo la guida) e perché.

Discussione: ..... Nel processo considerato non ci sono forze dissipative (gli attriti sono trascurabili) e quindi si conserva l'energia meccanica totale del sistema pallina+blocco. Inoltre sul sistema agiscono forze esterne (forza peso e forze di reazione vincolare sulle ruote del blocco) che hanno tutte direzione verticale, per cui il sistema si può considerare isolato lungo l'asse X. Pertanto si conserva la quantità di moto totale del sistema **lungo questa direzione**.

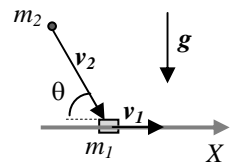
b) Nell'istante in cui la pallina passa per l'uscita della guida, che relazione deve sussistere tra velocità della pallina e velocità del blocco (esprese entrambe rispetto all'asse X "fisso" nel laboratorio)? Discutete per benino in brutta.

Discussione: ..... Nell'istante considerato, tenendo conto del fatto che la guida termina con un tratto verticale (è un quarto di circonferenza), la pallina si trova a muoversi solo in direzione verticale **rispetto al blocco**. Di conseguenza si può affermare che, in questo istante, la componente orizzontale della velocità della pallina,  $v'_x$  deve essere uguale alla velocità  $V'$  del blocco (il quale può muoversi, poverino, solo lungo X), cioè  $v'_x = V'$ . Attenzione: la pallina ha anche una componente di velocità lungo l'asse Y, che è diversa da zero!

c) Quanto vale la velocità  $V'$  del blocco nell'istante considerato sopra, cioè quello in cui la pallina passa per l'uscita?  $V' = \dots\dots\dots = \dots\dots$  m/s  $v_0 m / (m + M) = v_0 / 5 = 2.0$  m/s [sfruttiamo l'affermazione discussa nelle soluzioni del punto precedente. Dato che si conserva la componente X della quantità di moto totale del sistema e dato che inizialmente la quantità di moto è  $mv_0$ , si ha  $mv_0 = mv'_x + MV' = (m + M)V'$ , da cui, usando la relazione tra le masse, la soluzione]

d) E quanto vale, **in modulo**, la velocità  $v'$  della pallina nello stesso istante? [Ricordate che la velocità è un vettore!]  $v' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots$  m/s  $(V'^2 + (v_0^2 - 2gR - 5V'^2))^{1/2} = (v_0^2 - 2gR - 4V'^2)^{1/2} = (v_0^2 - 2gR - 4v_0^2/25)^{1/2} = (21v_0^2/25 - 2gR)^{1/2} \sim 9.1$  m/s [per questa risposta occorre considerare la conservazione dell'energia meccanica totale del sistema:  $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$ . Poiché inizialmente si muove solo la pallina, si ha  $\Delta E_K = (m/2)v'^2 + (M/2)V'^2 - (m/2)v_0^2 = (m/2)(v'^2_x + v'^2_y) + (M/2)V'^2 - (m/2)v_0^2 = (m/2)(V'^2 + v'^2_y) + (M/2)V'^2 - (m/2)v_0^2 = (m/2)(5V'^2 + v'^2_y - v_0^2)$ , dove abbiamo usato l'affermazione trovata alla soluzione del quesito precedente e la relazione tra le masse. Inoltre è  $\Delta U_G = mgR$  (la pallina aumenta la sua quota per un tratto pari al raggio della guida) da cui si ottiene:  $v'^2_y = -2gR - 5V'^2 + v_0^2$ , dove  $V'$  è stato determinato in precedenza. A questo punto la soluzione si ottiene ricordando che la velocità è un vettore, e quindi il modulo è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti, e tenendo conto che, sulla base di quanto già affermato, è  $v'^2_x = V'^2$ ]

2. Un manicotto di massa  $m_1 = m = 2.0$  kg può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale. Inizialmente il manicotto si muove con velocità  $v_1$  diretta nel verso positivo dell'asse X (parallelo alla guida) e di modulo  $v_1 = 0.80$  m/s. Ad un dato istante nel manicotto **si conficca** un proiettile di massa  $m_2 = m/5$  che impatta sul manicotto avendo, subito prima dell'urto, la velocità  $v_2$  diretta come in figura (il proiettile proviene "da sinistra" e l'angolo indicato, misurato rispetto all'orizzontale, vale  $\theta = \pi/3$ ) e di modulo  $v_2 = 5v_1$ . [Ricordate che  $\cos(\pi/3) = 1/2$  e  $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ , con  $\sqrt{3} \sim 1.7$ ]



a) Quanto vale la velocità  $v'$  con cui il sistema manicotto+proiettile (conficcato) si muove subito dopo l'urto?

$v' = \dots\dots\dots = \dots\dots$  m/s  $(5/6)(1 + \cos\theta)v_1 = 5v_1/4 = 1.0$  m/s [considerando la situazione subito dopo e quella subito prima dell'urto, si ha che il sistema proiettile e manicotto è isolato lungo la direzione orizzontale, che è quella di moto, non essendoci forze esterne così dirette. Pertanto deve essere:  $m_1v_1 + m_2v_2\cos\theta = mv_1(1 + \cos\theta) = (m_1 + m_2)v' = (6/5)mv'$ , da cui la soluzione]

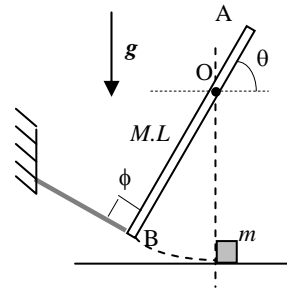
b) Dimostrate per benino in brutta, usando argomenti **quantitativi**, che, nell'urto considerato, **non** si conserva l'energia cinetica complessiva del sistema.

Discussione: .....

Occorre calcolare la differenza di energia cinetica del sistema. Si

ha  $\Delta E_K = ((m_1+m_2)/2)v_1^2 - (m_1/2)v_1^2 - (m_2/2)v_2^2 = (m/2)((6/5)v_1^2 - v_1^2 - v_2^2/5) = (m/2)v_1^2 ((6/5)(25/16) - 1 - 5) = -(33/8)(m/2)v_1^2$ . Questo valore è palesemente diverso da zero, e dunque non c'è conservazione dell'energia cinetica. Ovviamente l'energia cinetica diminuisce, dato che essa viene spesa in parte per consentire la penetrazione del proiettile nel manicotto.

3. Una sottile sbarra omogenea di lunghezza  $L = 1.0$  m e massa  $M = 2.0$  kg è imperniata in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale attorno al perno O che la attraversa a tre quarti della sua lunghezza: facendo riferimento alla figura, questo significa che le lunghezze dei segmenti indicati sono  $OA = L/4$  e  $OB = 3L/4$ . All'estremo B della sbarra è legata una fune inestensibile di massa trascurabile che è inchiodata a una parete rigida verticale. Tutto il sistema è in equilibrio con gli angoli rappresentati in figura che valgono  $\theta = \pi/3$  e  $\phi = \pi/2$ . [Usate  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che  $\cos(\pi/3) = 1/2$  e  $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ , con  $3^{1/2} \sim 1.7$ ]



- a) Quanto valgono, **in modulo**, la tensione  $T$  della fune e la forza  $F$  che il perno esercita sull'asta nel punto O?

$T = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$  N       $T = Mg \cos \theta / 3 = 3.3$  N [la sbarra deve essere in equilibrio sia traslazionale che rotazionale. Per l'equilibrio rotazionale deve annullarsi la somma dei momenti delle forze rispetto a un dato polo, per esempio O. Le sole forze che fanno momento rispetto a questo polo sono il peso  $Mg$ , che ha braccio  $L \cos \theta / 4$  e tenderebbe a far ruotare la sbarra in senso antiorario, e la tensione della fune, che ha braccio  $3L/4$  e tenderebbe a far ruotare la sbarra in senso orario. Notate che la forza  $F$  ha braccio, e quindi momento, nullo rispetto ad O. All'equilibrio i moduli dei due momenti di forza devono uguagliarsi e da qui esce la soluzione]

$F = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$  N       $((Mg \sin \theta \cos \theta / 3)^2 + (-Mg \cos \theta / 3 + Mg)^2)^{1/2} = Mg(31/36)^{1/2} \sim 18$  N [per l'equilibrio traslazionale della sbarra il perno deve esercitare forze che bilanciano la forza peso  $Mg$  e la tensione della fune  $T$ , cioè, in termini vettoriali, deve essere  $0 = F + Mg + T$ . La componente orizzontale della forza  $F$  è uguale e opposta alla componente orizzontale della tensione della fune, che vale, per la geometria del sistema,  $T \sin \theta = Mg \sin \theta \cos \theta / 3$ , dove abbiamo usato la risposta al quesito precedente. La componente verticale è invece data dalla somma algebrica della componente verticale di  $T$ , che vale  $T \cos \theta = Mg \cos^2 \theta / 3$ , e della forza peso  $Mg$ , che punta in direzione opposta e quindi avrà un segno opposto. Ricordando che il modulo di un vettore si trova come radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti si ha la soluzione]

- b) Supponete ora che la fune venga improvvisamente tagliata; subito dopo il taglio si osserva che la sbarra comincia a ruotare con velocità iniziale nulla attorno all'asse passante per il perno. Nella sua rotazione la sbarra assume ad un dato istante una direzione verticale (cioè l'angolo  $\theta$  di figura diventa  $\pi/2$ ). Quanto vale la velocità angolare  $\omega$  della sbarra in tale istante? [Trascurate ogni forma di attrito; per la risposta può farvi comodo ricordare il teorema degli assi paralleli,  $I = I_{CM} + Md^2$ , con  $d$  distanza tra il polo considerato nel calcolo di  $I$  e il centro di massa, e  $I_{CM}$  momento di inerzia per rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa]

$\omega = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$  rad/s       $(2Mg(L/4)(-\sin \theta + 1)/I)^{1/2} = (96Mg(L/4)(-\sin \theta + 1)/(7ML^2))^{1/2} = (24g(-\sin \theta + 1)/(7L))^{1/2} \sim 2.1$  rad/s [nella rotazione della sbarra non intervengono forze dissipative e dunque l'energia meccanica si conserva:  $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$ . La variazione di energia cinetica, supponendo nulla la velocità iniziale, è  $\Delta E_K = (1/2)\omega^2$ , mentre la variazione di energia potenziale gravitazionale è dovuta alla variazione di quota del centro di massa della sbarra, e quindi è  $\Delta U_G = Mg(L/4)(-\sin \theta + 1)$  (la sbarra è omogenea e quindi il centro di massa si trova a metà della sua lunghezza, ovvero a distanza  $L/4$  dal perno O). Per la soluzione, occorre calcolare il momento di inerzia  $I$ : si può o eseguire il calcolo diretto (per integrazione) oppure sfruttare il teorema degli assi paralleli. Essendo, per una sbarra sottile omogenea,  $I_{CM} = ML^2/12$  ed avendosi  $d = L/4$ , è  $I = ML^2(1/12 + 1/16) = (ML^2/48)(4+3) = (7/48)ML^2$ , da cui la soluzione]

- c) Quanto vale l'accelerazione angolare  $\alpha$  dell'asta quando essa si trova nella posizione di cui al quesito precedente?

$\alpha = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$  rad/s<sup>2</sup>      0 [per l'equazione del moto rotazionale si ha  $\alpha = \Sigma \tau / I$ . Le forze (esterne) che agiscono sull'asta sono la forza peso, applicata al centro di massa e diretta verso il basso, e la forza esercitata dal perno sull'asta (il vincolo che impedisce il moto di traslazione). Entrambi queste forze hanno momento nullo rispetto al polo O: infatti le forze del perno sono applicate al punto O, mentre il braccio della forza peso, nell'istante considerato (l'asta è verticale), è nullo, per cui nullo è il momento della forza peso. Da qui la soluzione]

- d) Supponete ora che, quando l'asta si trova a passare per la posizione di cui al quesito precedente, il suo estremo urti **anelasticamente** con un oggetto **puntiforme** di massa  $m = M/9$  (il carattere anelastico dell'urto significa che, in seguito alla collisione, l'oggetto rimane **conficcato** nell'asta), che inizialmente si trovava fermo nella posizione indicata in figura, poggiato su un piano. Quanto vale la velocità angolare  $\omega'$  dell'asta **subito dopo** l'urto? [State attenti a valutare bene cosa si conserva...]

$\omega' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$  rad/s       $(7/48)(48/10)\omega = (7/10)\omega \sim 1.5$  rad/s [l'urto è anelastico per cui non si conserva l'energia cinetica del sistema. Inoltre non si conserva neanche la quantità di moto, dato che la forza che il perno esercita sull'asta è impulsiva e fa sì che il sistema non possa ritenersi isolato. Tuttavia, come già notato, questa forza ha braccio nullo, per cui, nella breve durata dell'urto (la forza peso, che esiste, non riesce a contribuire in modo significativo), il sistema si può considerare isolato rispetto ai momenti. Dunque si conserva il momento angolare:  $I\omega = I'\omega'$ , con  $I' = I + m(3L/4)^2 = (7/48)ML^2 + (9/16)mL^2 = ML^2(7/48 + 1/16) = (10/48)ML^2$ , dove si è tenuto in debito conto il fatto che, in seguito all'urto anelastico, il momento di inerzia complessivo del sistema cambia, diventando la somma di quello della sbarra e di quello della massa puntiforme  $M = m/2$ , che, trovandosi tale massa a distanza  $3L/4$  dal polo, vale  $M(3L/4)^2$ ]

- e) Come cambierebbe la soluzione del problema supponendo un urto completamente **elastico** tra estremità dell'asta e oggetto puntiforme? [Limitatevi a scrivere le equazioni rilevanti, discutendole per bene in brutta]

**Discussione:** ..... in caso di urto elastico occorre considerare separatamente le velocità dell'oggetto e dell'asta dopo l'urto, dato che l'oggetto non rimane più conficcato nell'asta. Ricordando l'espressione del momento angolare per un oggetto puntiforme,  $L = r \times mv$  e notando che, per la geometria del problema, si ha  $L_{OGGETTO} = mv'(3L/4)$ , con  $v'$  velocità dell'oggetto dopo l'urto (tale velocità è diretta orizzontalmente a causa della presenza del piano). La conservazione del momento angolare, che continua a valere anche in questo caso, si scrive allora:  $I\omega = I\omega' + mv'(3L/4)$ . D'altronde la conservazione dell'energia cinetica complessiva del sistema, dovuta al carattere elastico dell'urto, impone:  $(I/2)\omega^2 = (I/2)\omega'^2 + (m/2)v'^2$ . Si ha dunque un sistema di due equazioni e due incognite, la velocità angolare dell'asta e quella traslazionale dell'oggetto, entrambe dopo l'urto, che può essere risolto. L'operazione non è molto agevole dal punto di vista algebrico a causa della presenza di un'equazione del secondo grado, per cui vi si risparmia volentieri questa fatica!].

---

**Nota:** acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 26/03/2010

Firma: